DOTTORATO DI RICERCA IN FISICA

Università di Parma

Azione wilsoniana e risommazione della teoria delle perturbazioni

Michele Simionato

anno accademico 1996-1997

Indice

Capitolo 0

Introduzione

Nella presente tesi si applica il punto di vista del gruppo di rinormalizzazione di Wilson ($\Lambda-RG$) alla teoria di campo, studiando in dettaglio tre aspetti particolarmente interessanti: a) il legame con il gruppo di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low ($\mu-RG$), b) lo studio generale delle simmetrie lineari e in particolare delle simmetrie di gauge, c) il problema della risommazione della serie perturbativa.
I risultati ottenuti sono: 1) un metodo di calcolo per ricavare perturbativamente le funzioni β e γ del $\mu-RG$ a partire dal $\Lambda-RG$; 2) delle identità funzionali che generalizzano le identità di Ward-Takahashi e descrivono la variazione dell'azione efficace per trasformazioni di simmetria, valide a tutti gli ordini in teoria delle perturbazioni; 3) una procedura di risommazione della serie perturbativa consistente per teorie asintoticamente libere, cioè priva dell'ambiguità dovuta al polo di Landau infrarosso. Inoltre il problema della consistenza tra risommazione e gauge invarianza viene affrontato e risolto nel caso delle teorie di gauge abeliane, in particolare per l'elettrodinamica quantistica.

Punti di vista sulla rinormalizzazione

Il termine "rinormalizzazione" ha in letteratura diversi significati e diverse interpretazioni, spesso anche molto differenti tra di loro. Sostanzialmente però vi sono due punti di vista principali: quello tradizionale della teoria di campo relativistica e quello moderno della teoria di campo statistica.

Nell'*impostazione tradizionale* [1] la rinormalizzazione è una procedura di "rimozione degli infiniti" che permette di rendere ben definite le ampiezze di transizione dei processi fisici. In questo ambito le tecniche di rinormalizzazione sono strettamente legate alla teoria delle perturbazioni e allo sviluppo in diagrammi di Feynman. Lo scopo finale è quello di definire un metodo ricorsivo per la costruzione delle correzioni perturbative alle funzioni di Green, partendo dalla conoscenza dell'azione classica della teoria.

Un primo passo per la costruzione di una teoria della rinormalizzazione perturbativa consiste nell'introduzione di una qualche procedura di regolarizzazione ultravioletta in grado di rendere finiti i diagrammi di Feynman. In questo contesto si dimostra che è possibile ottenere un limite ben definito alla rimozione del regolatore a patto di modificare i parametri dell'azione con la quale si costruisce la teoria delle perturbazioni. L'idea è quella di riassorbire tutte le divergenze che si trovano nelle infinite funzioni di Green della teoria in un numero finito di parametri "nudi" (bare) che divergono quando si rimuove il regolatore. La relazione tra i parametri bare e i parametri rinormalizzati (finiti) dipende dalla regolarizzazione e dalle prescrizioni di rinormalizzazione utilizzate e può essere stabilita ordine per ordine nella teoria delle perturbazioni.
È implicita in questa procedura un'ottica di teoria fondamentale, nel senso che l'azione classica viene assunta nota a tutte le scale e dipendente da un numero finito di parametri fisici (le masse e le costanti di accoppiamento) ottenuti dalle misure sperimentali. In quest'ottica la procedura di regolarizzazione deve essere intesa come un puro artificio matematico privo di ogni significato fisico ed è quindi ragionevole adottare regolarizzazioni totalmente non fisiche, come in particolare la regolarizzazione dimensionale. Da un punto di vista rigoroso questo procedimento può sembrare piuttosto "artigianale", in quanto coinvolge "miracolose" cancellazioni (a tutti gli ordini) di quantità infinite per dare quantità finite.

Un notevole passo in avanti è stato compiuto nei lavori di Bogoliubov, Parasiuk, Hepp e Zimmermann [2, 3, 4]. Nella formulazione di BPHZ le funzioni di Green irriducibili ad una particella (1PI) vengono definite senza ricorrere ad alcun tipo di regolarizzazione[1], attraverso una serie di sottrazioni opportune che si ottengono dalla formula delle foreste di Zimmermann. Tale formula permette di definire ricorsivamente i vertici propri in maniera non ambigua e a tutti gli ordini nell'espansione in $\hbar$, direttamente in termini delle quantità rinormalizzate.
Si noti che questa impostazione, per quanto potente e rigorosa da un punto di vista di principio, non è in grado, per sua costruzione, di dire nulla che vada al di là della teoria delle perturbazioni. In questo senso il punto di vista della teoria di campo statistica è molto più promettente.

Nell'*impostazione wilsoniana* [5] la rinormalizzazione è una tecnica per "integrare via" i gradi di libertà ultravioletti e ricavare l'hamiltoniana efficace alle scale macroscopiche, partendo dalla conoscenza dell'hamiltoniana alle scale microscopiche. In questa prospettiva la procedura di rinormalizzazione non è intrinsecamente legata alla teoria delle perturbazioni ed è possibile, in principio, effettuare l'integrazione dei

[1] Intendiamo senza bisogno di introdurre un regolatore ultravioletto; tuttavia in presenza di particelle a massa nulla è necessario introdurre un regolatore infrarosso come è stato fatto da Lowenstein [84].

gradi di libertà anche in maniera non perturbativa, attraverso opportune tecniche di approssimazione.
In questo contesto è possibile dare una chiara interpretazione fisica alle trasformazioni che fanno passare passare dalla scala microscopica Λ_0 a quella macroscopica Λ, cioè quello che in termini tecnici viene detto il flusso del gruppo di rinormalizzazione di Wilson. Il gruppo di rinormalizzazione permette infatti di ricavare le leggi di scaling delle funzioni di correlazione al variare della scala di osservazione. In particolare le teorie invarianti di scala (teorie critiche) corrispondono ai punti fissi del flusso.
Si noti che è implicita in questa impostazione un' ottica di teoria efficace, nel senso che l'azione efficace dipende da un numero infinito di parametri che non possono essere specificati con un numero finito di misure sperimentali. L'unico modo per garantire la predittività è allora assumere che nell'intorno dei punti fissi, nelle regioni di scaling, solo un numero finito di coefficienti sia rilevante per descrivere la fisica macroscopica di bassa energia. Questa ipotesi è il corrispettivo wilsoniano della proprietà di rinormalizzabilità ordinaria [5, 6] e può essere dimostrata perturbativamente a tutti gli ordini nella costante di accoppiamento, come è stato mostrato formalmente da Polchinski [7].

Per capire meglio i legami tra la teoria della rinormalizzazione tradizionale e il punto di vista wilsoniano, conviene adottare una formulazione basata sull'azione efficace tagliata $\Pi(\phi; \Lambda, \Lambda_0)$, ottenuta mediante una trasformazione di Legendre dall'azione wilsoniana $\mathcal{S}(\phi; \Lambda, \Lambda_0)$, che si ricava integrando i gradi di libertà compresi tra Λ e Λ_0. Nel seguito indicheremo brevemente questa formulazione con la sigla $\Lambda-$RG [8, 9, 10].

Aspetti perturbativi del $\Lambda-$RG

L'idea alla base delle varie formulazioni del gruppo di rinormalizzazione di Wilson *continuo* [5, 7, 11] è quella di convertire il problema dell'integrazione dei gradi di libertà nel problema della soluzione di un'equazione di evoluzione in Λ (l'equazione del gruppo di rinormalizzazione) per l'azione efficace. La formulazione del $\Lambda-$RG è particolarmente conveniente perchè l'equazione di evoluzione si può risolvere ricorsivamente in $\hbar$, avendo fissato le condizioni al contorno (in questo formalismo le condizioni al contorno corrispondono alle prescrizioni di rinormalizzazione e definiscono i parametri rinormalizzati della teoria). Siccome l'azione efficace alla scala macroscopica $\Lambda = 0$ è direttamente legata al funzionale generatore delle funzioni di Green 1PI tagliate nell'ultravioletto ($\Pi(\phi; 0, \Lambda_0) = \Gamma(\phi; \Lambda_0)$) il confronto con il punto di vista tradizionale, in cui il regolatore è il cutoff Λ_0, è immediato. Inoltre nella formulazione del Λ-RG è naturale dare dimostrazioni ricorsive e quindi valide a tutti gli ordini perturbativi in $\hbar$. Per esempio la prova della proprietà di rinormalizzabilità nel senso tradizionale consiste nel dimostrare che nel limite in cui si rimuove il cutoff ultravioletto l'azione efficace $\Pi^{[\ell]}(\phi; \Lambda, \infty)$ è funzione solo dei parametri rinormalizzati. Analogamente, in teorie senza massa, si pùo dimostrare a tutti gli ordini la proprietà di finitezza infrarossa per le configurazioni di momenti non eccezionali [10, 12, 13].

È possibile applicare la tecnica del $\Lambda-$RG anche alle teorie di gauge [14, 15, 16, 17, 18] (per una trattazione nella formulazione di Polchinski si vedano [19, 20]). Infatti, anche se l'equazione di evoluzione non è gauge-invariante e l'azione effettiva alla scala Λ trasforma in maniera non banale sotto trasformazioni di gauge, ciò nonostante è possibile dimostrare a tutti gli ordini perturbativi che il termine di rottura della simmetria si annulla nei limiti fisici $\Lambda \to 0$ e $\Lambda_0 \to \infty$ (in assenza di anomalie). Il prezzo da pagare è la necessità di effettuare ordine per ordine un opportuno fine tuning di un numero finito di parametri liberi della teoria (i parametri rilevanti non fissati dalle prescrizioni di rinormalizzazione). Del resto questo risultato non è inaspettato, perchè può essere ottenuto anche con le tecniche generali della rinormalizzazione algebrica, che sono indipendenti dalla regolarizzazione utilizzata e valgono anche quando la simmetria di gauge viene rotta. Nel formalismo del $\Lambda-$RG è possibile provare direttamente il principio dell'azione quantistica [18, 19] e dare quindi una dimostrazione ricorsiva di gauge invarianza, valida a tutti gli ordini nell'espansione in $\hbar$.

Teoria delle perturbazioni migliorata

Chiaramente è molto utile avere dei metodi di approssimazione sistematici che siano in grado di tenere conto di correzioni a tutti gli ordini perturbativi. Uno di questi metodi "migliorati" (improved) è la risommazione basata sull'equazione del gruppo di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low, che descrive l'indipendenza della fisica dal punto di sottrazione μ, la scala di energia a cui si fissano le prescrizioni di rinormalizzazione. In termini grossolani il miglioramento consiste nell' usare nei diagrammi di Feynman la costante di accoppiamento "running" $g(\mu)$, calcolata dalla conoscenza della funzione $\beta(g)$, al posto della costante di accoppiamento ordinaria: ciò permette di risommare contributi a tutti gli ordini perturbativi. Tuttavia la risommazione non è necessariamente consistente a tutte le scale. In teorie non asintoticamente libere l'inconsistenza è dovuta alla presenza del polo di Landau ultravioletto; in teorie asintoticamente libere alla presenza del polo di Landau infrarosso. Mentre il primo problema è meno preoccupante (in un'ottica di teoria efficace ci si aspetta di uscire dalla regione di universalità alle grandi scale di energia e che quindi sia necessario tenere conto esplicitamente del cutoff ultravioletto per definire la teoria stessa) il secondo è molto più delicato. Infatti l'origine del polo di Landau infrarosso è piuttosto controversa in letteratura e può essere o non essere un'indicazione di fisica non perturbativa. Il nostro contributo originale su questa questione [21, 22] consiste nel'osservare che nel formalismo del $\Lambda-$RG è possibile definire una tecnica di risommazione della serie perturbativa priva di problemi infrarossi. In particolare in questa tesi studiamo in dettaglio i legami tra la risommazione usuale $\mu-$RG e la risommazione $\Lambda-$RG e affrontiamo il problema della compatibilità tra la risommazione $\Lambda-$RG e la gauge invarianza, risolvendolo nel caso delle teorie di gauge abeliane.

Aspetti non perturbativi del $\Lambda-$RG

Per completezza osserviamo che le equazioni di evoluzione del $\Lambda-$RG possono essere risolte anche con tecniche non perturbative, mediante opportuni troncamenti. In letteratura sono state molto studiate applicazioni alla teoria dei fenomeni critici [8, 23], alla QCD [25, 26], alla rottura spontanea della simmetria chirale [27, 28], alla teoria di campo a temperatura finita [29, 30], alla supersimmetria [31] e a molti altri campi di indagine (si veda [32] per una bibliografia aggiornata). Il problema maggiore in questo tipo di studi è la stima dell'errore compiuto usando un certo schema di approssimazione. In teorie di gauge, inoltre, non sono noti troncamenti consistenti con la gauge invarianza ed al più è possibile stimare numericamente il termine di rottura della simmetria usando delle identità di Ward generalizzate [17].

Piano della tesi

Nel primo capitolo introduciamo la tecnica del $\Lambda-$RG a livello perturbativo confrontandola con i punti di vista tradizionali (la formulazione con i controtermini e la tecnica delle sottrazioni di BPHZ). Nel secondo capitolo illustriamo i legami col gruppo di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low fornendo un metodo di calcolo per ricavare perturbativamente le funzioni β e γ del $\mu-$RG a partire dal $\Lambda-$RG. Nel terzo capitolo analizziamo in dettaglio il problema della trattazione delle simmetrie lineari nel $\Lambda-$RG, con applicazioni alla QED. A partire dal quarto capitolo cominciamo a studiare il problema della risommazione della serie perturbativa, mostrando esplicitamente che la risommazione ispirata dal $\Lambda-$RG è priva di problemi infrarossi. Nel quinto capitolo affrontiamo il caso della QED, dimostrando la compatibilità tra risommazione e gauge invarianza. Chiudono il lavoro due appendici; la prima riguarda un confronto tra l'equazione di evoluzione del $\Lambda-$RG ed altre formulazioni diffuse in letteratura, la seconda riporta alcune convenzioni e proprietà utili.

Ringraziamenti

Ci sono molte persone che ho conosciuto in questi anni a Parma e che vorrei ringraziare.

In primo luogo ringrazio Pino Marchesini da cui è partito lo spunto per questa tesi e Marisa Bonini, con cui ho lavorato più a stretto contatto e che mi ha insegnato una quantità di cose.

In secondo luogo ringrazio le varie persone con cui ho discusso di Fisica (e non solo) in vari incontri amichevoli, in particolare Antonio Grassi, la cui competenza negli aspetti più intricati della rinormalizzazione perturbativa mi ha sempre impressionato, ed Enzo Branchina, a cui si deve la maggioranza di quel tanto che ho capito sugli aspetti non perturbativi del gruppo di rinormalizzazione.

In terzo luogo ringrazio calorosamente tutti i colleghi dell'ufficio, grazie ai quali la mia permanenza sul "posto di combattimento" è stata davvero piacevole. In particolare ringrazio Francesco di Renzo (di cui non loderò mai abbastanza la cortesia e la disponibilità) e Giuseppe Burgio (che verrà sempre ricordato per i generi alimentari e dolciari che ci portava in quantità dalla Sicilia) che per primi mi hanno accolto nel mondo per me allora misterioso del dottorando, e Federica Vian, che si è aggiunta più tardi.

Per ultimo, un ringraziamento particolare va a Massimiliano Grazzini, con cui ho diviso non solo l'ufficio, ma anche l'appartamento (assieme anche a Paolo e Giulio, che ricordo con affetto). In questi anni abbiamo veramente vissuto assieme e mi sembrerà strano non vederlo più tutti i giorni. Grazie davvero !

Infine meritano una menzione non solo tutti i colleghi e gli amici del dipartimento di Fisica che non ho citato per esteso, ma anche tutta la città di Parma che sicuramente è una delle più belle e più vivibili d'Italia e che ho imparato ad amare in questi tre anni.

Chissà se l'insondabile futuro mi riporterà mai in questi paraggi !

Capitolo 1

Formulazione del Λ-RG

In questo primo capitolo discutiamo il punto di vista wilsoniano alla rinormalizzazione, introducendo una forma dell'equazione di evoluzione particolarmente adatta a un confronto con la teoria della rinormalizzazione tradizionale. In particolare, considerando la teoria $\lambda\phi^4$, da una parte mostriamo come si risolve perturbativamente l'equazione di evoluzione al primo ordine ("one-loop"), dall'altra proviamo la proprietà di rinormalizzabilità perturbativa a tutti gli ordini.

1.1 Richiami sulla formulazione statistica della teoria di campo

Nella formulazione statistica [5, 6, 33, 35] la teoria di campo viene vista come un'approssimazione continua macroscopica, valida a grandi distanze, di una teoria statistica microscopica nota a corte distanze. Per fissare le idee supponiamo che la teoria statistica microscopica sia definita su un reticolo ipercubico d-dimensionale euclideo infinito di passo fissato a_0; indichiamo con $x = (a_0 n_1, \ldots, a_0 n_d)$ il punto del reticolo ($x \in a_0^d \mathbb{Z}^d$) e con ϕ_x le variabili statistiche. La teoria è completamente specificata dalla conoscenza dell'azione microscopica $S_0(\phi; a_0)$ da cui si ottiene il peso statistico delle configurazioni $\phi = \{\phi_x\}$ e quindi la funzione di partizione

$$Z(j; a_0) \equiv \int \Pi_x d\phi_x e^{-S_0(\phi;a_0)+a_0^d \sum_x j_x \phi_x}, \tag{1.1}$$

definita a meno di un fattore moltiplicativo. Conoscendo l'azione microscopica è possibile calcolare i valori medi di ogni osservabile $O_0(\phi)$

$$< O_0(\phi) > \equiv \frac{1}{Z(0; a_0)} \int \Pi_x d\phi_x e^{-S_0(\phi;a_0)} O_0(\phi) \tag{1.2}$$

e le funzioni di Green

$$< \phi_{x_1} \cdots \phi_{x_m} >= \frac{1}{Z(0;a_0)} \int \Pi_x d\phi_x e^{-S_0(\phi;a_0)} \phi_{x_1} \cdots \phi_{x_m}. \tag{1.3}$$

Se si fanno misure su scale di lunghezza ℓ molto maggiori del passo reticolare ($\ell >> a_0$) la teoria statistica discreta può venire rimpiazzata da una teoria efficace continua con un cutoff sui momenti inversamente proporzionale al passo reticolare ($\Lambda_0 = \pi/a_0$) e la funzione di partizione si può scrivere nella forma

$$Z(j;\Lambda_0) = \int \{d\phi\}_{0\Lambda_0} e^{-S_0(\phi;\Lambda_0)+\int d^dx\ j(x)\phi(x)} \tag{1.4}$$

dove $S_0(\phi;\Lambda_0)$ è il corrispettivo continuo dell'azione microscopica e la misura $\{d\phi\}_{0\Lambda_0}$ è tale da tagliare le frequenze ultraviolette, cioè le fluttuazioni su scala inferiore al passo reticolare. A partire dalla funzione di partizione (1.4) è possibile definire il funzionale $W(j;\Lambda_0) = \log Z(j;\Lambda_0)$ e la sua trasformata di Legendre[1]

$$\Gamma(\phi;\Lambda_0) = \int d^dx\ j(x)\phi(x) - W(j;\Lambda_0) + W(0;\Lambda_0), \quad \phi(x) \equiv \frac{\delta W}{\delta j(x)}. \tag{1.5}$$

Chiamiamo il funzionale $\Gamma(\phi;\Lambda_0)$, ottenuto integrando i gradi di libertà tra 0 e Λ_0 e applicando una trasformazione di Legendre, azione effettiva macroscopica della teoria di campo efficace (in letteratura di solito si prende come azione macroscopica l'azione efficace di Wilson $\mathcal{S}(\phi;\Lambda,\Lambda_0)$, definita in appendice A). Il funzionale $\Gamma(\phi;\Lambda_0)$ genera le funzioni di Green 1-Particle-Irreducible (1PI) tagliate nell'ultravioletto [33] ed è comodo per un confronto con la teoria della rinormalizzazione tradizionale. Lo scopo della meccanica statistica è quello di calcolare l'azione macroscopica $\Gamma(\phi;\Lambda_0)$ a partire dalla conoscenza dell'azione microscopica $S_0(\phi;\Lambda_0)$. Poichè quest'ultima contiene in principio un numero infinito di termini è chiaro che il problema ha una soluzione ragionevole solo se si può provare una proprietà di universalità, cioè un'indipendenza dell'azione macroscopica, per configurazioni di campo di bassa energia, dalla conoscenza dettagliata dell'azione microscopica, di cui sarà sufficiente conoscere un numero finito di coefficienti. In questa ipotesi è possibile fissare tali coefficienti da misure di un numero finito di quantità macroscopiche estratte da $\Gamma(\phi;\Lambda_0)$. Per esempio nel caso di una teoria scalare in quattro dimensioni con simmetria $\phi \to -\phi$ è conveniente usare come variabili macroscopiche la massa e la costante di accoppiamento rinormalizzate, definite dalle relazioni

$$\partial_{p^2}\Gamma_2(p;\Lambda_0)|_{p=0} = 1,\ \Gamma_2(p;\Lambda_0)|_{p=0} = m^2,\ \Gamma_4(p_i;\Lambda_0)|_{p_i=0} = \lambda. \tag{1.6}$$

[1] Qui assumiamo di lavorare in un regime in cui la trasformazione di Legendre è un'operazione ben definita, cioè in assenza di transizioni di fase.

Il legame col punto di vista tradizionale è immediato: l'azione microscopica, che per motivi dimensionali in questo caso si può scrivere nella forma

$$S_0(\phi;\Lambda_0) = \int_x \frac{1}{2} Z_\phi \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 Z_m \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} Z_\lambda \phi^4 + O(1/\Lambda_0^2), \tag{1.7}$$

dove le funzioni adimensionali $Z_i = Z_i(\lambda, \Lambda_0/m)$ dipendono da λ e dal rapporto Λ_0/m, corrisponde all'usuale azione bare, e le prescrizioni di rinormalizzazione a momenti nulli (1.6) danno il legame tra le quantità macroscopiche (rinormalizzate) ϕ, m^2, λ, indipendenti da Λ_0, e le quantità bare

$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2} \phi, \quad m_0^2 = Z_m m^2 / Z_\phi, \quad \lambda_0 = Z_\lambda \lambda / Z_\phi^2. \tag{1.8}$$

Nel linguaggio perturbativo tradizionale i termini $O(1/\Lambda_0^2)$ (costanti irrilevanti) vengono trascurati e l'azione bare $S_0(\phi;\Lambda_0) = S_{cl}(\phi) + S_{ct}(\phi;\Lambda_0)$ viene spezzata in una parte classica (tree level) che non diverge col cutoff ed una parte divergente costituita dai controtermini che cancellano le divergenze ultraviolette dei diagrammi di Feynman generati dallo sviluppo perturbativo. La dimostrazione di tale cancellazione garantisce l'esistenza delle funzioni di Green nel limite $\Lambda_0 \to \infty$ e costituisce la prova di rinormalizzabilità nel senso usuale. La prova è piuttosto macchinosa con le usuali tecniche diagrammatiche [3] a causa di complicazioni di tipo combinatorio, che a nostro avviso [7] sono inessenziali e che allontanano da una comprensione fisica del problema. Dal punto di vista statistico da noi adottato, la proprietà di rinormalizzabilità dice semplicemente che a energie $E = 1/\ell << \Lambda_0$ la fisica è indipendente dalle costanti irrilevanti. La cosa è naturale per motivi dimensionali e può essere provata rigorosamente (a livello perturbativo) con poco sforzo, come vedremo. A tale scopo conviene introdurre la tecnica del $\Lambda-$RG che offre notevoli vantaggi:

- è una procedura sistematica di costruzione dei diagrammi di Feynman, più efficiente di quella di BPHZ, in quanto le divergenze ultraviolette vengono automaticamente cancellate;

- è fisicamente interpretabile come una tecnica di integrazione dei gradi di libertà ultravioletti nel senso del gruppo di rinormalizzazione di Wilson, di cui costituisce una riscrittura;

- permette, in principio, di definire la teoria di campo in maniera non perturbativa e, in pratica, di sviluppare una serie di tecniche di approssimazione che vanno al di là della teoria delle perturbazioni.

1.2 Equazione del gruppo di rinormalizzazione

Per illustrare la tecnica del $\Lambda-$RG (che chiameremo anche procedura di $\Lambda-$rinormalizzazione) consideriamo l'esempio della teoria $\lambda\phi^4$ in d dimensioni, $d = 1, 2, 3, 4$. Il caso $d = 1$ corrisponde alla meccanica quantistica di un oscillatore armonico perturbato, i casi $d = 2, 3$ hanno interesse per le applicazioni statistiche (corrispondono ad approssimazioni continue del modello di Ising nell'intorno del punto critico) e il caso $d = 4$ ha interesse per la fisica delle particelle elementari, in cui i campi scalari intervengono attraverso il meccanismo di Higgs. La costante di accoppiamento λ ha dimensione di massa $D_\lambda = 4 - d$, mentre il campo ϕ ha dimensione $D_\phi = d/2 - 1$. Per definire la procedura di $\Lambda-$rinormalizzazione introduciamo la funzione di partizione tagliata $Z(j; \Lambda, \Lambda_0)$ ottenuta integrando le frequenze sopra un certo cutoff infrarosso Λ e sotto il cutoff ultravioletto Λ_0

$$Z(j; \Lambda, \Lambda_0) \equiv \int [d\phi]_{\Lambda\Lambda_0} e^{-S_0^{int}(\phi,\Lambda_0)+\int_x \phi(x)j(x)} \tag{1.9}$$

dove S_0^{int} è la parte d'interazione dell'azione bare e il termine di misura, gaussiano, è dato esplicitamente dall'espressione

$$[d\phi]_{\Lambda\Lambda_0} \equiv [d\phi] \exp\left(-\frac{1}{2}\phi \cdot \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\phi\right) \tag{1.10}$$

in cui abbiamo usato le notazioni

$$\phi \cdot \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\phi \equiv \int_p \phi(-p)\Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}(p)\phi(p), \quad \int_p \equiv \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}, \tag{1.11}$$

$$\Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q) = \Delta(q)K_{\Lambda\Lambda_0}(q), \quad K_{\Lambda\Lambda_0}(q) = K_{0\Lambda_0}(q) - K_{0\Lambda}(q). \tag{1.12}$$

Per studi perturbativi conviene prendere come $\Delta(q)$ il propagatore libero $\Delta(q) = 1/(q^2+m^2)$. La funzione di taglio $K_{\Lambda\Lambda_0}(q)$ viene presa senza zeri e derivabile rispetto a Λ, ma tendente alla funzione non regolare

$$K_{\Lambda\Lambda_0}(q) \to \begin{cases} 1 & \Lambda < q < \Lambda_0 \\ 0 & \text{altrimenti ;} \end{cases} \tag{1.13}$$

in questo modo solo le frequenze tra Λ e Λ_0 contribuiscono all'integrale funzionale (1.9). È banale osservare che la (1.9) soddisfa l'equazione differenziale

$$\Lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Lambda}Z(j; \Lambda, \Lambda_0) = -\frac{1}{2}\int_q \frac{\delta}{\delta j(-q)}\Lambda\partial_\Lambda\Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}(q)\frac{\delta}{\delta j(q)}Z(j; \Lambda, \Lambda_0). \tag{1.14}$$

La (1.14) è un'equazione di enorme importanza: dice infatti che è possibile costruire la funzione di partizione $Z(j; \Lambda, \Lambda_0)$ ad ogni Λ conoscendo il suo valore a $\Lambda = \Lambda_0$; dunque in particolare si può ricavare la funzione di partizione fisica a $\Lambda = 0$. In altri termini l'integrale funzionale (1.9) può venire definito come la soluzione dell'equazione differenziale (1.14) con condizioni iniziali specificate. Questo è comune a tutte le tecniche di rinormalizzazione ispirate alle idee di Wilson[2].

Dalla (1.14) è immediato ricavare l'equazione sul funzionale generatore delle funzioni di Green connesse $W(j;\Lambda,\Lambda_0) = \log Z(j;\Lambda,\Lambda_0)$,

$$\Lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Lambda} W = -\frac{1}{2}\int_q \Lambda\partial_\Lambda \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\left(\frac{\delta W}{\delta j \delta j} + \frac{\delta W}{\delta j}\frac{\delta W}{\delta j}\right), \tag{1.15}$$

in cui si è usata la notazione abbreviata

$$\int_q \Lambda\partial_\Lambda \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0} X \equiv \int_q \Lambda\partial_\Lambda \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}(q) X(-q,q). \tag{1.16}$$

Dalla (1.15) si ricava l'equazione sul funzionale generatore delle funzioni di Green 1PI

$$\Gamma(\phi;\Lambda,\Lambda_0) = \phi\cdot j - W(j;\Lambda,\Lambda_0) + W(0;\Lambda,\Lambda_0), \quad \phi = \frac{\delta W}{\delta j}; \tag{1.17}$$

si ottiene

$$\Lambda\partial_\Lambda \Gamma = \frac{1}{2}\int_q \Lambda\partial_\Lambda \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\left(\frac{\delta W}{\delta j\delta j} + \frac{\delta W}{\delta j}\frac{\delta W}{\delta j} - \left[\frac{\delta W}{\delta j\delta j} + \frac{\delta W}{\delta j}\frac{\delta W}{\delta j}\right]_{j=0}\right). \tag{1.18}$$

Definendo

$$\Pi(\phi;\Lambda,\Lambda_0) = \Gamma - \frac{1}{2}\phi\cdot(\Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0} - \Delta^{-1})\phi \tag{1.19}$$

e sfruttando l'usuale relazione

$$\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi\delta\phi}\right)^{-1} = \frac{\delta W}{\delta j\delta j} \tag{1.20}$$

la (1.18) si può scrivere nella forma (usiamo l'abbreviazione $\Gamma^{-1}_{\phi\phi} \equiv \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi\delta\phi}\right)^{-1}$)

$$\Lambda\partial_\Lambda \Pi = \frac{1}{2}\int_q \Lambda\partial_\Lambda \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}(\Gamma^{-1}_{\phi\phi} - \Gamma_2^{-1}). \tag{1.21}$$

Un modo per riformulare tale equazione è quello di spezzare

$$\frac{\delta W}{\delta j\delta j} = \Gamma_2^{-1} + W^{int}_{jj}, \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi\delta\phi} = \Gamma_2 + \Gamma^{int}_{\phi\phi} \tag{1.22}$$

[2] Il legame con la formulazione di Wilson-Polchinski è illustrato in dettaglio nell'appendice A.

e introdurre un funzionale ausiliario $\bar{\Gamma}_{\phi\phi}$ definito dalla relazione ricorsiva

$$\bar{\Gamma}_{\phi\phi} = \Gamma^{int}_{\phi\phi} - \Gamma^{int}_{\phi\phi}\Gamma_2^{-1}\bar{\Gamma}_{\phi\phi}; \tag{1.23}$$

in questo modo dalla (1.20) risulta

$$\Gamma^{-1}_{\phi\phi} - \Gamma_2^{-1} = W^{int}_{jj} = -\Gamma_2^{-1}\Gamma^{int}_{\phi\phi}\Gamma_2^{-1} - \Gamma_2^{-1}\Gamma^{int}_{\phi\phi}W^{int}_{jj} = -\Gamma_2^{-1}\bar{\Gamma}_{\phi\phi}\Gamma_2^{-1} \tag{1.24}$$

e quindi

$$\Lambda\partial_\Lambda \Pi = -\frac{1}{2}\int_q \Lambda\partial_\Lambda \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\Gamma_2^{-1}\bar{\Gamma}_{\phi\phi}\Gamma_2^{-1}. \tag{1.25}$$

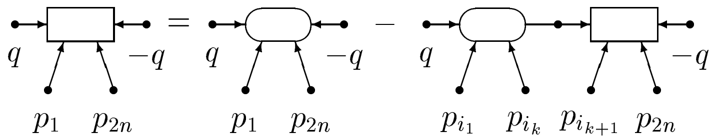
L'equazione di evoluzione in una forma pressochè identitica alla (1.21) è stata derivata in [8] e nella forma (1.25) in [10]. Risolvendo la (1.25) è possibile ricavare l'azione effettiva alla scala fisica $\Lambda = 0$.

1.2.1 Interpretazione diagrammatica

L'introduzione del funzionale $\bar{\Gamma}_{\phi\phi}$ nella (1.25) è conveniente perchè in tal modo le equazioni sui vertici propri possono essere risolte ricorsivamente. Per fare ciò conviene interpretare diagrammaticamente la (1.23) studiando i vertici $\bar{\Gamma}_{2+2n}$ che si ottengono derivando il funzionale $\bar{\Gamma}_{\phi\phi}$ rispetto a $\phi(p_1), \ldots, \phi(p_{2n})$ e ponendo $\phi(p_i) = 0$. Si ha, in notazione condensata ma che dovrebbe essere chiara al lettore,

$$\bar{\Gamma}_2 = 0, \quad \bar{\Gamma}_4 = \Gamma_4, \quad \bar{\Gamma}_{2+2n} = \Gamma_{2+2n} - \sum_{k=1}^{n-1}\Gamma_{2+2k}\Gamma_2^{-1}\bar{\Gamma}_{2+2n-2k}; \tag{1.26}$$

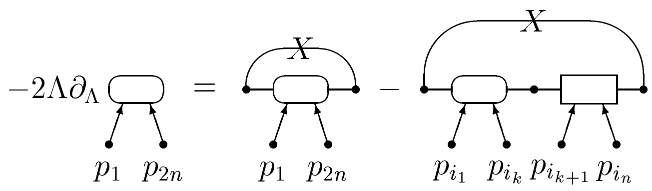
l'ultima relazione si può rappresentare graficamente nel modo seguente, in cui viene sottointesa una sommatoria su tutte le possibili $(2n)!/2^n$ permutazioni inequivalenti dei momenti $p_1 \ldots p_{2n}$:



In questo formalismo è immediato dare una rappresentazione diagrammatica delle equazioni di evoluzione (1.25) che sui vertici propri si scrivono, sottointendendo per brevità la dipendenza da Λ e Λ_0,

$$\Lambda\partial_\Lambda \Pi_{2n}(p_i) = -\frac{1}{2}\int_q \Lambda\partial_\Lambda \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}(q)\Gamma_2^{-1}(q)\bar{\Gamma}_{2n+2}(q,p_i,-q)\Gamma_2^{-1}(q). \tag{1.27}$$

Indicando con una crocetta il termine $\Lambda\partial_\Lambda\Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}(q)$ e con un pallino il propagatore completo $\Gamma_2^{-1}(q;\Lambda,\Lambda_0)$ la (1.27) ammette la rappresentazione grafica seguente:



1.2.2 Sviluppo perturbativo

Lo studio delle equazioni esatte (1.27) nel caso interagente[3] è al di là delle nostre possibilità; tuttavia è possibile definire una procedura ricorsiva che permette di risolvere il problema perturbativamente. La tecnica consiste nell'introduzione di un parametro $\hbar$ con la ricetta[4] $\Pi \to \Pi/\hbar,\ \Delta \to \hbar\Delta$; in questo modo le equazioni di evoluzione (1.25) assumono la forma

$$\Lambda\partial_\Lambda \Pi = \hbar I(\phi, \Lambda, \Lambda_0), \tag{1.28}$$

con

$$I(\phi; \Lambda, \Lambda_0) = -\frac{1}{2}\int_q \Lambda\partial_\Lambda \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\Gamma_2^{-1}\bar{\Gamma}_{\phi\phi}\Gamma_2^{-1}. \tag{1.29}$$

Sviluppando $\Pi = \sum_{\ell=0}^{\infty}\hbar^\ell \Pi^{(\ell)},\ I = \sum_{\ell=0}^{\infty}\hbar^\ell I^{(\ell)}$ si ottengono infinite equazioni ricorsive del tipo

$$\Lambda\partial_\Lambda \Pi^{(\ell)}_{2n}(p_1, \ldots, p_{2n}; \Lambda, \Lambda_0) = I^{(\ell-1)}_{2n}(p_1, \ldots, p_{2n}; \Lambda, \Lambda_0), \quad \ell \geq 1. \tag{1.30}$$

Le equazioni (1.30) permettono di ricavare le funzioni $\Pi^{(\ell)}_{2n}$ a partire dai vertici di ordine più basso. Iterando la procedura ℓ volte, alla fine le funzioni $\Pi^{(\ell)}_{2n}$ vengono ricavate da diagrammi di Feynman con ℓ loop costruiti a partire dai vertici $\Pi^{(0)}_{2n}$ dati dall'azione classica

$$\Pi^{(0)}(\phi) = S(\phi) = \int_x \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{1.31}$$

Vogliamo ora, per esemplificare, illustrare il calcolo di $\Pi^{(1)}$. Per fare ciò dobbiamo calcolare esplicitamente il funzionale ausiliare $\bar{\Gamma}_{\phi\phi}$ (o meglio i vertici ausiliari $\bar{\Gamma}_{2n+2}$) a partire da Γ considerato nell'approssimazione a zero loop, in cui gli unici vertici non nulli sono

$$\Gamma^{(0)}_2(q; \Lambda, \Lambda_0) = \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}(q), \quad \Gamma^{(0)}_4(q_i; \Lambda, \Lambda_0) = \lambda. \tag{1.32}$$

---

[3]Nel caso libero (cioè quando $\Gamma(\phi; \Lambda, \Lambda_0)$ è quadratico nei campi e non c'è interazione) le equazioni di evoluzione sono banali e $\Pi(\phi; \Lambda, \Lambda_0) = \Gamma(\phi; \Lambda_0, \Lambda_0)$ non dipende da Λ.

[4]Seguendo la ricetta un diagramma di Feynman con P propagatori e V vertici viene moltiplicato per un fattore $\hbar^{P-V+1} = \hbar^L$, quindi $\hbar$ è un parametro che ordina i diagrammi di Feynman a secondo del numero dei loop L.

$$\bar{\Gamma}^{(0)}_{2+2n}(q,p_i,-q) = (-1)^{n+1}$$

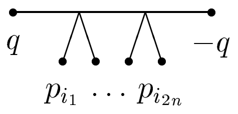


Figura 1.1: $\bar{\Gamma}_{2n+2}$ a zero loop. Vi sono n vertici λ e $n-1$ propagatori $\Delta_{\Lambda\Lambda_0}$.

Applicando la relazione ricorsiva (1.26) otteniamo (per brevità sottointendiamo la dipendenza dai momenti nei vertici propri e la somma sulle permutazioni inequivalenti)

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^{(0)}_4 &= \Gamma^{(0)}_4 = \lambda \\
\bar{\Gamma}^{(0)}_6 &= -\Gamma^{(0)}_4 \Delta_{\Lambda\Lambda_0} \bar{\Gamma}^{(0)}_4 = -\Gamma^{(0)}_4 \Delta_{\Lambda\Lambda_0} \Gamma^{(0)}_4 \\
\bar{\Gamma}^{(0)}_8 &= -\Gamma^{(0)}_4 \Delta_{\Lambda\Lambda_0} \bar{\Gamma}^{(0)}_6 = \Gamma^{(0)}_4 \Delta_{\Lambda\Lambda_0} \Gamma^{(0)}_4 \Delta_{\Lambda\Lambda_0} \Gamma^{(0)}_4 \\
\bar{\Gamma}^{(0)}_{2+2n} &= -\Gamma^{(0)}_4 \Delta_{\Lambda\Lambda_0} \bar{\Gamma}^{(0)}_{2n} = (-)^{n+1} \Gamma^{(0)}_4 \Delta_{\Lambda\Lambda_0} \Gamma^{(0)}_4 \cdots \Delta_{\Lambda\Lambda_0} \Gamma^{(0)}_4 .
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Diagrammaticamente la relazione generale è rappresentata in figura 1.1. La forma esplicita delle equazioni di evoluzione (1.27) per il propagatore e il vertice è

$$\begin{aligned}
\Lambda\partial_\Lambda \Pi^{(1)}_2 &= \frac{1}{2}\Lambda\partial_\Lambda \int_q \Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q)\lambda \\
\Lambda\partial_\Lambda \Pi^{(1)}_4 &= -\frac{1}{4}\Lambda\partial_\Lambda \sum_{i_1<i_2} \int_q \Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q)\Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q+p_{i_1}+p_{i_2})\lambda^2,
\end{aligned} \tag{1.34}$$

e in generale si ha

$$\begin{aligned}
\Lambda\partial_\Lambda \Pi^{(1)}_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\Lambda\partial_\Lambda \sum_{perm} \int_q & \Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q)\Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q+p_{i_1}+p_{i_2}) \\
& \cdots \Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q+p_{i_1}+\cdots+p_{i_{2n-2}})\lambda^n,
\end{aligned} \tag{1.35}$$

in cui la somma è fatta sulle $(2n)!/2^n$ permutazioni inequivalenti dei momenti.

1.3 Condizioni al contorno

Per risolvere le equazioni di evoluzione è necessario dare delle opportune condizioni al contorno a qualche scala Λ. Una scala privilegiata è quella ultravioletta $\Lambda = \Lambda_0$ in cui per costruzione[5] l'azione efficace corrisponde all'azione bare

$$\Pi(\phi;\Lambda_0,\Lambda_0) = S_0(\phi;\Lambda_0). \tag{1.36}$$

[5] Il motivo è che a $\Lambda = \Lambda_0$ i propagatori vengono completamente tagliati e tutte le correzioni perturbative si annullano, quindi $\Pi_{2n}(p_i;\Lambda_0,\Lambda_0) = S_{0,2n}(p_i;\Lambda_0)$.

In questo modo si ottiene una teoria delle perturbazioni in termini delle quantità bare. Questo modo di procedere è il più vicino al punto di vista originario di Wilson [5] ed è diffuso nella letteratura statistica [8, 9]. Tuttavia a noi interessa costruire una teoria delle perturbazioni in termini delle quantità rinormalizzate, in maniera tale da avere un confronto più diretto con la teoria della rinormalizzazione di BPHZ. Dunque conviene fissare in maniera diversa le condizioni al contorno sui coefficienti rilevanti (da cui si estraggono le quantità rinormalizzate) e su quelli irrilevanti. Tale procedura è stata applicata inizialmente da Polchinski [7] in un contesto un po' differente (cioè lavorando sull'azione wilsoniana $\mathcal{S}(\phi;\Lambda,\Lambda_0)$ e non su $\Pi(\phi;\Lambda,\Lambda_0)$).

Per definizione i coefficienti rilevanti[6] $\sigma_r(\Lambda;\Lambda_0)$ dell'azione efficace $\Pi(\phi;\Lambda,\Lambda_0)$ sono i coefficienti di dimensione di massa non negativa associati agli osservabili locali $O_r(x)$ di dimensione minore o uguale alla dimensione dello spaziotempo. In generale l'azione rilevante si può scrivere nella forma

$$\Pi_{rel}(\phi;\Lambda,\Lambda_0) = \sum_r \int_x \sigma_r(\Lambda,\Lambda_0) O_r(x) \tag{1.37}$$

e nell'esempio di ϕ_4^4 la (1.37) assume la la forma esplicita

$$\Pi_{rel}(\phi;\Lambda,\Lambda_0) = \int_x -\frac{1}{2}\sigma_\phi \phi \partial^2 \phi + \frac{1}{2}\sigma_m \phi^2 + \frac{1}{4!}\sigma_\lambda \phi^4. \tag{1.38}$$

Nello stesso modo si può definire la parte rilevante di ogni funzionale con gli stessi numeri quantici di Π (per esempio la parte rilevante dell'equazione di evoluzione si scrive nella forma $I_{rel} = \sum_r \int_x I_r(\Lambda;\Lambda_0) O_r(x)$). Tipicamente i coefficienti irrilevanti si estraggono dal funzionale $\Pi(\phi;\Lambda,\Lambda_0)$ attraverso uno sviluppo di Taylor a momenti nulli; per esempio in quattro dimensioni si può prendere

$$\begin{aligned} \sigma_\phi &\equiv \partial_{p^2} \Pi_2(p;\Lambda,\Lambda_0)|_{p=0} \\ \sigma_m &\equiv \Pi_2(p;\Lambda,\Lambda_0))|_{p=0} \\ \sigma_\lambda &\equiv \Pi_4(p_i;\Lambda,\Lambda_0))|_{p_i=0} \end{aligned} \tag{1.39}$$

Una volta che si è specificato come estrarre la parte rilevante del funzionale $\Pi(\phi;\Lambda,\Lambda_0)$, la parte irrilevante (e quindi i coefficienti irrilevanti) viene definita in maniera ovvia come $\Pi_{irr} = \Pi - \Pi_{rel}$. Nell'esempio di ϕ_4^4 si hanno le seguenti relazioni sui vertici propri:

$$\begin{aligned} \Pi_{2,irr} &= \Pi_2 - \Pi_2|_0 - p^2 \partial_{\bar{p}^2} \Pi_2|_0, \\ \Pi_{4,irr} &= \Pi_4 - \Pi_4|_0, \\ \Pi_{2n,irr} &= \Pi_{2n}, \quad n > 2. \end{aligned} \tag{1.40}$$

A questo punto è possibile specificare le condizioni al contorno.

[6] In particolare chiamiamo rilevanti anche i coefficienti adimensionali che nella terminologia originale di Wilson [5] sono detti marginali.

- Le condizioni al contorno sui coefficienti irrilevanti vengono fissate alla scala $\Lambda = \Lambda_0$

$$\Pi_{irr}(\phi; \Lambda_0, \Lambda_0) = S_{0,irr}(\phi; \Lambda_0) \tag{1.41}$$

  e sono di scarso interesse in quanto per la proprietà di rinormalizzabilità (che proveremo perturbativamente nel seguito) ci si aspetta che i coefficienti irrilevanti non influenzino la fisica di bassa energia, dunque possono essere messi a zero.

- Le condizioni al contorno sui coefficienti rilevanti vengono fissate alla scala fisica $\Lambda = 0$

$$\Pi_{rel}(\phi; 0, \Lambda_0) = S_R(\phi, m^2, \lambda) \tag{1.42}$$

  e permettono di determinare completamente la fisica di bassa energia in termini dei parametri rinormalizzati m^2 e λ che entrano nell'azione rinormalizzata $S_R(\phi, m^2, \lambda)$.

1.3.1 Condizioni al contorno per teorie a massa nulla

In teorie a massa nulla (cioè tali che $\Pi_2(p^2; \Lambda, \Lambda_0)|_{p^2=0}$ sia zero a $\Lambda = 0$) il limite fisico $\Lambda = 0$ è delicato a causa delle divergenze infrarosse ed è possibile operare in due modi.

1. $\mu-$prescrizioni. Si modifica lo sviluppo di Taylor fissando i coefficienti rilevanti al punto di sottrazione $\mu \neq 0$ [10]

$$\partial_{p^2}\Pi_2(p^2; 0, \Lambda_0)|_{p^2=\mu^2} = \tilde{\sigma}_\phi(\mu), \quad \Pi_4(p_i; 0, \Lambda_0)|_{p_i=\bar{p}_i} = \tilde{\sigma}_\lambda(\mu). \tag{1.43}$$

2. Λ_R-prescrizioni. Si mantiene lo sviluppo di Taylor a momenti nulli ma si fissano i coefficienti rilevanti alla scala non fisica $\Lambda_R \neq 0$ [7, 19]

$$\partial_{p^2}\Pi_2(p^2; \Lambda_R, \Lambda_0)|_{p^2=0} = \sigma_\phi(\Lambda_R), \quad \Pi_4(p_i; \Lambda_R, \Lambda_0)|_{p_i=0} = \sigma_\lambda(\Lambda_R). \tag{1.44}$$

È possibile ottenere univocamente la relazione tra i coefficienti rinormalizzati $\sigma_r(\Lambda_R)$ e i coefficienti rinormalizzati $\tilde{\sigma}_r(\mu)$ a tutti gli ordini in teoria delle perturbazioni, quindi è indifferente usare uno schema o l'altro. Si noti che in entrambi i casi le prescrizioni di rinormalizzazione dipendono da una scala di massa fittizia $\bar{\Lambda}$ ($\bar{\Lambda} = \Lambda_R$ oppure $\bar{\Lambda} = \mu$). Da qui discende un'invarianza per il cambio della scala $\bar{\Lambda}$, che corrisponde all'usuale gruppo di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low nel caso delle $\mu-$prescrizioni. Rimandiamo al secondo capitolo per una trattazione dettagliata di questo punto.

1.3.2 Condizioni al contorno per $d \neq 4$

La suddivisione in costanti rilevanti e irrilevanti dipende dalla dimensione dello spazio tempo. In particolare in dimensione $d > 4$ non esistono interazioni rilevanti con simmetria $\phi \to -\phi$ e ci si aspetta che la teoria sia libera nel limite $\Lambda_0 \to \infty$. Invece in tre dimensioni esiste una costante rilevante (adimensionale) in più, associata all' operatore ϕ^6. In due dimensioni esistono infinite costanti rilevanti, associate agli operatori del tipo ϕ^{2n} e $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\phi^{2m}$. Se comunque si parte da un'azione tree del tipo $\lambda\phi^4$, l'azione ultravioletta (bare) non può contenere nuovi termini in quanto, poichè la costante di accoppiamento ha dimensione positiva ($[\lambda] = 1$ in $d = 3$, $[\lambda] = 2$ in $d = 2$), vengono generati solo controtermini di dimensione minore di ϕ^4. Nel linguaggio tradizionale questo si traduce nel fatto che vi è solo un numero finito di diagrammi di Feynman divergenti e la teoria è super rinormalizzabile.

1.4 Forma integrale dell'equazione di evoluzione

Fissate le condizioni al contorno (1.41),(1.42) l'equazione di evoluzione può essere riscritta in forma integrale come segue:

$$\Pi_{rel}(\phi;\Lambda;\Lambda_0) = S_R(\phi, m^2, \lambda) + \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1} I_{rel}(\phi;\Lambda_1;\Lambda_0) \tag{1.45a}$$

$$\Pi_{irr}(\phi;\Lambda;\Lambda_0) = S_{0,irr}(\phi;\Lambda_0) - \int_\Lambda^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1} I_{irr}(\phi;\Lambda_1;\Lambda_0). \tag{1.45b}$$

Nella pratica, per fare i conti, si adotta lo sviluppo in $\hbar$; dunque è necessario dare le condizioni al contorno per ogni loop. La maniera più semplice è prendere

$$\Pi^{(\ell)}_{rel}(\phi;0,\Lambda_0) \quad = S^{(\ell)}_R(\phi) \quad = S_{rel}(\phi)\delta^{\ell 0} \tag{1.46a}$$

$$\Pi^{(\ell)}_{irr}(\phi;\Lambda_0,\Lambda_0) \quad = S^{(\ell)}_{0,irr}(\phi) \quad = S_{irr}(\phi)\delta^{\ell 0.} \tag{1.46b}$$

In questo modo le equazioni di evoluzione sui vertici propri assumono la forma integrale

$$\Pi^{(\ell+1)}_{2n} = \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda_\ell}{\Lambda_\ell} I^{(\ell)}_{rel,2n} - \int_\Lambda^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda_\ell}{\Lambda_\ell} I^{(\ell)}_{irr,2n}, \quad \ell \geq 0. \tag{1.47}$$

In particolare le costanti rilevanti alla scala ultravioletta si scrivono

$$\sigma^{(\ell+1)}_r(\Lambda_0) \equiv \sigma^{(\ell+1)}_r(\Lambda_0,\Lambda_0) = -\int_0^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda_\ell}{\Lambda_\ell} I^{(\ell)}_r(\Lambda_\ell;\Lambda_0), \tag{1.48}$$

mentre i vertici propri irrilevanti alla scala fisica $\Lambda = 0$ sono dati dalla formula

$$\Pi^{(\ell+1)}_{irr}(p_i,0,\Lambda_0) = -\int_0^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda_\ell}{\Lambda_\ell} I^{(\ell)}_{irr}(\Lambda_\ell;\Lambda_0). \tag{1.49}$$

1.5 Soluzione ad un loop

Lavorando al primo ordine di approssimazione è possibile dare una forma più esplicita alle equazioni integrali (1.47). In questo paragrafo mostriamo la soluzione per la teoria ϕ^4_d. Usando una funzione di taglio a gradino, per i coefficienti rilevanti si ottiene, in $d = 4$,

$$\sigma^{(1)}_\lambda(\Lambda_0) = \frac{3}{2}\int_q \Delta_{0\Lambda_0}\Delta_{0\Lambda_0}\lambda^2 = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\left(\log\left(\frac{\Lambda_0^2}{m^2}+1\right) - \frac{\Lambda_0^2}{\Lambda_0^2+m^2}\right) \quad (1.50a)$$

$$\sigma^{(1)}_m(\Lambda_0) = -\frac{1}{2}\int_q \Delta_{0\Lambda_0}\lambda = \frac{-\lambda}{32\pi^2}\left(\Lambda_0^2 - m^2\log\frac{\Lambda_0^2}{m^2}\right) \quad (1.50b)$$

$$\sigma^{(1)}_\phi(\Lambda_0) = 0. \quad (1.50c)$$

In $d = 3, 2, 1$ si ottengono i risultati nella tabella seguente (si noti che $\sigma^{(1)}_\phi(\Lambda_0) = 0$ in tutte le dimensioni).

Coefficienti rilevanti a un loop

d	$\sigma^{(1)}_m(\Lambda_0)$	$\sigma^{(1)}_\lambda(\Lambda_0)$
3	$-\frac{\lambda}{4\pi^2}(\Lambda_0 - m\arctan\frac{\Lambda_0}{m})$	$\frac{3\lambda^2}{8\pi^2}(-\frac{\Lambda_0}{\Lambda_0^2+m^2} + \frac{1}{m}\arctan\frac{\Lambda_0}{m})$
2	$-\frac{\lambda}{8\pi}\log\frac{\Lambda_0^2+m^2}{m^2}$	$\frac{3\lambda^2}{8\pi^2}(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{\Lambda_0^2+m^2})$
1	$-\frac{\lambda}{2\pi m}\arctan\frac{\Lambda_0}{m}$	$\frac{3\lambda^2}{4\pi m^3}\left(\frac{\Lambda_0 m}{\Lambda_0^2+m^2} + \arctan\frac{\Lambda_0}{m}\right)$

Restano da calcolare tutte le infinite costanti irrilevanti; queste si ottengono dalle equazioni di evoluzione dei vertici irrilevanti $\Pi_{2n,irr}$, usando le condizioni al contorno banali $\Pi^{(\ell)}_{2n,irr}|_{\Lambda=\Lambda_0} \equiv 0$. In quattro dimensioni si ha

$$\begin{aligned}
\Pi^{(1)}_{2,irr} &= \frac{\lambda}{2}\int_q \Delta_{\Lambda\Lambda_0} - p^2\partial_{p^2}\Delta_{\Lambda\Lambda_0}|_0 - \Delta_{\Lambda\Lambda_0}|_0 = 0 \\
\Pi^{(1)}_{4,irr} &= -\frac{\lambda^2}{4}\int_q \sum_{perm} \Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q)\Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q+p_i+p_j) - 6\Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q)^2 \\
\Pi^{(1)}_{2n,irr} &= -\frac{(-\lambda)^n}{2n}\sum_{perm}\int_q \Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q)\cdots\Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q+p_{i_1}+\dots p_{i_{2n-2}}).
\end{aligned} \quad (1.51)$$

Naturalmente esplicitare gli integrali non è banale. Si può però verificare che sono tutti convergenti anche nel limite $\Lambda_0 \to \infty$ (l'unica difficoltà potrebbe venire dagli integrali che definiscono $\Pi^{(1)}_{2,irr}$ e $\Pi^{(1)}_{4,irr}$, che però convergono grazie alle sottrazioni), cioè la proprietà di rinormalizzabilità.

1.6 Rinormalizzabilità in teorie efficaci

Nell'esempio appena discusso abbiamo supposto di conoscere esattamente la teoria classica $S(\phi, m^2, \lambda)$ a tutte le scale e quindi abbiamo adottato implicitamente un punto di vista di teoria fondamentale. In questa prospettiva l'introduzione del cutoff ultravioletto ha solo un significato tecnico e Λ_0 va eliminato alla fine dei calcoli. Questo è la formulazione più tradizionale della teoria di campo. Tuttavia, se adottiamo il punto di vista wilsoniano descritto nell'introduzione, è più naturale supporre che la teoria classica $S(\phi, m^2, \lambda; \Lambda_0)$ sia una teoria efficace: ciò significa che l'azione tree contiene anche infinite interazioni decrescenti col cutoff ultravioletto [6, 77, 78, 79]. In questo contesto la scala Λ_0 ha un significato fisico e fissa un punto al di sopra del quale la nostra ignoranza della fisica microscopica ci impedisce di dare predizioni significative a meno di non conoscere anche i coefficienti irrilevanti c_i. Naturalmente ci aspettiamo che alle scale di energia molto basse la presenza dei termini irrilevanti non abbia alcun effetto (viceversa, maggiore è la scala di energia E a cui si misura, maggiore è il numero dei termini irrilevanti necessari per descrivere la fisica). Ciò matematicamente corrisponde alla proprietà di rinormalizzabilità nel senso wilsoniano [5, 6] (a volte detta anche proprietà di universalità [71])

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\Pi_{2n}(p_i; \Lambda, \Lambda_0) = Q^{4-2n} O\left(\frac{Q^2}{\Lambda_0^2}\right), \quad Q^2 = \max\{p_i^2, m^2, \Lambda^2\}. \tag{1.52}$$

Nel limite ultravioletto dalla (1.52) si ottiene la proprietà di rinormalizzabilità in senso tradizionale

$$\lim_{\Lambda_0 \to \infty} \frac{\partial}{\partial c_i}\Pi_{2n}(p_i; \Lambda, \Lambda_0) = 0, \tag{1.53}$$

che può essere dimostrata a tutti gli ordini perturbativi. Si noti che in generale non ci si aspetta che la (1.53) valga a livello non perturbativo [72], in quanto l'esistenza non banale del limite $\Lambda_0 \to \infty$ non è affatto assicurata [109]. In questo paragrafo ci accontenteremo di verificare la (1.53) perturbativamente con qualche esempio ad un loop.

In quattro dimensioni la teoria scalare invariante per $\phi \to -\phi$ più generale possibile ha la forma

$$\begin{aligned} S(\phi, m^2, \lambda; \Lambda_0) = \int_x \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + c_2\phi(\partial^2)^2\phi/(2\Lambda_0^2) + \\ + c_4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\phi^2/(4!\Lambda_0^2) + c_6\phi^6/(6!\Lambda_0^2) + \cdots . \end{aligned} \tag{1.54}$$

Per fissare le idee consideriamo l'effetto del termine irrilevante c_4 (risultati analoghi si ottengono per qualunque altro termine)[7] che contribuisce al vertice di interazione

[7] Interazioni di tipo c_4 entrano naturalmente nei modelli sigma non lineari con azione

$$S(\phi, \Lambda_0) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j g_{ij}(\phi/\Lambda_0).$$

a quattro punti

$$\Pi_4^{(0)}(p_i; \Lambda_0) = \lambda + c_4 \frac{\sum_{i<j} p_i \cdot p_j}{6\Lambda_0^2}. \tag{1.55}$$

Vogliamo verificare in questo esempio la proprietà di universalità perturbativa,

$$\lim_{\Lambda_0 \to \infty} \Pi_{2n}^{(\ell)}(p_i, c_4 = 0; \Lambda, \Lambda_0) = \lim_{\Lambda_0 \to \infty} \Pi_{2n}^{(\ell)}(p_i, c_4 \neq 0; \Lambda, \Lambda_0) \tag{1.56}$$

cioè il fatto che l'azione macroscopica è la stessa, sia che l'azione microscopica contenga il termine in c_4, sia che non lo contenga. Per semplicità consideriamo solo il vertice $\Pi_2^{(1)}(p^2; \Lambda, \Lambda_0)$. Usando le condizioni al contorno banali dall'equazione di evoluzione (1.27) si ottiene

$$\Pi_{2,rel}^{(1)}(p^2; \Lambda, \Lambda_0) = \left[-\tfrac{1}{2} \int_q \Delta_{0\Lambda}(q) \Pi_4^{(0)}(q, p, -p, -q; \Lambda_0) \right]_{rel} \tag{1.57a}$$

$$\Pi_{2,irr}^{(1)}(p; \Lambda, \Lambda_0) = \left[+\tfrac{1}{2} \int_q \Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q) \Pi_4^{(0)}(q, p, -p, -q; \Lambda_0) \right]_{irr} \tag{1.57b}$$

e si vede con un conto esplicito che nel limite $\Lambda_0 \to \infty$, con Λ finito, il termine irrilevante non ha alcun effetto. La presenza di c_4 si vede invece nel calcolo delle quantità bare. Dalla (1.57a) alla scala ultravioletta $\Lambda = \Lambda_0$ si ottiene, usando il cutoff a gradino,

$$\sigma_\phi^{(1)}(\Lambda_0) = \frac{c_4}{32\pi^2} + O\left(\frac{m^2}{\Lambda_0^2}\right), \tag{1.58a}$$

$$\sigma_m^{(1)}(\Lambda_0) = \frac{\Lambda_0^2}{32\pi^2} \left[-\lambda + \frac{c_4}{2} + O\left(\frac{m^2}{\Lambda_0^2}\right) \right] \tag{1.58b}$$

Come si vede esplicitamente in questo esempio la presenza di c_4 modifica la rinormalizzazione della funzione d'onda $\sigma_\phi^{(1)}(\Lambda_0) \neq 0$ e la massa bare $\sigma_m^{(1)}(\Lambda_0)$. Un analogo studio del vertice a quattro punti darebbe una modifica anche per la costante di accoppiamento bare $\sigma_\lambda^{(1)}(\Lambda_0)$. Tuttavia queste correzioni non modificano in maniera sostanziale le proprietà di divergenza ultravioletta dei diagrammi di Feynman, che dipendono solo dai coefficienti rilevanti. Per esempio la presenza di c_4 può rendere non nullo $\sigma_\phi^{(1)}(\Lambda_0)$, ma solo per parti finite, e in particolare non viene generata una nuova divergenza logaritmica.

1.7 Rinormalizzabilità perturbativa

Dedichiamo questo paragrafo alla dimostrazione della proprietà di rinormalizzabilità, cioè proviamo che perturbativamente il cutoff ultravioletto può sempre essere rimosso e che le funzioni $\Pi_{2n}^{(\ell)}(p_1 \ldots p_{2n}; \Lambda, \infty)$ restano ben definite per ogni configurazione dei momenti (a meno di divergenze infrarosse che si presentano nelle teorie

Modelli di questo tipo compaiono per esempio nella teoria efficace dei mesoni leggeri [79, 80].

massless per $\Lambda = 0$). La prova è per induzione e consiste nel dimostrare, usando le equazioni di evoluzione integrate (1.47), che se le funzioni $\Pi_{2n}^{(\ell')}(p_1 \dots p_{2n}, \Lambda)$, dopo la rimozione del cutoff ultravioletto, sono regolari a tutti i loop $\ell' = 0, 1, \dots \ell$, allora sono regolari anche al loop $\ell + 1$. In questo modo la proprietà di regolarità è assicurata a tutti gli ordini perturbativi. Formalmente diciamo che una funzione di Green 1PI è regolare se la sua norma è finita, avendo definito

$$||\Pi_{2n}^{(\ell')}||_\Lambda \equiv \max_{p_i^2 < \Lambda^2} |\Pi_{2n}^{(\ell')}(p_1 \dots p_{2n}; \Lambda)|. \tag{1.59}$$

Si vede subito che al tree level questa proprietà è banalmente verificata, $||\Pi_{2n}^{(0)}||_\Lambda \sim \Lambda^{4-2n}$ è finito per $\Lambda \neq 0$.[8] Per motivi tecnici conviene anche definire una norma sulle funzioni

$$X_{2n+2}^{(\ell')}(q, p_i, -q; \Lambda) = [\Gamma_2^{-1}(q) \bar{\Pi}_{2n+2}(q, p_i, -q, \Lambda)(\Delta_{\Lambda\infty}\Gamma_2)^{-1}(q)]^{(\ell')}$$

tramite la relazione

$$||X_{2n+2}^{(\ell')}||_\Lambda \equiv \max_q \max_{p_i^2 < \Lambda^2} |X_{2n+2}^{(\ell')}(q, p_i, -q, \Lambda)|. \tag{1.60}$$

Si noti che al tree level le norme $||X_{2n+2}^{(0)}||_\Lambda \sim \Lambda^{-2n}$ sono quantità finite per $\Lambda \neq 0$.

Se prendiamo come ipotesi induttiva la normalizzabilità delle funzioni $\Pi_{2n}^{(\ell')}$ a tutti i loop $\ell' \leq \ell$

$$||\Pi_{2n}^{(\ell')}||_\Lambda < \infty, \quad \ell' = 0, \dots, \ell, \tag{1.61}$$

ciò assicura la normalizzabilità delle funzioni $X_{2n+2}^{(\ell)}$, in quanto esse sono esprimibili in termini delle funzioni $\Pi_{2m}^{(\ell')}$, con $2m \leq 2n + 2$ e $\ell' \leq \ell$, usando il legame (1.26) tra le funzioni $\bar{\Pi}_{2n+2}$ e i vertici Π_{2m}.

Per comodità lavoreremo in quattro dimensioni, ma l'estensione della dimostrazione a qualunque dimensione è un semplice esercizio. Per maggiore chiarezza suddividiamo la dimostrazione in vari passi.

1. Ipotesi induttiva. Osserviamo che per Lorentz invarianza i vertici propri $\Pi_{2n}(p_i; \Lambda, \Lambda_0)$ dipendono solo dagli invarianti $s_k = (p_i^2, p_i \cdot p_j)$ (in generale gli invarianti indipendenti sono $n(2n-1)$). Prendiamo come ipotesi induttiva la normalizzabilità dei vertici propri e delle loro derivate:

$$||\partial_{s_{k_1}} \dots \partial_{s_{k_m}} \Pi_{2n}^{(\ell')}||_\Lambda \sim \Lambda^{4-2n-2m} < \infty \tag{1.62}$$

[8] E anche per $\Lambda = 0$ in teorie massive, nel quale caso $||\Pi_{2n}^{(0)}||_{\Lambda=0} \sim m^{4-2n}$.

(in realtà si può facilmente dimostrare che l'andamento vero contiene delle polinomiali nei logaritmi di Λ di grado crescente col numero dei loop; tuttavia ciò non interessa ai fini della dimostrazione della rinormalizzabilità). Dalla (1.62) segue

$$||\partial_{s_{k_1}} \dots \partial_{s_{k_m}} X^{(\ell')}_{2n+2}||_\Lambda \sim \Lambda^{-2n-2m} < \infty \ . \tag{1.63}$$

2. Primo lemma. Osserviamo che una conseguenza immediata delle definizioni (1.59) e (1.60) è la disuguaglianza

$$|| \int_q \dot{\Delta}_{\Lambda\infty}(q) \Delta^{-1}_{\Lambda\infty}(q) X^{(\ell')}_{2n+2}(q, p_1 \dots p_{2n}, -q)||_\Lambda \leq c\Lambda^4 ||X^{(\ell')}_{2n+2}||_\Lambda, \tag{1.64}$$

dove abbiamo usato la proprietà

$$\int_q |\dot{\Delta}_{\Lambda\infty}(q) \Delta^{-1}_{\Lambda\infty}(q)| = c\Lambda^4, \tag{1.65}$$

che segue solo da considerazioni dimensionali e dall'ipotesi che la funzione cutoff sia sufficientemente regolare all'infinito, in modo che l'integrale sia ben definito; il valore del coefficiente c non è universale e dipende dalla scelta della funzione di taglio. Ad esempio per il taglio esponenziale $K_{\Lambda\infty} = 1 - \exp(-q^2/\Lambda^2)$ risulta $c = \zeta(3)/(4\pi^2)$.

3. Secondo lemma. Osserviamo che norme dei vertici irrilevanti $\Pi^{(\ell')}_{2,irr}$ e $\Pi^{(\ell')}_{4,irr}$ soddisfano una utile maggiorazione. Infatti usando le identità

$$f(z) - f(0) - zf'(0) = z^2 \int_0^1 dx(1-x)f''(zx) \tag{1.66}$$

e

$$f(z) - f(0) = z \int_0^1 dx f'(zx), \tag{1.67}$$

mediante le quali una funzione sviluppabile in serie può essere scritta in termini delle sue derivate successive, si dimostrano le maggiorazioni

$$||\Pi^{(\ell')}_{2,irr}||_\Lambda = ||\Pi^{(\ell')}_2(p) - \Pi^{(\ell')}_2(0) - p^2 \partial_s \Pi^{(\ell')}_2(0)||_\Lambda \leq \frac{\Lambda^4}{2} ||\partial_s^2 \Pi^{(\ell')}_2||_\Lambda \tag{1.68}$$

e

$$||\Pi^{(\ell')}_{4,irr}||_\Lambda = ||\Pi^{(\ell')}_4(p_i) - \Pi^{(\ell')}_4(0)||_\Lambda \leq \Lambda^2 ||\partial_{s_k} \Pi^{(\ell')}_4||_\Lambda. \tag{1.69}$$

4. Ipotesi induttiva al loop $\ell+1$. Cominciamo col dimostrare la relazione

$$||\Pi_{2n}^{(\ell+1)}||_\Lambda \leq ||\Pi_{2n,rel}^{(\ell+1)}||_\Lambda + ||\Pi_{2n,irr}^{(\ell+1)}||_\Lambda < \infty. \tag{1.70}$$

Le finitezza di $||\Pi_{2n,rel}^{(\ell+1)}||_\Lambda$, cioè dei coefficienti rilevanti si ricava banalmente usando l'ipotesi induttiva e il primo lemma:

$$|\sigma_m^{(\ell+1)}(\Lambda)| \leq \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda_\ell}{\Lambda_\ell} \left| \int_q \dot{\Delta}_{\Lambda_\ell\infty} \Delta^{-1}_{\Lambda_\ell\infty} X_4^{(\ell)}|_0 \right| \sim \Lambda^2 \tag{1.71a}$$

$$|\sigma_\phi^{(\ell+1)}(\Lambda)| \leq \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda_\ell}{\Lambda_\ell} \left| \int_q \dot{\Delta}_{\Lambda_\ell\infty} \Delta^{-1}_{\Lambda_\ell\infty} \partial_s X_4^{(\ell)}|_0 \right| \sim \Lambda^0 \tag{1.71b}$$

$$|\sigma_\lambda^{(\ell+1)}(\Lambda)| \leq \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda_\ell}{\Lambda_\ell} \left| \int_q \dot{\Delta}_{\Lambda_\ell\infty} \Delta^{-1}_{\Lambda_\ell\infty} X_6^{(\ell)}|_0 \right| \sim \Lambda^0. \tag{1.71c}$$

Per i vertici irrilevanti, usando il primo e il secondo lemma si ha

$$\begin{aligned} ||\Pi_{2,irr}^{(\ell+1)}||_\Lambda &\leq \frac{\Lambda^4}{2} \int_\Lambda^\infty \frac{d\Lambda_\ell}{\Lambda_\ell} || \int_q \dot{\Delta}_{\Lambda_\ell\infty} \Delta^{-1}_{\Lambda_\ell\infty} \partial_s^2 X_4 ||_{\Lambda_\ell} \\ &\leq \frac{c\Lambda^4}{2} \int_{\Lambda_\ell}^\infty \frac{d\Lambda_\ell}{\Lambda_\ell} \Lambda_\ell^4 \, \Lambda_\ell^{-2} \sim \Lambda^2 \end{aligned} \tag{1.72}$$

e, analogamente,

$$||\Pi_{4,irr}^{(\ell+1)}||_\Lambda \leq \Lambda^2 \int_\Lambda^\infty \frac{d\Lambda_\ell}{\Lambda_\ell} || \int_q \dot{\Delta}_{\Lambda_\ell\infty} \Delta^{-1}_{\Lambda_\ell\infty} \partial_{s_k} X_6 ||_{\Lambda_\ell} \sim \Lambda^0 \tag{1.73}$$

$$||\Pi_{2n}^{(\ell+1)}||_\Lambda \leq \int_\Lambda^\infty \frac{d\Lambda_\ell}{\Lambda_\ell} || \int_q \dot{\Delta}_{\Lambda_\ell\infty} \Delta^{-1}_{\Lambda_\ell\infty} X_{2n+2} ||_{\Lambda_\ell} \sim \Lambda^{4-2n}. \tag{1.74}$$

Come si vede la convergenza degli integrali su Λ_ℓ è assicurata e quindi i vertici propri al loop $\ell+1$ esistono e sono normalizzabili. A maggior ragione ciò vale per le loro derivate $||\partial_{s_{k_1}} \ldots \partial_{s_{k_m}} \Pi_{2n,irr}^{(\ell+1)}||_\Lambda < \infty$. Dunque l'ipotesi induttiva viene confermata al loop $\ell+1$ anche per i tutti i vertici irrilevanti.

Note: La scelta di funzioni di taglio soddisfacenti la proprietà (1.65) semplifica la dimostrazione precedente, ma di fatto essa è estendibile anche a classi più generali funzioni di taglio, tali che l'integrale in (1.65) non converga. Inoltre la prova di rinormalizzabilità si estende immediatamente alle teorie massless usando le Λ_R-prescrizioni o le $\mu-$prescrizioni. In quest'ultimo caso lo sviluppo di Taylor diventa un pò più complicato, ma è possibile evitare le divergenze infrarosse e mandare $\Lambda \to 0$ a tutti gli ordini perturbativi, anche se solo per configurazioni di momenti non eccezionali [10].

1.7.1 Dimostrazione dell'universalità

Avendo dimostrato l'esistenza perturbativa del limite $\Lambda_0 \to \infty$, diventa banale dare una dimostrazione dell'indipendenza dell'azione efficace $\Pi(\phi; \Lambda, \infty)$ dai termini irrilevanti. Come si è detto nel paragrafo 1.6, formalmente la prova dell'universalità consiste nel dimostrare che

$$\lim_{\Lambda_0 \to \infty} \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} \equiv \Pi_i(\Lambda) = 0. \tag{1.75}$$

Per provare la (1.75) osserviamo che dall'equazione di evoluzione $\dot{\Pi} = \hbar I(\Pi; \Lambda, \infty)$ si ottiene l'equazione per gli operatori integrati Π_i, che ha la forma

$$\dot{\Pi}_i = \hbar M \Pi_i, \tag{1.76}$$

dove M è un operatore lineare la cui forma esplicita non è rilevante ai fini della discussione che segue (M verrà studiato nel capitolo 3). Per definizione di coefficiente irrilevante, al tree level $\Pi_i^{(0)} = 0$. Ciò si può mantenere a tutti gli ordini sfruttando le equazioni di evoluzione e le condizioni al contorno

$$\Pi^{(\ell)}_{i,rel}|_{\Lambda=0} \equiv 0, \quad \Pi^{(\ell)}_{i,irr}|_{\Lambda=\Lambda_0} \equiv 0. \tag{1.77}$$

1.8 Problemi per la rinormalizzabilità non perturbativa

In questa sezione diamo un argomento che dimostra che le precedenti dimostrazioni funzionano solo perturbativamente. Il punto delicato è la presenza di singolarità nelle funzioni di Green, invisibili nella teoria delle perturbazioni, che rendono impossibile l'eliminazione del cutoff ultravioletto, a meno di non annullare l'interazione (problema della triviality) [5, 109, 110]. Per illustrare questo punto discutiamo il caso della QED con N_f flavours

$$S_{QED,N_f} = \int_x -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2a} (\partial \cdot A)^2 + \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_j (i\partial\!\!\!/ - \frac{e}{N^{1/2}} A\!\!\!/ - m) \psi_j, \tag{1.78}$$

che può essere studiata non perturbativamente nel limite $N_f \to \infty$. Consideriamo per semplicità il propagatore completo della teoria $G_{\mu\nu}(q)$, che si può scrivere nella forma[9]

$$G_{\mu\nu}(q) = \frac{q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu}{q^4} \frac{\alpha_{eff}(q^2)}{\alpha} + \frac{1}{a} \frac{q_\mu q_\nu}{q^4}. \tag{1.79}$$

[9] Si può dimostrare rigorosamente che la forma (1.79) è valida a tutti gli ordini perturbativi, con $\alpha_{eff}(q^2)$ indipendente dal parametro di gauge fixing.

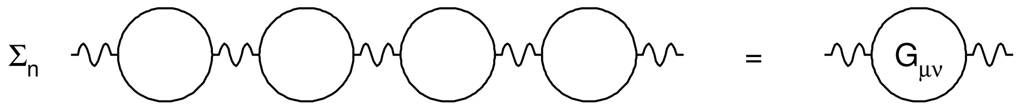


Figura 1.2: Risommazione dei diagrammi a bolle che contribuiscono al propagatore completo.

La funzione $\alpha_{eff}(q^2)$, detta costante di accoppiamento efficace alla scala q, è esattamente calcolabile nel limite di grandi N_f come risommazione dei grafici a bolla mostrati in figura 1.2. Si ottiene

$$\alpha_{eff}^{N_f\to\infty}(q^2) = \frac{\alpha}{1-\Pi^{(1)}(q^2)}, \tag{1.80}$$

dove $\Pi^{(1)}(q^2)$ è dato dalla formula $\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(q) = (g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\Pi^{(1)}(q^2)$. Come vedremo in dettaglio nel terzo capitolo, usando la sottrazione a momenti nulli si ottiene, nello spazio euclideo,

$$\Pi^{(1)}(\frac{q^2}{m^2}) = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx\ 8x(1-x)\log\frac{m^2+q^2x(1-x)}{m^2}, \quad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}. \tag{1.81}$$

$\Pi^{(1)}(q^2/m^2)$ è una funzione reale positiva che vale zero a $q=0$, è sempre crescente, e per grandi momenti va come un logaritmo,

$$\lim_{q^2\to\infty}\Pi^{(1)}(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{q^2}{m^2}; \tag{1.82}$$

dunque $\Pi^{(1)}(q^2/m^2)$ certamente raggiunge il valore 1 per qualche valore $q^2 = \Lambda_L^2$. In questo punto la costante efficace (1.80) sviluppa il polo di Landau, che viene letto come un'indicazione della triviality [110] della teoria. L'esistenza del polo ci dice che la QED si può pensare come teoria fondamentale (cioè ben definita a tutte le scale) solo se la costante di accoppiamento è nulla, cioè la teoria è libera, banale. Viceversa, se l'interazione è non nulla, la teoria dev'essere un modello efficace, valido solo fino ad una certa scala ultravioletta $\Lambda_0 < \Lambda_L$. A questa scala la teoria cambia ed entrano in gioco nuovi gradi di libertà (per esempio le particella pesanti di una qualche teoria unificata). In quest'ottica Λ_L si può interpretare come scala tipica in cui deve intervenire nuova fisica per evitare inconsistenze.[10]

[10]Per altre possibili interpretazioni del polo di Landau in "strongly coupled QED" si vedano [111, 112].

Capitolo 2

Legami con il gruppo di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low

Nello scorso capitolo abbiamo descritto la tecnica del $\Lambda-$RG da un punto di vista perturbativo, come metodo di costruzione dell'azione quantistica $\Gamma^{(\ell)}(\phi, m^2, g)$ a partire dall'azione classica $S(\phi, m^2, g)$. Tale punto di vista è il più vicino alla trattazione standard della teoria di campo relativistica. Resta da chiarire il legame[1] tra il gruppo di rinormalizzazione di Wilson e il gruppo di rinormalizzazione tradizionale ($\mu-$RG). A questo scopo dedichiamo il presente capitolo: in particolare diamo un nuovo metodo per calcolare perturbativamente le funzioni beta e le dimensioni anomale del $\mu-$RG a partire dal $\Lambda-$RG, esemplificandolo con calcoli espliciti a uno e due loop.

2.1 Richiami sul $\mu-$RG

In teoria di campo relativistica (pensata come teoria fondamentale) esiste un concetto tradizionale di gruppo di rinormalizzazione radicalmente diverso da quello di Wilson. Mentre il $\Lambda-$RG è associato all'integrazione dei gradi di libertà ultravioletti, il $\mu-$RG è associato alle arbitrarietà che si incontrano nella scelta dello schema di rinormalizzazione. Esistono varie formulazioni leggermente differenti a seconda delle prescrizioni di rinormalizzazione utilizzate (si veda [41] per una panoramica). In ogni caso l'idea di base è quella di introdurre delle prescrizioni dipendenti da una scala di massa arbitraria μ. In questo modo la relazione tra le quantità rinormalizzate nello schema R (caratterizzato dalla scala di massa μ) e nello schema R' (con

[1] Per il legame del $\Lambda-$RG con altre formulazioni del gruppo di rinormalizzazione di Wilson rimandiamo all'appendice A.

scala di massa μ')

$$\phi_{R'}(x) = z_\phi^{1/2}\phi_R(x), \quad \lambda_{R'} = z_\lambda \lambda_R, \quad m^2_{R'} = z_m m^2_R, \tag{2.1}$$

è determinata da un numero finito di funzioni $z_i = z_i(\lambda_R, \frac{m_R^2}{\mu^2}, \frac{\mu'}{\mu})$.[2] Siccome la fisica non può dipendere dallo schema di rinormalizzazione, l'azione quantistica deve essere la stessa nello schema R e nello schema R',

$$\Gamma_{R'}(\phi_{R'}, m^2_{R'}, \lambda_{R'}; \mu') = \Gamma_R(\phi_R, m^2_R, \lambda_R; \mu). \tag{2.2}$$

In questo modo le funzioni di Green cambiano da uno schema all'altro per fattori moltiplicativi z_ϕ,

$$\Gamma_{2n,R'}(p_i; \lambda_{R'}, m^2_{R'}, \mu') = z_\phi^{-n}\Gamma_{2n,R}(p_i; \lambda_R, m^2_R, \mu), \tag{2.3}$$

e pertanto le ampiezze di transizione date dalle formule di riduzione di LSZ [37] sono invarianti. La formula (2.2) si può scrivere anche nella forma differenziale

$$\mu' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu'}\Gamma_{R'}\bigg|_{\mu'=\mu} = \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} - \int_x \gamma_\phi \phi_R \frac{\delta}{\delta\phi_R} - \gamma_m m_R^2 \frac{\delta}{\delta m_R^2} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda_R}\right)\Gamma_R = 0 \tag{2.4}$$

con

$$\gamma_\phi(\lambda_R, m_R/\mu) \equiv \mu' \tfrac{\partial}{\partial\mu'} \log z_\phi^{-1/2}\Big|_{\mu'=\mu} \tag{2.5a}$$

$$\gamma_m(\lambda_R, m_R/\mu) \equiv \mu' \tfrac{\partial}{\partial\mu'} \log z_m^{-1}\Big|_{\mu'=\mu} \tag{2.5b}$$

$$\beta(\lambda_R, m_R/\mu) \equiv \mu' \tfrac{\partial}{\partial\mu'} \log z_\lambda\Big|_{\mu'=\mu}\lambda_R. \tag{2.5c}$$

Per calcolare esplicitamente le funzioni del gruppo di rinormalizzazione γ_ϕ, γ_m e β occorre specificare le prescrizioni utilizzate e svolgere un calcolo perturbativo (solo in casi molto particolari possono essere calcolate esattamente, tipicamente in teorie di gauge supersimmetriche). La tecnica più comune in fisica delle alte energie è lavorare in regolarizzazione dimensionale e nello schema $\overline{MS}$, poichè in questo caso le funzioni del gruppo di rinormalizzazione sono indipendenti dalla massa e la (2.4) può essere risolta esattamente. Un'altro schema possibile è quello di Gell-Mann e Low, definito dalle prescrizioni (nello spazio euclideo)

$$\begin{aligned} \partial_{p^2}\Gamma_2|_{p^2=\mu^2} &= z_\phi(\mu) \\ \Gamma_2|_{p^2=-m^2_{PH}} &= 0 \\ \Gamma_4|_{4SP} &= z_\phi^2(\mu)\lambda_R(\mu). \end{aligned} \tag{2.6}$$

[2]Ricordiamo che le funzioni $z_i(\mu,\mu') = z_i(\lambda_R, \frac{m_R^2}{\mu^2}, \frac{\mu'}{\mu})$ soddisfano la proprietà $z_i(\mu,\mu') = z_i(\mu,\mu'')z_i(\mu'',\mu')$, da cui il nome di gruppo di rinormalizzazione.

In questo schema la costante di accoppiamento efficace $\lambda_R(\mu)$ è definita al punto simmetrico a quattro particelle ($4SP$) in cui i momenti $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_4$ soddisfano le condizioni

$$\bar{p}_i^2 = \mu^2, \quad \bar{p}_i \cdot \bar{p}_j = -\mu^2/3, \quad i \neq j; \tag{2.7}$$

mentre la massa fisica m_{PH} è definita come polo del propagatore completo e non dipende dalla scala arbitraria μ. Ne segue l'annullarsi di γ_m.
Nella sezione 2.2 mostreremo qualche calcolo esplicito in questo schema. Ora invece ci interessa generalizzare l'equazione (2.4) e descriverne il significato fisico [40, 41].

2.1.1 Significato fisico del $\mu-$RG

L'equazione del gruppo di rinormalizzazione può essere ricondotta ad un'equazione che descrive le proprietà di scaling delle funzioni di Green (lo stesso si può dire anche per l'equazione del $\Lambda-$RG; si veda l'appendice A). Per dimostrarlo è sufficiente tenere conto della relazione banale (valida per motivi dimensionali[3])

$$\left(\int_x (1 + x^\mu \partial_\mu)\phi \frac{\delta}{\delta\phi} + 2m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \mu \frac{\partial}{\partial\mu} \right) \Gamma = 0; \tag{2.8}$$

la (2.4) si può allora riscrivere nella forma

$$\left(\int_x (1 + \gamma_\phi + x^\mu \partial_\mu)\phi \frac{\delta}{\delta\phi} + (\gamma_m + 2)m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} - \beta \frac{\partial}{\partial\lambda} \right) \Gamma = 0. \tag{2.9}$$

Definendo la dimensione anomala del campo ϕ, $d_\phi \equiv 1 + \gamma_\phi(\lambda, m/\mu)$, e indicando con $W = s\frac{d}{ds}\Big|_{s=1}$ l'operatore che genera le trasformazioni di scala

$$x' = s^{-1}x, \quad \phi'(x') = s^{d_\phi}\phi(x) \tag{2.10}$$

la (2.9) diventa

$$W\Gamma \equiv \int_x (d_\phi + x^\mu \partial_\mu)\phi(x) \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Gamma = \left(-(\gamma_m + 2)m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} + \beta \frac{\partial}{\partial\lambda} \right) \Gamma. \tag{2.11}$$

Nel limite di massa nulla e nell'intorno di un punto fisso $\lambda = \lambda^*$ definito come zero della funzione beta

$$\beta(\lambda^*) = 0 \tag{2.12}$$

[3] L'equazione (2.8) dice semplicemente che il funzionale Γ_R è adimensionale e quindi non riscala per cambiamenti dell'unità di misura:

$$\Gamma_R(s^1\phi_R(s^1x), s^0\lambda_R, s^2m_R^2, s\mu) = \Gamma_R(\phi_R(x), \lambda_R, m^2, \mu).$$

Per semplicità notazionale d'ora in poi elimineremo il pedice R.

il secondo membro si annulla e l'equazione del gruppo di rinormalizzazione descrive un'invarianza di scala con dimensione anomala del campo $d^*_\phi \equiv 1 + \gamma_\phi(\lambda^*)$. In particolare per i vertici propri vale la legge di scala banale

$$\Gamma_{2n}(sp_i) = s^{4-2nd^*_\phi}\ \Gamma_{2n}(p_i). \tag{2.13}$$

Al di fuori del punto fisso la dipendenza dei vertici propri dalla scala non è banale. Per ricavarla proiettiamo l'equazione del gruppo di rinormalizzazione[4] (2.11) sui vertici propri $\Gamma_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n})$:

$$\left(-\sum_{i=1}^{2n} x_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} + 2n(d_\phi - 4) + (\gamma_m+2)m^2\frac{\partial}{\partial m^2} - \beta\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Gamma_{2n}(x_i) = 0. \tag{2.14}$$

Passando alla trasformata di Fourier $\tilde{\Gamma}_{2n}(p_1,\ldots,p_{2n}) = (2\pi)^4\delta(p_1+\ldots+p_{2n})\cdot\Gamma_n(p_1,\ldots,p_{2n-1})$ si ottiene[5]

$$\left(\sum_{i=1}^{2n-1} p_i\cdot\frac{\partial}{\partial p_i} + 2nd_\phi - 4 + (\gamma_m+2)m^2\frac{\partial}{\partial m^2} - \beta\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Gamma_{2n}(p_i) = 0 \tag{2.15}$$

e quindi

$$s\frac{\partial}{\partial s}\Gamma_{2n}(sp_i) = \left(4 - 2nd_\phi - (\gamma_m+2)m^2\frac{\partial}{\partial m^2} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Gamma_{2n}(sp_i). \tag{2.16}$$

L'equazione (2.16) si risolve facilmente nel limite di massa nulla [6] definendo la costante di accoppiamento running $\tilde{\lambda}(Q)$ come soluzione dell'equazione differenziale

$$Q\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial Q} = \beta(\tilde{\lambda}(Q)), \quad \tilde{\lambda}(\bar{Q}) = \lambda, \tag{2.17}$$

[4]Conviene prima riscrivere la (2.11) nella forma

$$\int_x \phi(x)(d_\phi - 4 - x^\mu\partial_\mu)\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Gamma = \left(-(\gamma_m+2)m^2\frac{\partial}{\partial m^2} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Gamma.$$

[5]Si usa la proprietà

$$\int_{p_j} -\sum_{i=1}^{2n-1} p_i\frac{\partial}{\partial p_i}\delta(p_1+\cdots+p_{2n})\Gamma_{2n}(p_i) = \int_{p_j}\delta(p_1+\cdots+p_{2n})\left(\sum_{i=1}^{2n-1} p_i\frac{\partial}{\partial p_i} + 4(2n-1)\right)\Gamma_{2n}(p_i)$$

[6]Se la massa non è nulla non si riesce a scrivere la soluzione in forma esplicita, a meno di non usare prescrizioni indipendenti dalla massa.

dove $\bar{Q}$ è una scala di riferimento arbitraria non nulla (per esempio $Q = \mu$). Dalla (2.16) si ottiene

$$\Gamma_{2n}(sp_i, \lambda, \mu) = \exp\left[4\ln s - 2n\int_1^s \frac{ds'}{s'} d_\phi[\tilde{\lambda}(s'\bar{Q})]\right] \Gamma_{2n}(p_i, \tilde{\lambda}(s\bar{Q}), \mu). \tag{2.18}$$

Il significato di quest'ultima equazione è evidente: conoscendo la fisica ad una certa scala dei momenti p è possibile estrapolarla alla scala sp, a patto di conoscere il running della costante di accoppiamento.

2.1.2 $\mu-$RG e risommazioni

L'equazione del gruppo di rinormalizzazione (2.4) è in principio esatta; tuttavia nella pratica le funzioni β e γ sono note solo perturbativamente ad ordine finito ℓ. Quello che si fa allora è fissare ℓ (tipicamente $\ell = 1$ o $\ell = 2$) e ricavare la costante running come soluzione dell'equazione differenziale approssimata

$$Q\frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial Q} = \beta^{[\ell]}(\tilde{\lambda}(Q)), \quad \tilde{\lambda}(\bar{Q}) = \lambda. \tag{2.19}$$

In particolare ad un loop la funzione beta ha la forma $\beta^{[1]} = \hbar b_1\lambda^2$ e la costante running si può scrivere come risommazione di infiniti termini logaritmici:

$$\tilde{\lambda}(Q) = \frac{\lambda}{1 - \hbar b_1\lambda\log Q/\bar{Q}} = \lambda\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\hbar b_1\log Q/\bar{Q})^n. \tag{2.20}$$

In questo senso il gruppo di rinormalizzazione tiene conto di correzioni a tutti i loop (tuttavia non è detto che le correzioni logaritimiche risommate dal gruppo di rinormalizzazione siano dominanti rispetto a tutte le altre possibili correzioni, a meno che queste non siano soppresse per qualche motivo, come avviene in QED nello sviluppo in $1/N_f$). Si noti che la costante di accoppiamento running (2.20), non è definita per tutte le scale, in quanto esiste un punto in cui il denominatore si annulla e la costante diverge, il polo di Landau

$$\Lambda_L = \bar{Q}\exp\left(\frac{1}{b_1\lambda}\right). \tag{2.21}$$

Nel caso $b_1 > 0$ il polo di Landau è nella regione di grandi momenti $\Lambda_L = \Lambda_{UV} > \bar{Q}$ e la teoria è asintoticamente libera nell'infrarosso; nel caso $b_1 < 0$ il polo di Landau è nella regione di piccoli momenti $\Lambda_L = \Lambda_{IR} < \bar{Q}$ e la teoria è asintoticamente libera nell'ultravioletto.

Nel primo caso la teoria perturbativa funziona bene per piccoli momenti e il gruppo di rinormalizzazione permette di estrapolare il comportamento delle funzioni di Green fino a momenti non troppo grandi rispetto a Λ_L; nel secondo caso la teoria perturbativa funziona bene per grandi momenti e il gruppo di rinormalizzazione permette di estrapolare il comportamento delle funzioni di Green fino a momenti non troppo piccoli rispetto a Λ_{IR}.

In teorie non asintoticamente libere si può intuitivamente giustificare la presenza del polo di Landau ultravioletto in un contesto di teoria efficace, con le considerazioni fatte nel capitolo 1 e quindi la presenza di Λ_{UV} non va considerata seriamente; invece una comprensione del polo di Landau infrarosso è molto più delicata. Torneremo in dettaglio su questo punto nel capitolo 4.

2.2 Calcolo diretto delle funzioni di rinormalizzazione

In questa sezione descriviamo il calcolo diretto a un loop delle funzioni $\beta(\lambda, m/\mu)$ e $\gamma_\phi(\lambda, m/\mu)$ nello schema di Gell-Mann e Low. Dalle definizioni (2.5) e (2.6) si ha

$$\gamma_\phi(\lambda, m/\mu) \equiv -\frac{1}{2}\,\mu'\frac{\partial}{\partial\mu'}\log\partial_{p^2}\Gamma_2|_{\mu'}\Big|_{\mu'=\mu}, \tag{2.22}$$

$$\beta(\lambda, m/\mu) = \mu'\frac{\partial\lambda'}{\partial\mu'}\Big|_{\mu'=\mu} = \mu'\frac{\partial}{\partial\mu'}\frac{\Gamma_4|_{\mu'}}{(\partial_{p^2}\Gamma_2|_{\mu'})^2}\Big|_{\mu'=\mu}. \tag{2.23}$$

La funzione $\gamma_\phi^{(1)}$ è identicamente nulla poichè $\Gamma_2^{(1)} \equiv 0$; dunque solo la funzione

$$\beta^{(1)} = \mu'\frac{\partial}{\partial\mu'}\Gamma_4^{(1)}|_{\mu'}\Big|_{\mu'=\mu} \tag{2.24}$$

è non banale e vale

$$\beta^{(1)} = -\frac{3}{2}\lambda^2\int_q \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Delta(q)\Delta(q+\bar{p}) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}f_\beta(\mu/m) \tag{2.25}$$

con

$$f_\beta(\mu/m) = 16\pi^2\int_q\int_0^1 dx\frac{2\mu^2x(1-x)}{[q^2+m^2+\mu^2x(1-x)]^3}. \tag{2.26}$$

La funzione $f_\beta(x)$ passa da zero per $\mu = 0$ a 1 per $\mu >> m$; dunque la costante running $\lambda_R(\mu)$, data dalla formula

$$\lambda_R(\bar{\mu}) = \frac{\lambda}{1-\frac{3\lambda}{16\pi^2}\int_0^{\bar{\mu}}\frac{d\mu}{\mu}f_\beta(\mu/m)} \tag{2.27}$$

è congelata per $\mu << m$ e crescente per $\mu >> m$, fino a che diverge alla scala Λ_L. La forma esplicita è

$$\lambda_R(x) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{16\pi^2}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1\right)}, \quad x = \mu/m \tag{2.28}$$

e l' andamento è mostrato in figura 2.1.

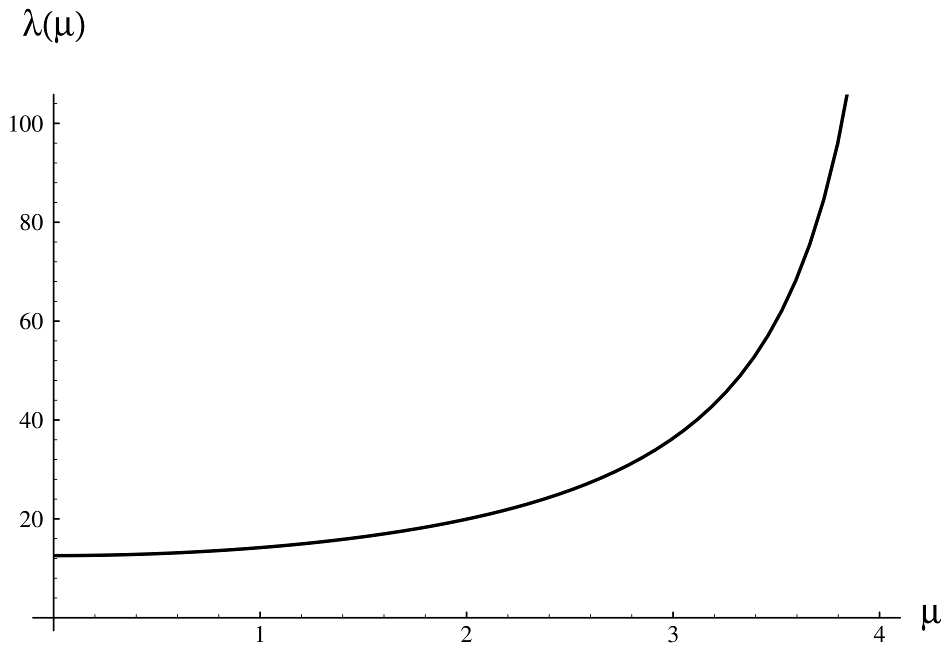


Figura 2.1: Andamento ad un loop della costante running in ϕ^4_4 massiva. Si sono usate le prescrizioni di Gell-Mann e Low. Il punto di partenza è $\tilde{\lambda}(0) = 4\pi$.

2.3 Calcolo indiretto delle funzioni del gruppo di rinormalizzazione

La procedura di calcolo descritta nella sezione precedente non è la più conveniente in teorie complicate o per calcoli di ordine superiore ad un loop. In questi casi conviene adottare il tradizionale approccio dei controtermini in cui le funzioni del gruppo di rinormalizzazione vengono estratte dalla richiesta che le quantità bare non dipendano dalla scala di rinormalizzazione μ. Questo punto di vista è quello tipico della regolarizzazione dimensionale con prescrizioni MS o $\overline{MS}$ ed è il più usato in fisica delle particelle. Tuttavia, siccome abbiamo in mente un'interpretazione wilsoniana, lo schema di rinormalizzazione più naturale è l'uso di un cutoff ultravioletto con prescrizioni alla Gell-Mann–Low. Nell'esempio della teoria ϕ^4 massiva in quattro dimensioni (si veda [39] pag. 209 per il caso a massa nulla) dalla richiesta di $\mu-$indipendenza

$$\mu\frac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}\mu} = 0, \quad \mu\frac{\mathrm{d}m_0^2}{\mathrm{d}\mu} = 0, \quad \mu\frac{\mathrm{d}\lambda_0}{\mathrm{d}\mu} = 0, \tag{2.29}$$

con

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} = \mu\frac{\partial}{\partial\mu} - \gamma_m m^2\frac{\partial}{\partial m^2} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} - \gamma_\phi\int_x \phi\frac{\delta}{\delta\phi} \tag{2.30}$$

si ricavano le relazioni esatte

$$\gamma_\phi = \lim_{\Lambda_0\to\infty}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} - \gamma_m m^2\frac{\partial}{\partial m^2} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\log Z_\phi^{1/2} \tag{2.31a}$$

$$\gamma_m = \lim_{\Lambda_0\to\infty}\frac{(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda})m_0^2}{m^2\frac{\partial}{\partial m^2}m_0^2} \tag{2.31b}$$

$$\beta = \lim_{\Lambda_0\to\infty} -\frac{(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} - \gamma_m m^2\frac{\partial}{\partial m^2})\lambda_0}{\partial_\lambda\lambda_0}. \tag{2.31c}$$

Il sistema (2.31) può essere risolto con uno sviluppo perturbativo. Al primo ordine, usando le relazioni dimensionali

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}Z_\phi = -\left(\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} + 2m^2\frac{\partial}{\partial m^2}\right)Z_\phi, \tag{2.32a}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}m_0^2 = -\left(\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} + 2m^2\frac{\partial}{\partial m^2} - 2\right)m_0^2, \tag{2.32b}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda_0 = -\left(\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} + 2m^2\frac{\partial}{\partial m^2}\right)\lambda_0, \tag{2.32c}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\gamma_\phi^{(1)}(\lambda, m/\mu) &= \lim_{\Lambda_0\to\infty} -\frac{1}{2}\left(\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} + 2m^2\frac{\partial}{\partial m^2}\right) Z_\phi^{(1)} && \text{(2.33a)}\\
\gamma_m^{(1)}(\lambda, m/\mu) &= \lim_{\Lambda_0\to\infty} -\left(\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} + 2m^2\frac{\partial}{\partial m^2} - 2\right) m_0^{2\,(1)}/m^2 && \text{(2.33b)}\\
\beta_\lambda^{(1)}(\lambda, m/\mu) &= \lim_{\Lambda_0\to\infty} \left(\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} + 2m^2\frac{\partial}{\partial m^2}\right) \lambda_0^{(1)}. && \text{(2.33c)}
\end{aligned}$$

Come si è visto nel capitolo precedente (paragrafo 1.5) la forma esplicita delle costanti bare in termini delle costanti rinormalizzate, a un loop, è data dalle formule

$$Z_\phi^{(1)} = \sigma_\phi^{(1)}(\Lambda_0) = 0, \quad m_0^2 = \sigma_m^{(1)}(\Lambda_0) = -\tfrac{1}{2}\lambda \textstyle\int_q \Delta_{0\Lambda_0}(q), \tag{2.34a}$$

$$\lambda_0^{(1)} = \sigma_\lambda^{(1)}(\Lambda_0) = \tfrac{3}{2}\lambda^2 \textstyle\int_q \Delta_{0\Lambda_0}(q)\Delta_{0\Lambda_0}(q+\bar{p}). \tag{2.34b}$$

Applicando le (2.33) si riottengono i risultati del paragrafo precedente: $\gamma_\phi^{(1)} = \gamma_m^{(1)} = 0$ e $\beta^{(1)} = 3\lambda^2 f_\beta(m/\mu)$. La procedura si può iterare ai loop successivi.

2.4 Estensione a teorie generiche

È molto semplice estendere la trattazione precedente al caso generico di una teoria con più campi Φ^I di dimensione D_I che vivono in uno spaziotempo d dimensionale. Se indichiamo con λ_i le costanti di interazione (di dimensione $D_i \geq 0$) l'equazione del gruppo di rinormalizzazione si scrive

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} - \int_x \gamma_I \Phi^I \frac{\delta}{\delta\Phi^I} - \gamma_i\lambda_i\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\right)\Gamma = 0 \tag{2.35}$$

e l'analisi dimensionale fornisce l'identità

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \int_x (D_I + x^\mu\partial_\mu)\Phi^I \frac{\delta}{\delta\Phi^I} + D_i\lambda_i\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\right)\Gamma = 0. \tag{2.36}$$

Dunque l'equazione si riscrive nella forma di invarianza di scala rotta

$$W\Gamma = \int_x (d_I + x^\mu\partial_\mu)\Phi^I \frac{\delta}{\delta\Phi^I}\Gamma = -\sum_i d_i\lambda_i\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\Gamma, \tag{2.37}$$

dove si sono introdotte le dimensioni anomale $d_I = D_I + \gamma_I$ e $d_i = D_i + \gamma_i$ si calcolano imponendo l'indipendenza delle costanti bare dal punto di sottrazione

$\mu\frac{\mathrm{d}\Phi_0^I}{\mathrm{d}\mu} = \mu\frac{\mathrm{d}\lambda_{0,i}}{\mathrm{d}\mu} = 0$. In tal modo le (2.31) si generalizzano nella forma

$$\gamma_I = \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} - \gamma_i\lambda_i\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\right)\log Z_I^{1/2} \tag{2.38a}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial\lambda}\right)^{-1}_{ij}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda_{0,j}. \tag{2.38b}$$

Usando le identità

$$\Phi_0^I(s^{D_I}\Phi^I, s^{D_i}\lambda_i, s\mu, s\Lambda_0) = s^{D_I}\Phi_0^I(\Phi^I, \lambda_i, \mu, \Lambda_0) \tag{2.39a}$$

$$\lambda_{0,j}(s^{D_i}\lambda_i, s\mu, s\Lambda_0) = s^{D_j}\lambda_{0,j}(\lambda_i, \mu, \Lambda_0) \tag{2.39b}$$

ovvero

$$(-D_a + D_a\Phi_a\frac{\delta}{\delta\Phi_a} + D_i\lambda_i\frac{\partial}{\partial\lambda_i} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0})\Phi_0 = 0 \tag{2.40a}$$

$$(-D_{\lambda_j} + D_{\lambda_i}\lambda_i\frac{\partial}{\partial\lambda_i} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0})\lambda_{0,j} = 0, \tag{2.40b}$$

si ottiene

$$\gamma_I = \left(\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} + (D_i+\gamma_i)\lambda_i\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\right)\log Z_I^{-1/2} \tag{2.41a}$$

$$\gamma_i = -\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial\lambda}\right)^{-1}_{ij}\left(\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} + D_k\lambda_k\frac{\partial}{\partial\lambda_k} - D_j\right)\lambda_{0,j}. \tag{2.41b}$$

Al primo loop si ha

$$\gamma_I^{(1)} = -\tfrac{1}{2}(\Lambda_0\tfrac{\partial}{\partial\Lambda_0} + D_i\lambda_i\tfrac{\partial}{\partial\lambda_i})Z_I^{(1)}, \tag{2.42a}$$

$$\gamma_i^{(1)} = -\tfrac{1}{\lambda_i}(\Lambda_0\tfrac{\partial}{\partial\Lambda_0} + D_{\lambda_k}\lambda_k\tfrac{\partial}{\partial\lambda_k} - D_{\lambda_i})\lambda_{0,i}^{(1)}. \tag{2.42b}$$

Se le costanti $\lambda_i = g_i$ sono tutte adimensionali ($D_i = 0$) si definiscono le funzioni

$$\beta_i = -g_i\gamma_i; \tag{2.43}$$

e le (2.41) si scrivono nella forma più semplice

$$\gamma_I = \left(\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} - \beta_i\frac{\partial}{\partial g_i}\right)\log Z_I^{-1/2}, \tag{2.44a}$$

$$\beta_i = \left(\frac{\partial g_0}{\partial g}\right)^{-1}_{ij}\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0}g_{0,j} \tag{2.44b}$$

e ad un loop

$$\gamma_I^{(1)} = -\frac{1}{2}\Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0} Z_I^{(1)}, \quad \beta_i^{(1)} = \Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0} g_{0,i}^{(1)}. \tag{2.45}$$

Nel formalismo del $\Lambda-$RG le costanti ultraviolette sono determinate a partire dalle costanti rinormalizzate risolvendo l'equazione di evoluzione e le quantità precedenti sono esplicitamente calcolabili. Infatti dalla formula (1.48)

$$\sigma_r^{(\ell+1)}(\Lambda_0, \mu) = \int_0^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda}{\Lambda} I_r^{(\ell)}(\lambda, \mu; \Lambda, \Lambda_0), \tag{2.46}$$

usando la relazione[7]

$$\int_0^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda}{\Lambda} I_r^{(\ell)}(\lambda, \mu; \Lambda, \Lambda_0) \simeq \int_0^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda}{\Lambda} I_r^{(\ell)}(\lambda, \mu; \Lambda, \infty), \tag{2.47}$$

si ottiene

$$\lim_{\Lambda_0 \to \infty} \Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0} \sigma_r^{(\ell+1)}(\Lambda_0, \mu) = \lim_{\Lambda_0 \to \infty} I_r^{(\ell)}(\lambda, \mu; \Lambda_0, \infty). \tag{2.48}$$

Dunque la dipendenza dal cutoff ultravioletto delle costanti bare si può ottenere direttamente dalla forma asintotica dell'equazione di evoluzione. Per esempio in ϕ_4^4 a un loop si ottiene (usando il cutoff a gradino e nel limite $\Lambda_0 \to \infty$)

$$\Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0} \sigma_\lambda^{(1)}(\Lambda_0) = -\frac{3}{2}\lambda^2 \int_q \Lambda \partial_\Lambda \left[D_{\Lambda\infty}(q) D_{\Lambda\infty}(q+\bar{p}) \right]_{\Lambda=\Lambda_0} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}. \tag{2.49}$$

Molto più delicato è il conto a due loop, per cui rimandiamo al paragrafo 2.7.

2.5 Il gruppo di rinormalizzazione in ϕ_6^3

Come esempio esplicito del formalismo generale appena descritto consideriamo la teoria ϕ^3 in sei dimensioni, con azione classica euclidea

$$S(\phi, m^2, g) = \int_x \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{3!} g \phi^3. \tag{2.50}$$

Le equazioni di evoluzione ad un loop hanno la forma $\dot{\Pi}_n^{(1)} = I_n^{(0)}$ con

$$I_n^{(0)} = \sum_{perm} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} g^n \int_q \Lambda \partial_\Lambda [\Delta_{\Lambda\infty}(q) \cdots \Delta_{\Lambda\infty}(q + p_{i_1} + \cdots + p_{i_{n-1}})] \tag{2.51}$$

[7]Nella (2.47) si trascurano i termini di superficie.

in cui si somma sulle $n!$ possibili permutazioni dei momenti (la (2.51) è analoga alla (1.35)). Come si è appena visto, per ricavare le funzioni del gruppo di rinormalizzazione è necessario studiare la dipendenza delle costanti bare dal cutoff ultravioletto, che si ottiene dalle equazioni di evoluzione asintotiche. Nel limite ultravioletto l'azione effettiva assume la forma locale

$$\Pi_{rel} = \int_x \frac{1}{2}\sigma_\phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \sigma_1 \phi + \frac{1}{2}\sigma_m \phi^2 + \frac{1}{3!}\sigma_g \phi^3. \tag{2.52}$$

Ad un loop si ottiene, usando lo sharp cutoff e nei limiti $\Lambda_0 \to \infty$, $\mu >> m$, avendo definito $r = 1/(4\pi)^3$,

$$\Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0}\sigma_1^{(1)} = I_1^{(0)}(\mu; \Lambda_0, \infty) \simeq -rg\Lambda_0^4 \tag{2.53a}$$

$$\Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0}\sigma_\phi^{(1)} = \partial_{p^2} I_2^{(0)}(p^2; \Lambda_0, \infty)\Big|_{p^2=\mu^2} \simeq -\frac{1}{6}rg^2 \tag{2.53b}$$

$$\Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0}\sigma_m^{(1)} = I_2^{(0)}(p^2; \Lambda_0, \infty)|_{p^2=0} \simeq rg^2\Lambda_0^2 \tag{2.53c}$$

$$\Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0}\sigma_g^{(1)} = I_3^{(0)}(\bar{p}_i; \Lambda_0, \infty)|_{3SP} \simeq -rg^3. \tag{2.53d}$$

Come conseguenze la dimensione anomala del campo ϕ (per $m/\mu \to 0$) è non banale

$$\gamma_\phi^{(1)}(g) = -\frac{1}{2}\Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0}\sigma_\phi^{(1)} = \frac{1}{12}rg^2 \tag{2.54}$$

e la funzione beta ad un loop vale (sottointendendo il limite $\Lambda_0 \to \infty$)

$$\begin{aligned}\beta^{(1)}(g) &= \Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0} g_0^{(1)} = \Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0}(\sigma_g/\sigma_\phi^{3/2})^{(1)} \\ &= \Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0}\sigma_g^{(1)} - \frac{3}{2} g \Lambda_0 \frac{\partial}{\partial \Lambda_0}\sigma_\phi^{(1)} = -\frac{3}{4}rg^3.\end{aligned} \tag{2.55}$$

2.6 Indipendenza dalla funzione cutoff

È da notare il fatto che le funzioni beta e le dimensioni anomale asintotiche, cioè ottenute nel limite $m^2/\mu^2 \to 0$, sono quantità indipendenti dalla scelta della funzione cutoff. Per dimostrarlo conviene provare prima un'utile formula, che permette di calcolare in maniera universale l'integrale sui momenti di un diagramma di Feynman derivato rispetto a $\Lambda\partial_\Lambda$ e privo di scale di massa. La formula generale per integrali $D-$dimensionali di una funzione $F(q, \Lambda)$ di dimensione di massa $-D$ è

$$\int_q \Lambda \partial_\Lambda F(q, \Lambda) = -\frac{2}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(D/2)} < q^D F(q, 0) >_\Omega \tag{2.56}$$

dove $<>_\Omega$ indica la media angolare in D dimensioni. Per ricavare la (2.56) definiamo la funzione adimensionale $f(q^2/\Lambda^2) =< q^D F(q,\Lambda) >_\Omega$; in questo modo l'integrale si scrive

$$\int_q \Lambda\partial_\Lambda F(q,\Lambda) = \frac{\Omega}{(2\pi)^D}\int_0^\infty \frac{1}{2}dq^2 q^{D-2}\Lambda\partial_\Lambda \frac{1}{q^D} f(q^2/\Lambda^2), \tag{2.57}$$

dove $\Omega = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$ è l'angolo solido in D dimensioni. Usando la proprietà $\Lambda\partial_\Lambda f = -2q^2\partial_{q^2} f$ si ricava immediatamente

$$\int_q \Lambda\partial_\Lambda F = \frac{2}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(D/2)}\left[-\lim_{\Lambda\to 0} f(q^2/\Lambda^2) + \lim_{\Lambda\to\infty} f(q^2/\Lambda^2)\right]. \tag{2.58}$$

Se la funzione $F(q,\Lambda)$ è ottenuta da un integrando di Feynman in cui Λ agisce come cutoff infrarosso, nel senso che vi sono prodotti di funzioni $K_{\Lambda\infty}$, il secondo addendo è nullo e si ottiene la (2.56).

A questo punto è possibile calcolare le quantità $\dot\sigma_\phi^{(1)}$ e $\dot\sigma_g^{(1)}$, da cui si estraggono le funzioni $\gamma_\phi^{(1)}$ e $\beta^{(1)}$, in maniera indipendente dalla funzione cutoff; risulta infatti

$$\begin{aligned}\int_q \Lambda\partial_\Lambda\, \partial_{p^2}\frac{K_{\Lambda\infty}(q)}{q^2}\frac{K_{\Lambda\infty}(q+p)}{(q+p)^2}\bigg|_{p=0} &= -rq^6 < \partial_{p^2}\frac{1}{q^2}\frac{1}{(q+p)^2}\bigg|_{p=0} >_\Omega \\ &= \frac{1}{3}r, \end{aligned} \tag{2.59a}$$

$$\int_q \Lambda\partial_\Lambda\left(\frac{K_{\Lambda\infty}(q)}{q^2}\right)^3 = -rq^6 < \left(\frac{1}{q^2}\right)^3 >_\Omega = -r. \tag{2.59b}$$

Nella (2.59a) si può usare la parametrizzazione di Feynman per calcolare la derivata rispetto a p^2, oppure sviluppare nei momenti.

Nota 1: in maniera analoga si può provare la formula

$$\int_q \Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0}F(q,\Lambda_0) = +\frac{2}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(D/2)} < q^D F(q,\infty) >_\Omega \tag{2.60}$$

se Λ_0 compare nel diagramma di Feynman come cutoff ultravioletto (cioè se vi sono prodotti di funzioni del tipo $K_{0\Lambda_0}$). .

Nota 2: notiamo ancora che le formule (2.56) e (2.60) valgono solo per diagrammi di Feynman adimensionali e privi di scale di massa, cioè solo nel limite in cui i momenti esterni e le masse sono trascurabili rispetto a Λ o Λ_0. È da integrali di questo tipo che si estraggono le funzioni del gruppo di rinormalizzazione. Per esempio il primo coefficiente della funzione beta in ϕ^4 si può ottenere dall'integrale (2.49), senza specificare la funzione di taglio, nella maniera seguente:

$$\lim_{\Lambda\to\infty} -\frac{3}{2}\int_q \Lambda\partial_\Lambda\left[D_{\Lambda\infty}(q)D_{\Lambda\infty}(q+\bar p)\right] = -\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{16\pi^2}\right) < \frac{q^4}{q^4} >_\Omega = \frac{3}{16\pi^2}. \tag{2.61}$$

2.7 Conti a due loop

In questa sezione svolgiamo alcuni calcoli a due loop nel formalismo del $\Lambda-$RG. In particolare calcoliamo esattamente la dimensione anomala e la funzione beta della teoria $\lambda\phi^4$. Tali quantità, nel limite asintotico $\mu >> m$, si ottengono dalle formule generali (2.44), che al loop ℓ si scrivono

$$\gamma^{(\ell)}(\lambda) = \lim_{\Lambda\to\infty}\left[\frac{1}{2}(-\Lambda\partial_\Lambda + \beta\partial_\lambda)\log\sigma_\phi\right]^{(\ell)} \tag{2.62}$$

$$\beta^{(\ell)}(\lambda) = \lim_{\Lambda\to\infty}\left[\Lambda\partial_\Lambda(\sigma_\lambda/\sigma_\phi^2)/\partial_\lambda(\sigma_\lambda/\sigma_\phi^2)\right]^{(\ell)} \tag{2.63}$$

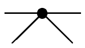
avendo definito

$$\sigma_\phi^{(\ell)}(\lambda,\Lambda/\mu) = \partial_{p^2}\Pi_2^{(\ell)}\Big|_{p^2=\mu^2}, \quad \sigma_\lambda^{(\ell)}(\lambda,\Lambda/\mu) = \Pi_4^{(\ell)}\Big|_{4SP}. \tag{2.64}$$

Per il calcolo di σ_ϕ e σ_λ a due loop è necessario conoscere a un loop i vertici a due, quattro e sei punti, che sono dati dalle rispettive equazioni di evoluzione integrate. Conviene lavorare con tecniche diagrammatiche e introdurre i vertici (divergenti per $\Lambda_0\to\infty$)

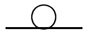
$$= -\frac{1}{2}\lambda\int_q \Delta_{0\Lambda_0}(q) \tag{2.65}$$

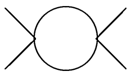
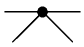
e

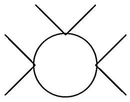


$$= +\frac{3}{2}\lambda^2\int_q \Delta_{0\Lambda_0}(q)\Delta_{0\Lambda_0}(q+\bar{p}). \tag{2.66}$$

In questo modo le espressioni per i vertici propri a due, quattro punti e sei punti si scrivono[8]

$$\Pi_2^{(1)}(p;\Lambda) = +\frac{1}{2}$$  $+$ (2.67a)

$$\Pi_4^{(1)}(p_i;\Lambda) = -\frac{1}{4}\sum_{6\ perm}$$  $+$  (2.67b)

$$\Pi_6^{(1)}(p_i;\Lambda) = +\frac{1}{6}\sum_{90\ perm}$$  (2.67c)

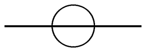
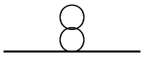
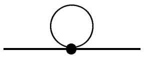
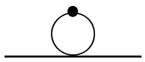
[8]Per esempio la forma esplicita del primo vertice è

$$\Pi_2^{(1)}(p;\Lambda,\Lambda_0) = \frac{1}{2}\lambda\int_q \Delta_{\Lambda\Lambda_0}(q) - \frac{1}{2}\lambda\int_q \Delta_{0\Lambda_0}(q).$$

Nei diagrammi di Feynman in figura i propagatori $\Delta_{\Lambda\Lambda_0}$ sono tagliati nell'infrarosso e nell'ultravioletto; la somma di tutti i diagrammi è finita nel limite $\Lambda_0 \to \infty$, ma ciò non avviene per i singoli grafici. La dimensione anomala a due loop

$$\gamma_\phi^{(2)}(\lambda) = -\lim_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{2}\Lambda\partial_\Lambda \sigma_\phi^{(2)} \tag{2.68}$$

si estrae derivando rispetto a p^2 il vertice $\dot{\Pi}_2^{(2)} = I_2^{(1)}(p;\Lambda)$, che si può scrivere nella forma

$\dot{\Pi}_2^{(2)} = \frac{1}{2}\Lambda\partial_\Lambda \quad -\frac{1}{3}$  $-\frac{1}{2}$  $+$  $-$ 

Per il calcolo della dimensione anomala conta solo il primo grafico, visto gli altri non dipendono da p^2 e si ottiene

$$\dot{\sigma}_\phi^{(2)} = -\frac{1}{6}\lambda^2\, \partial_{p^2} \int_{q_1,q_2} \Lambda\partial_\Lambda[\Delta_{\Lambda\infty}(q_1)\Delta_{\Lambda\infty}(q_2)\Delta_{\Lambda\infty}(q_1+q_2+p)]\Big|_{p^2=\mu^2}. \tag{2.69}$$

Nel limite $\Lambda \to \infty$, cioè $\mu \to 0$, l'integrale in q_1 si può calcolare usando il trucco (2.56) e la relazione[9]

$$\partial_{p^2} \int_{q_2} q_1^4 \frac{1}{q_1^2}\frac{1}{q_2^2} < \frac{1}{(q_1+q_2+p)^2} >_{\Omega_1}\Big|_{p=0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16\pi^2}\right). \tag{2.70}$$

In questo modo si ottiene

$$\gamma_\phi^{(2)} = \frac{1}{12}\lambda^2 \left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^2. \tag{2.71}$$

Per il calcolo della beta function

$$\beta^{(2)} = \dot{\sigma}_\lambda^{(2)} - \dot{\sigma}_\lambda^{(1)}\partial_\lambda\sigma_\lambda^{(1)} - 2\lambda\dot{\sigma}_\phi^{(2)} \tag{2.72}$$

è necessario considerare il vertice $\dot{\Pi}_4^{(2)}|_{4SP}$ nel punto simmetrico a quattro particelle.

---

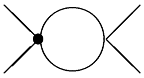
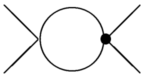
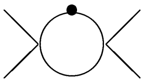
[9] Per dimostrare la (2.70) conviene applicare la parametrizzazione di Feynman scrivendo

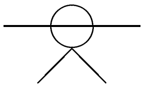
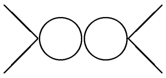
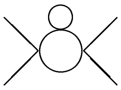
$$\int_{\Omega_1,q_2} \frac{1}{q_2^2}\frac{1}{(q_1+q_2+p)^2} = \int_{\Omega_1,q_2}\int_0^1 dx \frac{1}{[q_2^2 + x(1-x)(q_1+p)^2]^2};$$

prendendo $p^\mu = (0,0,0,p)$ l'integrale assume la forma

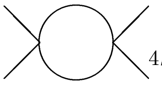
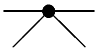
$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^\pi 2\pi\sin^2\psi\, d\psi \int_0^\infty q_2^2\, dq_2^2 \int_0^1 dx \frac{1}{[q_2^2 + x(1-x)(q_1^2+p^2+2q_1p\cos\psi)]^2};$$

l'integrale angolare in $d\psi$ può essere calcolato se si sviluppa l'integrando fino al secondo ordine in p. L'integrazione angolare elimina il termine lineare in p e il coefficiente del termine p^2 è la derivata cercata. Si ottiene così la (2.70).

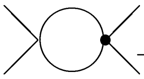
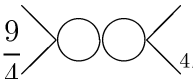
$\dot\sigma_\lambda^{(2)} = \Lambda\partial_\Lambda$ $-\frac{3}{2}$  $-\frac{3}{2}$  $+3$ 

$+3$  $+\frac{3}{4}$  $+\frac{3}{2}$ 

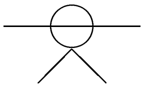
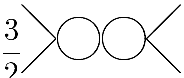
Gli integrali corrispondenti al terzo e al sesto diagramma di Feynman in figura danno una somma che tende ad una costante finita nel limite $\Lambda \to \infty$ e quindi danno contributo nullo a $\dot\Pi_4^{(2)}\Big|_{4SP}$. Gli altri integrali danno contributi divergenti del tipo $a \log \Lambda/\mu + b(\log\Lambda/\mu)^2$ e quindi $\dot\sigma_\lambda^{(2)}$ ha un andamento del tipo $a + 2b\log\Lambda/\mu$. Tenendo conto della relazione (2.67b) nel punto simmetrico si ottiene

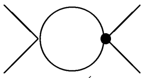
$\sigma_\lambda^{(1)}(\Lambda) = -\frac{3}{2}$  $_{4SP} +$  (2.73)

e quindi, con qualche passaggio,

$\dot\sigma_\lambda^{(1)}\partial_\lambda\sigma_\lambda^{(1)} = \frac{2}{\lambda}\dot\sigma_\lambda^{(1)}\sigma_\lambda^{(1)} = \Lambda\partial_\Lambda \Big\{ -3$  $+\frac{9}{4}$  $_{4SP} \Big\}$ (2.74)

Usando l'espressione per $\dot\sigma_\lambda^{(2)} = \dot\Pi_4^{(1)}|_{4SP}$ risulta infine

$\lim_{\Lambda\to\infty}\left(\dot\sigma_\lambda^{(2)} - \frac{2}{\lambda}\dot\sigma_\lambda^{(1)}\sigma_\lambda^{(1)}\right) = \Lambda\partial_\Lambda \Big\{ 3$  $-\frac{3}{2}$  $\Big\}$. (2.75)

Si noti la cancellazione degli integrali divergenti con Λ_0 del tipo  .
Usando di nuovo il trucco (2.56) e scrivendo il secondo integrando della (2.75) nella forma

$$-\frac{3}{2}\lambda^3 \int_{q_1,q_2} D_{\Lambda\infty}(q_1)^2 D_{\Lambda\infty}(q_2)^2 = -3\lambda^3 \int_{q_1,q_2} \theta(q_1^2 - q_2^2) D_{\Lambda\infty}(q_1)^2 D_{\Lambda\infty}(q_2)^2$$

la (2.75) si scrive

$$-\frac{2}{16\pi^2}\lambda^3 q_1^4 \int_{q_2} < 3\frac{1}{q_1^2}\frac{1}{(q_1+q_2)^2}\frac{1}{q_2^4} - 3\frac{\theta(q_1^2-q_2^2)}{q_1^4 q_2^4} >_{\Omega_1} . \tag{2.76}$$

Per proseguire basta usare la formula

$$< \frac{1}{(q_1+q_2)^2} >_{\Omega_1} = \frac{1}{\max\{q_1^2, q_2^2\}} = \frac{1}{q_1^2}\theta(q_1^2 - q_2^2) + \frac{1}{q_2^2}\theta(q_2^2 - q_1^2) \tag{2.77}$$

da cui

$$\dot{\sigma}^{(2)}_\lambda - \frac{2}{\lambda}\dot{\sigma}^{(1)}_\lambda \sigma^{(1)}_\lambda = -6\lambda^3 \left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^2 \int_0^\infty q_2^2 dq_2^2 \frac{\theta(q_2^2 - q_1^2)}{q_1^2 q_2^6} q_1^4 = -6\lambda^3 \left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^2 \tag{2.78}$$

e quindi

$$\beta^{(2)} = \lim_{\Lambda\to\infty} \left(\dot{\sigma}^{(2)}_\lambda - \dot{\sigma}^{(1)}_\lambda \partial_\lambda \sigma^{(1)}_\lambda - 2\lambda\dot{\sigma}^{(2)}_\phi\right) = -\frac{17}{3}\lambda^3 \left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^2. \tag{2.79}$$

Si noti che le dimensioni anomale e le funzioni beta così ottenute sono finite per grandi Λ e indipendenti dalla forma della funzione cutoff. La tecnica in principio si può applicare a tutti gli ordini in teoria delle perturbazioni. Tuttavia solo i primi due coefficienti della beta function sono universali, cioè indipendenti dalle prescrizioni adottate [33] e quindi non ci interessa calcolare le correzioni $\beta^{(\ell)}$ per $\ell \geq 3$.

2.8 Equivalenza dell'equazione di Gell-Mann-Low con la proprietà di rinormalizzabilità

Da quanto si è detto nei paragrafi precedenti è evidente che c'è un'equivalenza tra il gruppo di rinormalizzazione di Wilson ultravioletto e il gruppo di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low, nel senso che sapendo come cambiano gli oggetti bare al variare del cutoff Λ_0 è possibile sapere come cambiano gli oggetti rinormalizzati al variare del punto di sottrazione μ. In questo paragrafo studiamo più in dettaglio questo punto (si veda anche [21]) e in particolare dimostriamo l'equivalenza delle relazioni

$$\lim_{\Lambda_0\to\infty} \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} - \gamma_I \phi^I \cdot \frac{\delta}{\delta\phi^I} + \beta_i \frac{\partial}{\partial g_i}\right) \Gamma(\phi, g_i, \mu; \Lambda_0) = 0 \tag{2.80}$$

e

$$\lim_{\Lambda_0\to\infty} \left(\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} - \gamma_0^I \cdot \phi_0^I \frac{\delta}{\delta\phi_0} + \beta_{0,i} \frac{\partial}{\partial g_{0,i}}\right) \Gamma_0(\phi_0, g_{0,i}, \Lambda_0) = 0, \tag{2.81}$$

in cui tutte le costanti di accoppiamento della teoria sono state rese adimensionali e si è definito

$$\gamma_I \phi_0^I \equiv -\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\phi^I, \quad \beta_i \equiv \mu\frac{\partial}{\partial\mu} g_i \tag{2.82}$$

e

$$\gamma_0^I \phi_0^I \equiv -\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0}\phi_0^I, \quad \beta_{0,i} \equiv \Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} g_{0,i}. \tag{2.83}$$

Le equazioni (2.80) e (2.81) hanno lo stesso contenuto matematico ma un'interpretazione fisica completamente diversa: la prima equazione descrive l'indipendenza dell'azione quantistica, fissate le costanti bare, dalla scala fittizia μ; la seconda l'indipendenza dell'azione quantistica, fissate le costanti rinormalizzate, dal cutoff ultravioletto. Entrambe valgono ordine per ordine in $\hbar$, nel senso che il limite

$$\Gamma(\phi^I, g_i, \mu) = \lim_{\Lambda_0\to\infty} \Gamma_0(\phi_0^I, g_{0,i}, \Lambda_0) \tag{2.84}$$

esiste ad ogni ordine finito. L'indipendenza da μ degli oggetti bare

$$\phi_0^I = \phi_0^I(\phi^I, g_i, \mu, \Lambda_0) = Z_I^{1/2}(g_i, \mu/\Lambda_0)\phi, \quad g_{i,0} = g_{i,0}(g_i, \mu/\Lambda_0) \tag{2.85}$$

dà le relazioni

$$\Lambda_0 \frac{\partial}{\partial\Lambda_0}\phi_0^I = -\mu\tfrac{\partial}{\partial\mu}\phi_0^I = -\left(\gamma^I - \beta_i\frac{\partial}{\partial g_i}\right)\phi_0^I, \tag{2.86a}$$

$$\Lambda_0 \frac{\partial}{\partial\Lambda_0}g_0 = -\mu\tfrac{\partial}{\partial\mu}g_0 = \beta_i\frac{\partial}{\partial g_i}g_0 \tag{2.86b}$$

e quindi è possibile ricavare la (2.80) dalla (2.81):

$$\lim_{\Lambda_0\to\infty}\left(\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} + \Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0}\phi_0^I\frac{\delta}{\delta\phi}{}^I_0 + \Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0}g_{0,i}\frac{\partial}{\partial g_{0,i}}\right)\Gamma_0(\phi_0^I, g_{0,i}, \Lambda_0) =$$

$$\lim_{\Lambda_0\to\infty}\left[\Lambda_0\frac{\partial}{\partial\Lambda_0} - \gamma^I\phi_0^I\cdot\frac{\delta}{\delta\phi_0^I} + \beta_i\left(\frac{\partial\phi_0^I}{\partial g_i}\frac{\partial}{\partial\phi_0^I} + \frac{\partial g_{0,j}}{\partial g_i}\frac{\partial}{\partial g_{0,j}}\right)\right]\Gamma_0(\phi_0^I, g_{0,i}, \Lambda_0) =$$

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} - \gamma^I\phi^I\frac{\delta}{\delta\phi^I} + \beta_i\frac{\partial}{\partial g_i}\right)\Gamma(\phi, g_i, \mu) = \mu\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\mu} = 0. \tag{2.87}$$

L'equazione (2.87) vale anche a cutoff finito, cioè per teorie efficaci, a patto di effettuare un running anche dei parametri irrilevanti [77] e in questo caso è perfettamente equivalente all'equazione del $\Lambda-$RG (lo si vede meglio se si usa la forma riportata in appendice (A.33)). Trascurare il running con μ dei coefficienti irrilevanti genera una apparente dipendenza dell'azione efficace dalla scala di rinormalizzazione μ,

$$\mu\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\mu} = O(\mu^2/\Lambda_0^2) \tag{2.88}$$

che però è trascurabile alle basse energie. Fisicamente ciò si riflette in una modifica delle leggi di scala (2.18) alle alte energie con correzioni $O(\mu^2/\Lambda_0^2)$.

Capitolo 3

$\Lambda-$RG in teorie con simmetrie lineari

Nei capitoli precedenti abbiamo illustrato il metodo del gruppo di rinormalizzazione di Wilson e i suoi legami con il gruppo di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low studiando qualche semplice teoria scalare. In questo capitolo vogliamo estendere la trattazione a teorie più generali, contenenti sia campi bosonici che fermionici. Inoltre tratteremo in dettaglio il problema della rinormalizzazione perturbativa delle teorie con simmetrie lineari. Come applicazione particolare studieremo l'elettrodinamica quantistica.

3.1 Notazioni impiegate

In questo primo paragrafo diamo una rassegna delle convenzioni utilizzate [90, 91, 92]. Consideriamo una teoria nello spazio di Minkowski descritta da dei campi $\Phi^A = \Phi^I(p)$ [1] che possono avere diverse proprietà di commutazione e indichiamo con $\varepsilon(\Phi^A)$ il grado di Grassmann del campo Φ^A; $\varepsilon(\phi^A)$ è un numero pari se il campo è bosonico e un numero dispari se il campo è fermionico. Per definizione il grado del prodotto è

$$\varepsilon(\Phi^A\Phi^B) = \varepsilon(\Phi^A) + \varepsilon(\Phi^B) \tag{3.1}$$

e le proprietà di commutazione dei campi si scrivono

$$\Phi^A\Phi^B = (-1)^{\varepsilon(\Phi^A)\varepsilon(\Phi^B)}\Phi^B\Phi^A. \tag{3.2}$$

[1] L'indice A specifica in maniera condensata sia l'indice I che il momento p. Con un tipico abuso di notazione indichiamo con $\Phi^I(p)$ la trasformata di Fourier del campo $\Phi^I(x)$. Le convenzioni sulle trasformate di Fourier sono riportate in appendice B.

Nel seguito useremo anche anche le notazioni abbreviate[2]

$$(-)^A \equiv (-1)^{\varepsilon(\Phi^A)}, \quad (-)^{A+B} \equiv (-1)^{\varepsilon(\Phi^A)+\varepsilon(\Phi^B)}, \quad (-)^{AB} = (-1)^{\varepsilon(\phi^A)\varepsilon(\phi^B)}. \tag{3.3}$$

Per definire la teoria libera è necessario introdurre una (super)matrice cinetica Δ^{-1}_{AB}, i cui elementi hanno grado $(-)^{A+B}$, invertibile e simmetrica in senso graduato

$$\Delta^{-1}_{AB} = (-)^{AB}\Delta^{-1}_{BA}. \tag{3.4}$$

Più esplicitamente Δ^{-1}_{AB} ha la forma

$$\Delta^{-1}_{AB} = \Delta^{-1}_{IJ}(p,q) = (2\pi)^d\delta(p+q)\Delta^{-1}_{IJ}(p) \tag{3.5}$$

e contiene i propagatori inversi dei campi Φ^A. Il termine cinetico si scrive (sottointendendo somme e integrali sugli indici ripetuti)

$$\frac{1}{2}\Delta^{-1}_{AB}\Phi^B\Phi^A = \frac{1}{2}(-)^A\Phi^A\Delta^{-1}_{AB}\Phi^B = \frac{1}{2}\int_p\sum_{IJ}(-)^I\Phi^I(-p)\Delta^{-1}_{IJ}(p)\Phi^J(p). \tag{3.6}$$

Introducendo il multipletto coniugato

$$\tilde{\Phi}^A \equiv (-)^A\Phi^A = (-)^I\Phi^I(p) \tag{3.7}$$

e il multipletto delle sorgenti $\tilde{J}_A = \tilde{J}_I(-p)$ l'azione libera ha la forma

$$S_{lib} = \frac{1}{2}\tilde{\Phi}\Delta^{-1}\Phi + \tilde{J}\Phi = \frac{1}{2}\int_p \tilde{\Phi}^I(-p)\Delta^{-1}_{IJ}(p)\Phi(p) + \tilde{J}_I(-p)\Phi(p). \tag{3.8}$$

Per esempio nel caso della QED i multipletti $\Phi^I(p)$, $\tilde{\Phi}^I(p)$ e $\tilde{J}_I(p)$ sono

$$\Phi^I(p) = \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \bar{\psi}^T(-p) \\ A(p) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi}^I(p) = \left(-\psi^T(p), -\bar{\psi}(-p), A^T(p)\right) \tag{3.9}$$

e

$$\tilde{J}_I(p) = \left(\bar{\eta}(-p), -\eta^T(p), K^T(p)\right), \tag{3.10}$$

[2]Usando le notazioni (3.3) valgono le utili identità

$$(-)^{A^2} = (-)^A, \quad (-)^{-A} = (-)^A, \quad (-)^{A(A+1)} = +1.$$

mentre la matrice cinetica ha la forma esplicita

$$\Delta^{-1}_{IJ}(p) = \begin{pmatrix} 0 & -(\not{p}^T + m) & 0 \\ -(\not{p} - m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^2(t_{\mu\nu} + \frac{1}{a}\ell_{\mu\nu}) \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

in cui abbiamo introdotto i tensori longitudinale e trasverso

$$\ell_{\mu\nu}(p) = p_\mu p_\nu / p^2, \quad t_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2. \tag{3.12}$$

Con queste definizioni l'azione libera (3.8) assume la forma

$$\begin{aligned} S_{lib}(\psi, \bar{\psi}, A) = \int_p \bar{\psi}(p)(\not{p} - m)\psi(p) - \frac{1}{2}A_\mu(-p)[(t^{\mu\nu} + \frac{1}{a}\ell^{\mu\nu})p^2]A_\nu(p) \\ + \bar{\eta}(p)\psi(p) + \bar{\psi}(p)\eta(p) + K_\mu(-p)A^\mu(p) \end{aligned} \tag{3.13}$$

ovvero

$$S_{lib} = \int_x \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2a}(\partial \cdot A)^2 + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + K_\mu A^\mu. \tag{3.14}$$

Introduciamo ora un po' di definizioni che ci saranno utili nella deduzione dell'equazione di evoluzione. In primo luogo definiamo la supertraccia

$$\mathrm{STr}X = (-)^A X^A_A = \int_p \sum_I (-)^I X^I_I(p, -p) \tag{3.15}$$

che soddisfa la proprietà

$$\mathrm{STr}XY = \mathrm{STr}YX. \tag{3.16}$$

In secondo luogo introduciamo il multipletto $J_A = \tilde{J}_A$ (da cui $\tilde{J}\Phi = \tilde{\Phi}J$) e le derivate funzionali graduate $\frac{\delta}{\delta J}$ e $\frac{\delta}{\delta \tilde{J}}$ (analogamente si possono definire anche le derivate $\frac{\delta}{\delta \Phi}$ e $\frac{\delta}{\delta \tilde{\Phi}}$). La prima agisce da destra

$$\frac{\delta XY}{\delta J_A} = X\frac{\delta Y}{\delta J_A} + \frac{\delta X}{\delta J_A}Y(-)^{A+Y} \tag{3.17}$$

e la seconda da sinistra

$$\frac{\delta XY}{\delta \tilde{J}_A} = \frac{\delta X}{\delta \tilde{J}_A}Y + X\frac{\delta Y}{\delta \tilde{J}_A}(-)^{A+X} \tag{3.18}$$

(notazioni più precise sarebbero $\frac{\delta}{\delta J_A} = \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta J_A}$, $\frac{\delta}{\delta \tilde{J}_A} = \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \tilde{J}_A}$), e sono definite dalle relazioni

$$\frac{\delta}{\delta J_I(p)} J_J(q) = (2\pi)^d \delta(p-q)\delta^I_J, \quad \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_I(p)} \tilde{J}_J(q) = (2\pi)^d \delta(p-q)\delta^I_J. \tag{3.19}$$

Usando le definizioni appena introdotte si ricava banalmente la seguente identità, che useremo nel prossimo paragrafo,

$$\tilde{\Phi}\Delta^{-1}\Phi \; e^{i\tilde{J}\Phi} = \mathrm{STr}\left[\Delta^{-1} \frac{\delta}{\delta i\tilde{J}\delta iJ}\right] e^{i\tilde{J}\Phi}. \tag{3.20}$$

3.2 Deduzione generale dell'equazione di evoluzione

Sfruttando le convenzioni e le proprietà appena illustrate diventa immediato dedurre l'equazione di evoluzione. È sufficiente ripetere i ragionamenti svolti nel capitolo 1 per le teorie scalari. Qui per comodità lavoriamo direttamente nello spazio di Minkowski. Il passaggio all'euclideo verrà fatto solo alla fine, nella valutazione degli integrali di Feynman mediante la rotazione di Wick. Per un uso futuro consideriamo anche la possibilità di avere un'interazione con sorgenti esterne $\varepsilon = \{\varepsilon_M(p)\}$ accoppiate a degli osservabili bare $O^M(\Phi;\Lambda_0)$.

Il punto di partenza è l'integrale funzionale tagliato

$$Z(J,\varepsilon;\Lambda,\Lambda_0) = \int [d\Phi] e^{\frac{i}{2}\tilde{\Phi}R_{\Lambda\Lambda_0}\Phi + i[S_0(\Phi;\Lambda_0) + \tilde{\Phi}J + \varepsilon_M O^M_0(\Phi;\Lambda_0)]} \tag{3.21}$$

dove $S_0(\Phi;\Lambda_0) = \frac{1}{2}\tilde{\Phi}\Delta^{-1}_{0\Lambda_0}\Phi + S^{int}_0$ è l'azione bare e il termine $R_{\Lambda\Lambda_0}$ è dato dalla formula

$$R_{\Lambda\Lambda_0} \equiv \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0} - \Delta^{-1}_{0\Lambda_0} = \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0} K_{0\Lambda} K^{-1}_{0\Lambda_0} \tag{3.22}$$

in cui si sono usate le convenzioni, analoghe a quelle del capitolo 1,[3]

$$\Delta_{\Lambda\Lambda_0}(p) \equiv K_{\Lambda\Lambda_0}(p)\Delta(p), \quad K_{\Lambda\Lambda_0}(p) \equiv K_{0\Lambda_0}(p) - K_{0\Lambda}(p). \tag{3.23}$$

La funzione $K_{0\Lambda_0}(q)$ è tale che il suo prolungamento analitico nello spazio euclideo taglia le frequenze ultraviolette $q^2 > \Lambda_0^2$. In questo modo si vede subito che solo le frequenze comprese tra Λ e Λ_0 propagano indisturbate, mentre le altre vengono soppresse.

[3] Se vi sono più campi diversi, come nell'esempio della QED, il propagatore $\Delta_{IJ}(p)$ è una matrice diagonale a blocchi. È possibile (e a volte conveniente) tagliare i gradi di libertà associati ai diversi blocchi con funzioni cutoff differenti. In questo caso anche $K_{\Lambda\Lambda_0}(p)$ va vista come una matrice diagonale a blocchi.

Deduciamo ora le equazioni di evoluzione dei funzionali generatori. Derivando la definizione (3.21) e usando la (3.20) si ottiene

$$\Lambda\partial_\Lambda Z = -\frac{i}{2}\mathrm{STr}\dot{R}_{\Lambda\Lambda_0}\frac{\delta}{\delta\tilde{J}}\frac{\delta}{\delta J}Z, \tag{3.24}$$

quindi $W = -i\log Z$ soddisfa l'equazione

$$\Lambda\partial_\Lambda W = -\frac{i}{2}\mathrm{STr}\dot{R}_{\Lambda\Lambda_0}\left(\frac{\delta}{\delta\tilde{J}\delta J}W^\Lambda + i\frac{\delta W}{\delta\tilde{J}}\frac{\delta W}{\delta J}\right); \tag{3.25}$$

definendo l'azione effettiva tagliata

$$\Gamma(\Phi,\varepsilon;\Lambda,\Lambda_0) = -W(0,0;\Lambda,\Lambda_0) + W(J,\varepsilon;\Lambda,\Lambda_0) - \tilde{\Phi}J \tag{3.26}$$

(si noti la differenza di segno rispetto alle notazioni euclidee dei capitoli precedenti) e i campi classici

$$\Phi = \frac{\delta W}{\delta\tilde{J}}(J,\varepsilon;\Lambda,\Lambda_0) \tag{3.27}$$

valgono le proprietà di facile verifica

$$J = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde{\Phi}}, \tag{3.28}$$

$$\frac{\delta}{\delta J}\frac{\delta W}{\delta\tilde{J}} = \frac{\delta\Phi}{\delta J} = \left(\frac{\delta J}{\delta\Phi}\right)^{-1} = -\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde{\Phi}\delta\Phi}\right)^{-1}, \tag{3.29}$$

$$\Lambda\partial_\Lambda\Gamma = -\Lambda\partial_\Lambda W(0,0;\Lambda,\Lambda_0) + \Lambda\partial_\Lambda W(J,\varepsilon;\Lambda,\Lambda_0). \tag{3.30}$$

In particolare dall'ultima equazione sfruttando la (3.25) si ottiene

$$\begin{aligned}\Lambda\partial_\Lambda\Gamma = {}& \frac{i}{2}\mathrm{STr}\dot{R}_{\Lambda\Lambda_0}\,[\frac{\delta}{\delta\tilde{J}}\frac{\delta}{\delta J}W + i\Phi\tilde{\Phi}]\Big|_{J=\varepsilon=0} \\ & -\frac{i}{2}\mathrm{STr}\dot{R}_{\Lambda\Lambda_0}[\frac{\delta}{\delta\tilde{J}}\frac{\delta}{\delta J}W + i\Phi\tilde{\Phi}]\end{aligned} \tag{3.31}$$

e quindi riordinando i termini e definendo $\Pi = \Gamma - \frac{1}{2}\tilde{\Phi}R_{\Lambda\Lambda_0}\Phi$ si ottiene alla fine

$$\Lambda\partial_\Lambda\Pi = -\frac{i}{2}\mathrm{STr}\dot{R}_{\Lambda\Lambda_0}[\Gamma^{-1}_{\tilde{\Phi}\Phi} - \Gamma_2^{-1}]. \tag{3.32}$$

Questa forma dell'equazione è utile quando non si è interessati a sviluppare il funzionale generatore nei vertici propri (per esempio nel caso di studi non perturbativi con troncamenti [8, 59] oppure in considerazioni di carattere generale). Per ricavare le equazioni di evoluzione dei vertici propri conviene invece scomporre, come si è fatto nel primo capitolo,

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde{\Phi}\delta\Phi}(\Phi,\varepsilon;\Lambda,\Lambda_0) = \Gamma_2 + \Gamma^{int}_{\tilde{\Phi}\Phi}(\Phi,\varepsilon;\Lambda,\Lambda_0) \tag{3.33}$$

e definire

$$\bar{\Gamma}_{\tilde{\Phi}\Phi}(\Phi,\varepsilon;\Lambda,\Lambda_0) = (\mathbb{1} + \Gamma^{int}_{\tilde{\Phi}\Phi}\Gamma_2^{-1})^{-1}\Gamma^{int}_{\tilde{\Phi}\Phi}(\Phi,\varepsilon;\Lambda,\Lambda_0) \tag{3.34}$$

ovvero

$$\Gamma^{-1}_{\tilde{\Phi}\Phi}(\Phi,\tilde{e};\Lambda,\Lambda_0 p) = \Gamma_2^{-1} - \Gamma_2^{-1}\bar{\Gamma}_{\tilde{\Phi}\Phi}(\Phi,\varepsilon;\Lambda,\Lambda_0)\Gamma_2^{-1}. \tag{3.35}$$

Risulta allora

$$\dot{\Pi} = I(\Phi;\Lambda,\Lambda_0) = \frac{i}{2}\mathrm{STr}\dot{R}_{\Lambda\Lambda_0}\Gamma_2^{-1}\bar{\Gamma}_{\tilde{\Phi}\Phi}\Gamma_2^{-1}. \tag{3.36}$$

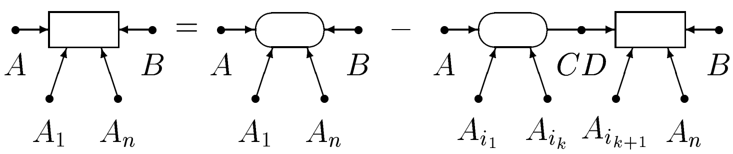
Per esplicitare l'equazione conviene riscrivere $\bar{\Gamma}_{\tilde{\Phi}\Phi}$ nella forma ricorsiva

$$\bar{\Gamma}_{\tilde{\Phi}\Phi} = \Gamma^{int}_{\tilde{\Phi}\Phi} - \Gamma^{int}_{\tilde{\Phi}\Phi}\Gamma_2^{-1}\bar{\Gamma}_{\tilde{\Phi}\Phi} \tag{3.37}$$

e sviluppare $\bar{\Gamma}_{\tilde{\Phi}\Phi}$ in termini dei vertici propri, come si è fatto per la teoria scalare. In notazioni condensate si ha

$$\bar{\Gamma}_{AA_1\ldots A_nB} = \Gamma_{AA_1\ldots A_nB} - \sum_{k=1}^{n-1}\Gamma_{AA_1\ldots A_kC}(\Gamma_2^{-1})^{CD}\bar{\Gamma}_{DA_{k+1}\ldots A_nB}; \tag{3.38}$$

in questo modo i vertici $\bar{\Gamma}_{AA_1\ldots A_nB}$ si ottengono ricorsivamente. La (3.38) ha un'interpretazione grafica del tutto analoga a quella mostrata nel capitolo 1.



L'applicazione alla QED verrà mostrata nel paragrafo 3.5.

3.2.1 Equazione di evoluzione linearizzata

Dall'equazione di evoluzione (3.32) si ricava immediatamente l'equazione di evoluzione per le variazioni $\Delta\Pi$, che è lineare del tipo

$$\Lambda\partial_\Lambda\Delta\Pi = M\Delta\Pi \tag{3.39}$$

con

$$M = \frac{i}{2}\mathrm{STr}\dot{R}_{\Lambda\Lambda_0}\Gamma^{-1}_{\tilde{\Phi}\Phi}\frac{\delta}{\delta\tilde{\Phi}\delta\Phi}\Gamma^{-1}_{\tilde{\Phi}\Phi}. \tag{3.40}$$

L'equazione lineare (3.39) è essenziale per lo studio della rinormalizzazione degli operatori composti, che sono descritti dalle variazioni $\Delta\Pi = \frac{\delta\Pi}{\delta\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$. Per mostrarlo esplicitamente osserviamo che le funzioni di Green (connesse) con l'inserzione di un operatore (bare) $O_0^M(x;\Lambda_0)$

$$O_W^{MI_1\ldots I_n}(x,x_1,\ldots,x_n) \equiv < O_0^M(x;\Lambda_0)\Phi^{I_1}(x_1)\ldots\Phi^{I_n}(x_n) >_c \tag{3.41}$$

sono generate dal funzionale

$$\begin{aligned} O_W(J;\Lambda,\Lambda_0) &=< O_0 >_{\Lambda\Lambda_0}(J;\Lambda,\Lambda_0) \\ &= \frac{1}{Z(J;\Lambda,\Lambda_0)}\int[d\Phi]e^{\frac{i}{2}\tilde{\Phi}R_{\Lambda\Lambda_0}\Phi+iS_0(\Phi,J;\Lambda_0)}O_0(\Phi;\Lambda_0) \\ &= \frac{\delta}{\delta i\varepsilon}\log Z(J,\varepsilon_M;\Lambda,\Lambda_0)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\delta W}{\delta\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \tag{3.42}$$

derivando rispetto a $J_{I_1}(x_1),\cdots J_{I_n}(x_n)$ e ponendo $J=0$. In principio le funzioni di Green connesse potrebbero essere ottenute direttamente risolvendo l'equazione per $O_W(J;\Lambda,\Lambda_0)$, ottenuta dalla (3.25),

$$\Lambda\partial_\Lambda O_W = \mathcal{M}O_W = -\frac{i}{2}\mathrm{STr}\dot{R}_{\Lambda\Lambda_0}\left(\frac{\delta O_W}{\delta\tilde{J}\delta J}+\frac{\delta O_W}{\delta\tilde{J}}\frac{\delta W}{\delta J}+\frac{\delta W}{\delta\tilde{J}}\frac{\delta O_W}{\delta J}\right); \tag{3.43}$$

tuttavia per studi perturbativi e più conveniente ricavare le funzioni di Green 1PI

$$O^M_{I_1\ldots I_n}(x,x_1\ldots x_n) = \frac{\delta\Gamma}{\delta\varepsilon_M(x)\delta\Phi^{I_1}(x_1)\ldots\delta\Phi^{I_n}(x_n)}\bigg|_{\varepsilon=0,\Phi=0}, \tag{3.44}$$

in quanto il loro funzionale generatore

$$O_\Gamma(\Phi) = \frac{\delta\Gamma}{\delta\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\delta W}{\delta\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = O_W(J) \tag{3.45}$$

soddisfa l'equazione $\dot{O}_\Gamma = MO_\Gamma$ che è risolvibile ricorsivamente in $\hbar$, a differenza della (3.43).

Nel paragrafo 3.4 useremo l'equazione (3.39) per studiare la rinormalizzazione delle simmetrie lineari e provare il principio dell'azione quantistica.

3.2.2 Condizioni al contorno

L'equazione di evoluzione si può risolvere perturbativamente una volta che siano state assegnate le condizioni al contorno sulla parte rilevante dell'azione efficace (le condizioni al contorno sulla parte irrilevante sono le usuali $\Pi^{(\ell)}_{irr}|_{\Lambda=\Lambda_0} \equiv 0$),

$$\Pi^{(\ell)}_{rel}(\Phi;\Lambda,\Lambda_0) = \int_x \Pi^{(\ell)}_r(\Lambda,\Lambda_0) O_r(x). \tag{3.46}$$

In teorie con simmetrie classiche che non vengono rispettate dalla procedura di $\Lambda-$rinormalizzazione, le condizioni al contorno vanno fissate in maniera non banale. In questo caso infatti i coefficienti rilevanti $\Pi^{(\ell)}_r = (\sigma^{(\ell)}_a, \rho^{(\ell)}_i)$ si possono spezzare in due insiemi:

1. I coefficienti rilevanti "invarianti" $\sigma^{(\ell)}_a$, associati agli operatori invarianti (cioè soddisfacenti $\delta O_a = 0$).

2. I coefficienti rilevanti "non invarianti" $\rho^{(\ell)}_i$, associati agli operatori non invarianti ($\delta O_i \neq 0$).

I coefficienti $\sigma^{(\ell)}_r$ sono fissati dalle prescrizioni di rinormalizzazione e alla fine si possono esprimere in termini dei parametri fisici della teoria; i coefficienti $\rho^{(\ell)}_i$ invece sono liberi, e vengono fissati ordine per ordine in $\hbar$ in termini dei parametri rinormalizzati dalla richiesta che l'azione fisica soddisfi la simmetria classica attraverso le cosiddette equazioni di "fine-tuning". Torneremo su questo punto in dettaglio nel paragrafo 3.4.

3.3 Studio generale delle simmetrie lineari

Cominciamo ora a studiare in dettaglio la trattazione delle simmetrie lineari nel formalismo del $\Lambda-$RG. In generale con simmetrie lineari intendiamo trasformazioni del tipo

$$\delta\Phi^A = A^A_B \Phi^B + b^A \tag{3.47}$$

che lasciano invariante l'azione classica $\delta S = 0$ o al più la rompono per termini lineari nei campi

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta \Phi}(A\Phi + b) = L(\Phi). \tag{3.48}$$

Come esempio specifico prendiamo il caso della QED in cui le (3.47) assumono la forma esplicita (in visuale delle coordinate) [4]

$$\delta \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \bar{\psi}^T(x) \\ A(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ief(x) & 0 & 0 \\ 0 & -ief(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \bar{\psi}^T(x) \\ A(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial f(x) \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

e quindi

$$A^I_J(p,-q) = ie\tilde{f}(p-q) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^I(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -ip\tilde{f}(p) \end{pmatrix}. \tag{3.50}$$

La (3.48) si scrive

$$\delta S = \int_x f(x) W(x) S = \int_x f(x) \frac{\Box}{a} \partial \cdot A(x) \tag{3.51}$$

con

$$W(x)S = -\partial_\mu \frac{\delta S}{\delta A_\mu} - ie\bar{\psi}\frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}} + ie\frac{\delta S}{\delta \psi}\psi. \tag{3.52}$$

Il problema dell'estensione quantistica della simmetria (3.48) dal punto di vista wilsoniano è chiaro: si tratta di determinare la legge di trasformazione dell'azione effettiva tagliata $\Pi(\Phi;\Lambda,\Lambda_0)$,

$$\delta\Pi(\Phi;\Lambda,\Lambda_0) = \bar{\Delta}(\Phi;\Lambda,\Lambda_0). \tag{3.53}$$

In particolare la simmetria può essere recuperata sull'azione quantistica

$$\Gamma^{(\ell)}(\Phi) = \Pi^{(\ell)}(\Phi;0,\infty) \tag{3.54}$$

se è possibile ottenere $\bar{\Delta}^{(\ell)}(\Phi;0,\infty) = 0$ per ogni $\ell \geq 1$. Questo assicura che le correzioni quantistiche all'azione fisica siano simmetriche,

$$\delta\Gamma^{(\ell)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma^{(\ell)}(\Phi + \delta\Phi) = \Gamma^{(\ell)}(\Phi). \tag{3.55}$$

[4] Si noti che anche le simmetrie di gauge non abeliane sono lineari sui campi A, ψ e $\bar{\psi}$. Dunque la trattazione si applica anche alla QCD nelle gauge fisiche, prive di ghost, come la gauge assiale. Per un'analisi specifica si veda il recente preprint [52].

Per ricavare la forma esplicita del termine $\bar{\Delta}$ adottiamo tecniche funzionali partendo dal funzionale generatore tagliato

$$Z(J;\Lambda,\Lambda_0)=\int[d\Phi]\exp(\frac{i}{2}\tilde{\Phi}R_{\Lambda\Lambda_0}\Phi+iS_0(\Phi;\Lambda_0)+i\tilde{J}\Phi). \qquad (3.56)$$

Vogliamo scrivere le identità di Ward corrispondenti alle trasformazioni [5]

$$\delta_{\Lambda_0}\Phi^I(p)=K_{0\Lambda_0}(p)\delta\Phi^I(p). \qquad (3.57)$$

Con tecniche standard[6] dalla rappresentazione integrale (3.56) si ottiene

$$0=\int[d\Phi]e^{\frac{i}{2}\tilde{\Phi}R_{\Lambda\Lambda_0}\Phi+iS_0(\Phi,J;\Lambda_0)}\left[\frac{\delta}{\delta\Phi^A}\delta_{\Lambda_0}\Phi^A+i\delta_{\Lambda_0}S_0+\right.$$

$$\left.+i\mathrm{STr}R_{\Lambda\Lambda_0}K_{0\Lambda_0}(A\Phi+b)\tilde{\Phi}+i\tilde{J}K_{0\Lambda_0}(A\Phi+b)\right]=$$

$$i\mathrm{STr}\left[R_{\Lambda\Lambda_0}K_{0\Lambda_0}\left(A\frac{\delta}{\delta i\tilde{J}}+b\right)\frac{\delta Z}{\delta iJ}\right]+i\tilde{J}K_{0\Lambda_0}\left(A\frac{\delta}{\delta i\tilde{J}}+b\right)Z+iZ\Delta_W \qquad (3.58)$$

con

$$\Delta_W\equiv<\delta_{\Lambda_0}S_0-i\frac{\delta}{\delta\Phi^A}\delta_{\Lambda_0}\Phi^A>_{\Lambda\Lambda_0}(J;\Lambda,\Lambda_0). \qquad (3.59)$$

Passando al funzionale $W=-i\log Z$ si ha

$$0=i\mathrm{STr}R_{\Lambda\Lambda_0}K_{0\Lambda_0}\left[A\left(i\frac{\delta}{\delta i\tilde{J}}\frac{\delta W}{\delta iJ}-\frac{\delta W}{\delta i\tilde{J}}\frac{\delta W}{\delta iJ}\right)+b\frac{\delta W}{\delta J}\right]$$

$$+i\tilde{J}K_{0\Lambda_0}\left(A\frac{\delta W}{\delta\tilde{J}}+b\right)+i\Delta_W \qquad (3.60)$$

---

[5]L'inserzione della funzione di taglio ultravioletta nella (3.57) serve a rendere ben definita la "divergenza"

$$-i\frac{\delta}{\delta\phi^A}\delta_{\Lambda_0}\phi^A=-i(K_{0\Lambda_0}A)^A_A=-i\int_p K_{0\Lambda_0}(p)A^I_I(p,-p)$$

che comparirà nella deduzione seguente; ad esempio in QED il termine di divergenza è nullo: $-i\int_p 4ie\cdot K_{0\Lambda_0}(p)\tilde{f}(0)-4ieK_{0\Lambda_0}(p)\tilde{f}(0)=0$.

[6]Il trucco che si usa è estendere all'integrale funzionale la proprietà degli integrali ordinari

$$\int d^dx'f(x')-\int d^dxf(x)=\int d^dx\ \frac{\partial}{\partial x^i}\delta x^if+\delta x^i\frac{\partial}{\partial x^i}f=\int d^dx\ \frac{\partial}{\partial x^i}(\delta x^if)=0,$$

valida per ogni trasformazione $x'=x+\delta x$, a patto che $f(x)$ sia sufficientemente regolare all'infinito.

e il funzionale Γ soddisfa la relazione

$$i\Delta_\Gamma = \mathrm{STr} R_{\Lambda\Lambda_0} K_{0\Lambda_0} \left[A\left(-\Gamma^{-1}_{\tilde{\Phi}\Phi} + i\Phi\tilde{\Phi} \right) + ib\tilde{\Phi} \right] - i\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi} K_{0\Lambda_0}(A\Phi + b) \tag{3.61}$$

con

$$\Delta_\Gamma(\Phi;\Lambda,\Lambda_0) \equiv \Delta_W(J(\Phi);\Lambda,\Lambda_0), \quad J(\Phi) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde{\Phi}}. \tag{3.62}$$

Ridefinendo come al solito $\Pi(\Phi) = \Gamma(\Phi) - \frac{1}{2}\tilde{\Phi} R_{\Lambda\Lambda_0}\Phi$ e usando la (3.22) e la (3.61) si riscrive nella forma

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\Phi}\delta_{\Lambda_0}\Phi = i\mathrm{STr}\Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0} K_{0\Lambda} A \Gamma^{-1}_{\tilde{\Phi}\Phi} + \Delta_\Gamma \tag{3.63}$$

o anche, usando l'espressione (3.35) e trascurando un termine indipendente dai campi che non contribuisce ai vertici propri,

$$\delta_{\Lambda_0}\Pi = \Delta_\Gamma - i\mathrm{STr}\Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0} K_{0\Lambda} A \Gamma_2^{-1} \bar{\Gamma}_{\tilde{\Phi}\Phi} \Gamma_2^{-1}. \tag{3.64}$$

L'identità funzionale (3.64) descrive come cambia l'azione effettiva $\Pi(\Phi;\Lambda,\Lambda_0)$ per trasformazioni lineari. Si vede immediatamente che l'azione fisica, ottenuta nei limiti $\Lambda \to 0$ e $\Lambda_0 \to \infty$, soddisfa l'identità di Ward-Takahashi tradizionale [39]

$$\delta\Gamma = \Delta_\Gamma, \tag{3.65}$$

quindi per capire se la simmetria può essere trasportata all'azione fisica è necessario studiare il termine di rottura Δ_Γ.

3.4 Generalità sulla procedura di fine tuning

Nel formalismo del $\Lambda-$RG la maniera più efficiente per studiare il termine di rottura (3.62) è osservare che esso corrisponde all'inserzione di un operatore composto e pertanto soddisfa un'equazione di evoluzione lineare del tipo

$$\Lambda\partial_\Lambda\Delta_\Gamma = M\Delta_\Gamma. \tag{3.66}$$

Dunque Δ_Γ è completamente individuato dalle condizioni al contorno sui suoi coefficienti rilevanti δ_r, che sono in numero finito (le condizioni al contorno sui coefficienti irrilevanti sono le usuali $\Pi^{(\ell)}_{irr}|_{\Lambda=\Lambda_0} \equiv 0$).

Per annullare Δ_Γ è sufficiente annullare i coefficienti δ_r a qualche scala Λ_R (proprietà di *località* [16, 18]). Scrivendo la (3.66) nella forma perturbativa,

$$\dot{\Delta}^{(\ell+1)}_\Gamma = (M\Delta_\Gamma)^{(\ell)}. \tag{3.67}$$

è anche immediato verificare il *principio dell'azione quantistica* [85, 96]: se $\Delta_\Gamma^{(\ell')}$ è nullo per $\ell' = 0, 1, \ldots, \ell$ (o al massimo è lineare nei campi), allora $\Delta_\Gamma^{(\ell+1)}$ è indipendente da Λ e quindi locale [16, 18],

$$\Delta_\Gamma^{(\ell+1)} = \Delta_{\Gamma,rel}^{(\ell+1)} = \sum_r \int_x \delta_r^{(\ell+1)} \Delta_r(x). \tag{3.68}$$

Questa proprietà è essenziale per capire se la simmetria dell'azione classica può recuperata per l'azione quantistica oppure no. Chiaramente la simmetria è recuperabile se tutti i $\delta_r^{(\ell+1)}$ possono essere messi a zero (proprietà di *risolubilità*). Per studiare la proprietà di risolubilità le prescrizioni a momenti nulli sono molto vantaggiose. Infatti in questo schema è possibile instaurare una corrispondenza tra i coefficienti rilevanti non invarianti ρ_i che entrano in $\delta(\Pi_{rel})$ e i coefficienti rilevanti δ_r che definiscono Δ_{rel}. Se vale la proprietà di risolubilità la corrispondenza è biunivoca ed è possibile annullare tutti i δ_r fissando opportunamente le condizioni al contorno per i coefficienti rilevanti non invarianti ρ_i. La tecnica per studiare la proprietà di risolubilità è ben nota in letteratura [96] e consiste nel determinare la forma più generale possibile per il funzionale $\Delta_{\Gamma,rel}$, tenendo conto che deve soddisfare delle opportune condizioni di consistenza di Wess-Zumino [87]. In questo modo si determina il numero dei parametri δ_r indipendenti. Se tale numero è pari al numero dei coefficienti non invarianti ρ_i è possibile risolvere equazioni di fine-tuning

$$\delta_r(\rho_i) = 0. \tag{3.69}$$

Se invece vi sono più coefficienti δ_r che parametri liberi ρ_i la simmetria non può essere recuperata e compare un'anomalia. Lo studio delle condizioni di consistenza e quindi della proprietà di risolubilità è puramente algebrico e del tutto indipendente dalla regolarizzazione utilizzata ed è stato ampiamente trattato nella letteratura [97] per praticamente tutte le teorie di interesse fisico, classicando completamente tutte le possibili anomalie in termini di classi di coomologia. In particolare la QED e la QCD sono prive di anomalie. Nel seguito dimostreremo che in questi casi $\Delta_\Gamma^{(\ell)}$ si può annullare a tutti gli ordini $\ell \geq 1$ e quindi la simmetria classica può essere recuperata sull'azione fisica $\Gamma^{(\ell)}(\Phi; 0, \infty)$.

Nota: usando il punto di sottrazione μ i coefficienti δ_i vengono a dipendere anche da alcuni dei coefficienti irrilevanti di Π_{irr} e la proprietà di risolubilità non è più una conseguenza automatica delle condizioni di consistenza. Tuttavia nei casi interessanti (per le teorie di Yang-Mills si veda [16, 125]) è ancora possibile annullare i δ_r ordine per ordine in $\hbar$.

3.4.1 Procedura di fine tuning a un loop

Per studiare il funzionale Δ_Γ conviene riscrivere la (3.63) nella forma

$$\Delta_\Gamma = \bar{\Delta}_\Gamma + \hat{\Delta}_\Gamma = \delta_{\Lambda_0}\Pi + i\mathrm{STr}\Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}K_{0\Lambda}A\Gamma_2^{-1}\bar{\Gamma}_{\tilde{\Phi}\Phi}\Gamma_2^{-1}. \tag{3.70}$$

Al primo ordine perturbativo il termine $\delta_{\Lambda_0}\Pi^{(1)}$ è dato dell'equazione di evoluzione,

$$\delta_{\Lambda_0}\Pi^{(1)} = \delta_{\Lambda_0}\Pi^{(1)}_{rel}|_{\Lambda=\Lambda_R} + \int_{\Lambda_R}^{\Lambda}\frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1}\delta_{\Lambda_0}I^{(0)}_{rel} - \int_{\Lambda}^{\Lambda_0}\frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1}\delta_{\Lambda_0}I^{(0)}_{irr} \tag{3.71}$$

ed è ben definito anche nel limite $\Lambda_0 \to \infty$ grazie alla proprietà di rinormalizzabilità. Si noti che $\delta\Pi^{(1)}_{rel}|_{\Lambda=\Lambda_R}$ contiene i parametri rilevanti non invarianti $\rho_i(\Lambda_R)$ che non sono fissati dalle prescrizioni di rinormalizzazione usuali.

Il termine $\hat{\Delta}^{(1)}_\Gamma$ per $\Lambda_0 \to \infty$ è dato esplicitamente dalla formula

$$\hat{\Delta}^{(1)}_\Gamma = i\mathrm{STr}K_{0\Lambda}A\Delta_{\Lambda\infty}\bar{\Gamma}^{(0)}_{\tilde{\Phi}\Phi} \tag{3.72}$$

ed è un termine di superficie, cioè un integrale di Feynman in cui compaiono prodotti della funzione di taglio ultravioletta $K_{0\Lambda}$ con funzioni di taglio infrarosse $K_{\Lambda\infty}$. Un oggetto di questo tipo è per costruzione privo di divergenze ultraviolette ed infrarosse, in quanto essenzialmente la regione di integrazione è ristretta alla sfera $d-1$ dimensionale $q^2 = \Lambda^2$ (da cui il nome integrale di superficie).

Siccome al tree level per ipotesi $\Delta^{(0)}_\Gamma$ è lineare nei campi, l'equazione di evoluzione (3.67) assicura che a un loop la somma $\bar{\Delta}^{(1)}_\Gamma + \hat{\Delta}^{(1)}_\Gamma$ sia indipendente dalla scala Λ. Di conseguenza può essere valutata ad ogni scala Λ. Ci sono due possibilità convenienti: lavorare alla scala ultravioletta $\Lambda = \Lambda_R$ oppure alla scala fisica $\Lambda = 0$.

1. Procedura di fine tuning a $\Lambda = \Lambda_R$.

   In teorie a massa nulla il limite $\Lambda = 0$ è delicato ed è più conveniente fissare i coefficienti non invarianti alla scala $\Lambda_R \neq 0$. È utile svolgere il calcolo a grandi $\Lambda = \Lambda_R$, regime in cui contano solo i termini rilevanti.

   Possono capitare due cose, a seconda delle proprietà algebriche della teoria [7]:

   (a) Il termine $\hat{\Delta}^{(1)}_\Gamma$ può venire perfettamente cancellato dal termine $\delta\Pi^{(1)}$ e si può ottenere $\Delta^{(1)}_\Gamma = 0$.

[7] Se la teoria è risolubile ogni funzionale che soddisfa le condizioni di consistenza (in particolare Δ_Γ e $\hat{\Delta}_\Gamma$ le soddisfano come conseguenza della (3.65) e della (3.64) a $\Lambda_0 \to \infty$) è equivalente ad una variazione δX. Tutta la trattazione può essere riformulata come un problema coomologico [102].

(b) Il termine $\hat{\Delta}_\Gamma^{(1)}$ non può venire completamente cancellato dal termine $\delta\Pi^{(1)}$ e risulta inevitabilmente $\Delta_\Gamma^{(1)} \neq 0$.

Nel primo caso $\hat{\Delta}_\Gamma^{(1)}$ si può scrivere come variazione di un qualche funzionale e $\Delta_\Gamma^{(1)}$ si può annullare specificando le seguenti condizioni al contorno sui termini rilevanti non invarianti $\rho_i^{(1)}(\Lambda_R)$ (condizioni di fine-tuning),

$$\delta\Pi^{(1)}\big|_{\Lambda=\Lambda_R} = -\hat{\Delta}_\Gamma^{(1)}, \qquad (\Lambda_R \to \infty) \tag{3.73}$$

nel secondo caso il termine di superficie contiene delle strutture in più che non si possono esprimere come variazione di un funzionale e compare l'anomalia (rimandiamo a [45, 50] per un calcolo esplicito).

2. Procedura di fine tuning a $\Lambda = 0$.

   In teorie massive si può lavorare anche a $\Lambda = 0$ e in questo caso l'identità di Ward generalizzata (3.70) assume la forma usuale. Dunque le simmetrie non anomale possono essere recuperate a un loop (e in realtà a tutti i loop) con un fine tuning banale, cioè imponendo che tutti i termini rilevanti non invarianti siano nulli alla scala fisica:

$$(\delta\Gamma^{(1)})_{rel} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_i^{(1)}|_{\Lambda=0} = 0. \tag{3.74}$$

   Ciò è possibile perchè si usano le prescrizioni a momenti nulli (in particolare in QED è possibile utilizzare le prescrizioni a momenti nulli perchè la massa dell'elettrone agisce da cutoff infrarosso).

3.4.2 Procedura di fine tuning a tutti i loop

Usando l'equazione di evoluzione si prova facilmente che se non vi sono anomalie allora $\Delta_\Gamma^{(\ell)}$ è identicamente nullo ad ogni ordine perturbativo $\ell \geq 1$. La dimostrazione si basa sul principio dell'azione quantistica (3.68) ed è la seguente. Sia $\Delta_\Gamma^{(\ell)}$ nullo fino al loop ℓ (ipotesi induttiva); allora al loop $\ell+1$ vale l'equazione di evoluzione

$$\Lambda\partial_\Lambda \Delta_\Gamma^{(\ell+1)} = 0 \tag{3.75}$$

e pertanto $\Delta_\Gamma^{(\ell+1)}$ è indipendente da Λ ed è fissato da un numero finito di coefficienti rilevanti. Siccome non vi sono anomalie, questi coefficienti sono tutti annullabili modificando opportunamente le condizioni al contorno dei coefficienti rilevanti non invarianti $\rho_i^{(\ell+1)}(\Lambda)$, cioè risolvendo l'equazione di fine tuning (3.73) (se si lavora a $\Lambda = \Lambda_R$) o l'equazione (3.74) (se si lavora a $\Lambda = 0$). Dunque l'ipotesi induttiva è verificata al loop $\ell+1$ e quindi sempre.

3.5 Applicazione alla QED

Come esempio di applicazione del formalismo generale appena descritto consideriamo la trattazione della QED in gauge covariante. In questo caso l'azione al tree level ha la forma (nel seguito il limite $\Lambda_0 \to \infty$ sarà per lo più sottointeso)

$$\Pi^{(0)}(A,\psi,\bar{\psi}) = \int_x -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2a}(\partial\cdot A)^2 + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - m)\psi \tag{3.76}$$

e soddisfa le identità di Ward-Takahashi (3.52). Dalla (3.76) si estraggono le regole di Feynman della teoria: i propagatori del fotone e dell'elettrone si ottengono invertendo le funzioni di Green $\Pi^{(0)}_{\mu\nu}$ e $\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}$ con la prescrizione di Feynman $+i\varepsilon$,

$$\Pi^{(0)}_{\mu\nu}(k)^{-1} = D_{\mu\nu}(k) = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} - (1-a)\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+i\varepsilon)^2}, \tag{3.77}$$

$$\Pi^{(0)}_{\alpha\beta}(p)^{-1} = -S_{\alpha\beta}(p) = -\frac{(p\!\!\!/ + m)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2+i\varepsilon}, \tag{3.78}$$

mentre il vertice di interazione è dato dalla formula

$$\Pi^{(0)}_{\mu}(p,p') = e\gamma_\mu. \tag{3.79}$$

A questo punto è possibile scrivere in forma esplicita le equazioni di evoluzione a un loop, che in generale sono date dalla formula

$$\Lambda\partial_\Lambda\Pi^{(1)}_{n_A,2n_\psi} = I^{(0)}_{n_A,2n_\psi} = \frac{i}{2}\mathrm{STr}\dot{\Delta}_{\Lambda\Lambda_0}\bar{\Gamma}^{(0)}_{\tilde{\Phi}\Phi,n_A,2_n\psi}, \tag{3.80}$$

in cui $\Pi_{n_A,2n_\psi}$ indica il vertice proprio ottenuto derivando rispetto al campo A per n_A volte e rispetto a ψ e $\bar{\psi}$ rispettivamente per n_ψ ed n_ψ volte. Usando la formula ricorsiva (3.37) per $\bar{\Gamma}^{(0)}_{\tilde{\Phi}\Phi}$ si ricava

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}^{(1)}_{\mu\nu} &= I^{(0)}_{\mu\nu} = \Lambda\partial_\Lambda i\int_q \mathrm{Tr}[\gamma_\mu S_{\Lambda\Lambda_0}(q)\gamma_\nu S_{\Lambda\Lambda_0}(q+p)]e^2 && \text{(3.81a)}\\
\dot{\Pi}^{(1)}_{\alpha\beta} &= I^{(0)}_{..} = \Lambda\partial_\Lambda i\int_q \left[D_{\Lambda\Lambda_0}(q)^{\mu\nu}\gamma_\nu S_{\Lambda\Lambda_0}(q+p)\gamma_\mu e^2\right]_{\alpha\beta} && \text{(3.81b)}\\
\dot{\Pi}^{(1)}_{\mu} &= I^{(0)}_{\mu} = \Lambda\partial_\Lambda i\int_q \gamma_\nu D_{\Lambda\Lambda_0}(q)^{\nu\rho}\gamma_\mu S_{\Lambda\Lambda_0}(q+p)\gamma_\rho S_{\Lambda\Lambda_0}(q+p')e^3 && \text{(3.81c)}\\
\dot{\Pi}^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} &= I^{(0)}_{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_{6\ perm}\Lambda\partial_\Lambda i\int_q \mathrm{Tr}[\gamma_\mu S_{\Lambda\Lambda_0}(q)\gamma_\nu S_{\Lambda\Lambda_0}(q+p_1)\gamma_\rho \\
&\cdot\ S_{\Lambda\Lambda_0}(q+p_1+p_2)\gamma_\sigma S_{\Lambda\Lambda_0}(q+p_1+p_2+p_3)]e^4 && \text{(3.81d)}
\end{aligned}$$

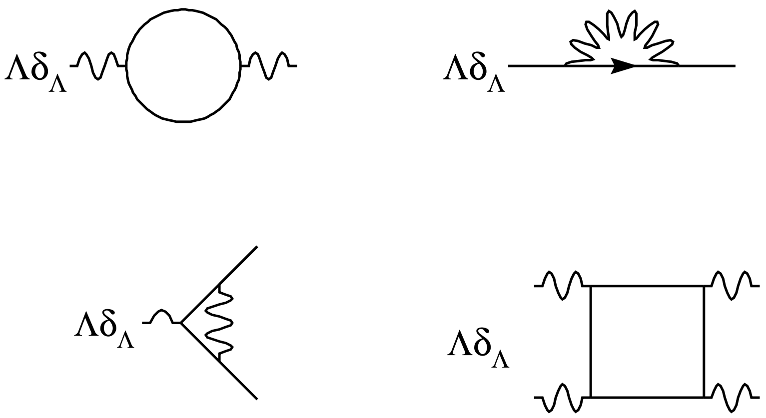


Figura 3.1: Rappresentazione grafica del membro di destra delle equazioni di evoluzione (3.81). Le derivate $\Lambda\delta_\Lambda$ agiscono sulle funzioni di taglio $K_{\Lambda\Lambda_0}(q)$ che si trovano nei propagatori, rendendo finiti i diagrammi di Feynman.

Nel secondo membro delle (3.81) si leggono le derivate dei diagrammi di Feynman a un loop con due, tre e quattro gambe esterne (figura 3.5). Le equazioni di evoluzione per le funzioni di Green con più gambe esterne si ottengono in maniera analoga. Le equazioni si risolvono fissando le condizioni al contorno ed esprimendo le (3.81) in forma integrale; interando la procedura è possibile in principio ricavare $\Pi^{(\ell)}(A,\psi,\bar\psi)$ a tutti gli ordini perturbativi. Per quanto si è detto in precedenza la validità delle identità di Ward usuali alla scala $\Lambda = 0$ è assicurata a tutti gli ordini se si fissano identicamente a zero i coefficienti rilevanti non invarianti alla scala $\Lambda = 0$.

Come esercizio nel seguito studieremo l'evoluzione dei parametri rilevanti al primo ordine di approssimazione e nel regime asintotico $\Lambda \to \infty$, ricavando le funzioni β e γ del gruppo di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low.

3.6 Estrazione dei parametri rilevanti

Definiamo la parte rilevante dell'azione effettiva tagliata $\Pi(\Phi;\Lambda,\Lambda_0)$ tramite lo sviluppo di Taylor

$$\begin{aligned}\Pi_{rel}(\Phi;\Lambda,\Lambda_0) = &\int_k -\frac{1}{2}A_\mu(-k)(k^2 g^{\mu\nu}\Pi_A + g^{\mu\nu}\Pi_M + k^\mu k^\nu \Pi_\xi)A_\nu(k)\\ &+\int_p \bar\psi(p)(\not p\Pi_\psi - \Pi_m)\psi(p) + \int_x \Pi_e \bar\psi \not A\psi + \frac{1}{8}\Pi_\lambda (A_\mu A^\mu)^2\end{aligned} \tag{3.82}$$

in cui i coefficienti rilevanti sono dati esplicitamente dalle formule

$$\Pi_A \equiv -\partial_{p^2}\tfrac{1}{3}t^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}|_0, \quad \Pi_\psi \equiv \frac{1}{16}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_{p^\mu}\Pi_{\beta\alpha}|_0, \tag{3.83a}$$

$$\Pi_M \equiv -\tfrac{1}{3}t^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}|_0, \quad \Pi_m \equiv -\frac{1}{4}\Pi_{\beta\beta}|_0, \tag{3.83b}$$

$$\Pi_\xi \equiv \tfrac{1}{3}\partial_{p^2}s^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}|_0, \quad \Pi_e \equiv \frac{1}{16}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\Pi_\mu)|_0, \tag{3.83c}$$

$$\Pi_\lambda \equiv \tfrac{1}{72}s^{\mu\nu\rho\sigma}\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}|_0 \tag{3.83d}$$

dove

$$s_{\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu} - 4p_\mu p_\nu/p^2 \tag{3.84a}$$

$$s^{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma}. \tag{3.84b}$$

Analogamente definiamo la parte rilevante di ogni funzionale $I(\Phi;\Lambda,\Lambda_0)$ con gli stessi numeri quantici di Π.
Si noti che al tree level i parametri rilevanti si scrivono

$$\Pi_A^{(0)} = 1, \quad \Pi_\psi^{(0)} = 1, \quad \Pi_M^{(0)} = 0, \quad \Pi_m^{(0)} = m, \tag{3.85a}$$

$$\Pi_\xi^{(0)} = 1/a - 1, \quad \Pi_e^{(0)} = e, \quad \Pi_\lambda^{(0)} = 0. \tag{3.85b}$$

I parametri rilevanti alla scala ultravioletta $\Pi_i(\Lambda_0)$ si possono interpretare come costanti bare e sono più comuni le notazioni

$$Z_3 = \Pi_A(\Lambda_0),\ Z_2 = \Pi_\psi(\Lambda_0),\ Z_m m = \Pi_m(\Lambda_0),\ Z_1 e = \Pi_e(\Lambda_0) \tag{3.86}$$

o anche

$$e_0 = \frac{\Pi_e}{\Pi_A^{1/2}\Pi_\psi}, \quad \frac{1}{a_0} = \frac{\Pi_A + \Pi_\xi}{\Pi_A}, \quad m_0 = \frac{\Pi_m}{\Pi_\psi}. \tag{3.87}$$

3.7 Identità di Ward e $\mu-$RG

Prima di svolgere il calcolo delle funzioni del gruppo di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low è utile dare qualche precisazione sul rapporto tra simmetrie e $\mu-$RG. Evidentemente nel formalismo del $\Lambda-$RG l'azione ultravioletta non ha la stessa forma dell'azione di partenza e non soddisfa le identità di Ward-Takahashi usuali. Tuttavia i termini non invarianti non sono indipendenti, ma sono fissati dall'identità di Ward generalizzata (3.63). In particolare al primo ordine il termine di rottura delle identità di Ward è il termine di superficie (3.72). Ciò significa che le relazioni sulle costanti bare adimensionali imposte dalle identità di Ward ordinarie, come per esempio l'usuale $Z_1 = Z_2$, sono rotte ad un loop solo per termini finiti[8]; nelle nostre notazioni ciò significa

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \Pi_e^{(1)} - e\Pi_\psi^{(1)} = O(1). \tag{3.88}$$

Come conseguenza vi sono delle relazioni precise tra le funzioni del gruppo di rinormalizzazione. Queste possono essere determinate in generale con il ragionamento seguente. Consideriamo un cambio di prescrizioni $\mu \to \mu'$

$$\begin{gathered} A' = z_A^{1/2} A, \quad \psi' = z_\psi^{1/2}\psi, \quad \bar\psi' = z_\psi^{1/2}\bar\psi, \\ e' = z_e e, \quad a' = z_a a, \quad m' = z_m m; \end{gathered} \tag{3.89}$$

il riscalamento (3.89) è compatibile con le identità di Ward se l'azione rinormalizzata alla scala μ'

$$S_{R'}(A,\psi,\bar\psi;e,a,m) = S_R(z_A^{-1/2}A, z_\psi^{-1/2}\psi, z_\psi^{-1/2}\bar\psi; z_e^{-1}e, z_a^{-1}a, z_m^{-1}m) \tag{3.90}$$

soddisfa la stessa identità di Ward dell'azione rinormalizzata alla scala μ,

$$WS_{R'} = WS_R = \frac{\Box}{a}\partial\cdot A. \tag{3.91}$$

Questa richiesta impone i vincoli

$$a' = z_A a, \quad e' = e/z_A^{1/2} \tag{3.92}$$

cioè $z_a = z_A$ e $z_e = z_A^{-1/2}$ e quindi

$$\beta_a(a,e) = \mu' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu'} a' \bigg|_{\mu'=\mu} = -2a\gamma_A(e^2), \tag{3.93}$$

$$\beta_e(e) = \mu' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu'} e' \bigg|_{\mu'=\mu} = e\gamma_A(e^2). \tag{3.94}$$

Le dimensioni anomale sono definite da

$$\gamma_A(e^2) = \mu' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu'} \log z_A^{-1/2} \bigg|_{\mu'=\mu}, \tag{3.95}$$

$$\gamma_\psi(e^2,a) = \mu' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu'} \log z_\psi^{-1/2} \bigg|_{\mu'=\mu}. \tag{3.96}$$

Se le funzioni β_i e γ_i vengono estratte dall'equazione di evoluzione asintotica attraverso le (2.45) e (2.48), siccome la simmetria di gauge ad un loop è rotta solo dal termine di superficie (3.72) le relazioni (3.93) e (3.94) continuano a valere. Lo verifichiamo qui di seguito con qualche conto esplicito.

[8] Le relazioni sulle costanti di dimensione $D > 0$, invece sono rotte per termini $c\Lambda^D$; per esempio la massa bare del fotone non è nulla e anzi diverge come $c\Lambda^2$. Se si ragiona al loop $\ell > 1$, le relazioni tra le costanti bare vengono rotte per termini logaritmici sottodominanti del tipo $c\Lambda^D(\log\Lambda/\mu)^{\ell-1}$, in quanto il termine di superficie $\hat\Delta_\Gamma^{(\ell)}$ è costruito a partire dall'azione rilevante ai loop $\ell' \leq \ell - 1$.

3.8 Evoluzione dei parametri rilevanti

In questa sezione studiamo le equazioni di evoluzione nel regime asintotico[9] $\Lambda \to \infty$, in cui intervengono solo i parametri rilevanti. Usando la funzione di taglio a gradino si ottiene, nell'approssimazione ad un loop,

$$\dot{\Pi}_A^{(1)} = \tfrac{-2\alpha}{3\pi}, \quad \dot{\Pi}_M^{(1)} = -\tfrac{\alpha\Lambda^2}{\pi}, \quad \dot{\Pi}_\xi^{(1)} = \tfrac{2\alpha}{3\pi}, \quad \dot{\Pi}_\psi^{(1)} = \tfrac{\alpha}{2\pi}a, \tag{3.97a}$$
$$\dot{\Pi}_m^{(1)} = \tfrac{m\alpha}{2\pi}(3+a), \quad \dot{\Pi}_e^{(1)} = \tfrac{\alpha}{2\pi}ea, \quad \dot{\Pi}_\lambda^{(1)} = 0, \quad \alpha = \tfrac{e^2}{4\pi}. \tag{3.97b}$$

Si noti che i risultati per le quantità adimensionali sono indipendenti dalla scelta della funzione di taglio, come si può dimostrare utilizzando le tecniche sviluppate nel secondo capitolo.

3.8.1 Calcolo delle funzioni del gruppo di rinormalizzazione

Calcoliamo ora le funzioni del gruppo di rinormalizzazione ad un loop. Lavoriamo nello schema di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low, prendendo un punto di sottrazione $\mu >> m$. Usando le relazioni (2.45) e (2.48), si ottiene

$$\gamma_A^{(1)}(\alpha) = -\frac{1}{2}\dot{\Pi}_A^{(1)} = \frac{\alpha}{3\pi}, \quad \gamma_\psi^{(1)}(\alpha, a) = -\frac{1}{2}\dot{\Pi}_\psi^{(1)} = -\frac{\alpha}{4\pi}a. \tag{3.98}$$

Si noti che la dimensione anomala dell'elettrone dipende dal parametro di gauge fixing, mentre invece la dimensione anomala del fotone è gauge-indipendente. Per calcolare le funzioni β_e e β_a tramite la (2.45) è necessario calcolare la derivata rispetto a $\Lambda\partial_\Lambda$ delle costanti bare (3.87). Si ottiene, sottointendendo il limite $\Lambda \to \infty$,

$$\beta_e^{(1)}(e) = \dot{e}_0^{(1)} = \quad \dot{\Pi}_e^{(1)} - \tfrac{1}{2}e\dot{\Pi}_A^{(1)} - e\dot{\Pi}_\psi^{(1)} = \quad e\gamma_A^{(1)}, \tag{3.99a}$$
$$\beta_a^{(1)}(e, a) = \dot{a}_0^{(1)} = \quad -a^2(\dot{\Pi}_A^{(1)} + \dot{\Pi}_\xi^{(1)}) + a\dot{\Pi}_A^{(1)} = \quad -2a\gamma_A^{(1)}. \tag{3.99b}$$

In particolare la funzione $\beta_\alpha = \beta_e \frac{\partial\alpha}{\partial e} = \frac{\beta_e e}{2\pi}$ assume il valore

$$\beta_\alpha^{(1)} = \frac{2}{3\pi}\alpha^2 \tag{3.100}$$

ed è indipendente dal parametro di gauge fixing. Invece la funzione β_a assume il valore

$$\beta_a^{(1)}(a, \alpha) = a\dot{\Pi}_A^{(1)} = -2a\frac{\alpha}{3\pi} \leq 0. \tag{3.101}$$

Si noti che in questa approssimazione la gauge di Landau $a = 0$ è un punto fisso ultravioletto stabile, nel senso che $a(\mu) \to 0$ per $\mu \to \infty$.

[9] Il limite $\Lambda \to \infty$ viene preso *dopo* aver rimosso il cutoff ultravioletto $\Lambda_0 \to \infty$.

3.9 Calcolo delle parti irrilevanti

Nella sezione precedente abbiamo calcolato le costanti rilevanti per grandi Λ, a meno di termini finiti; vogliamo ora calcolare i vertici propri irrilevanti per $\Lambda = 0$, cioè i vertici fisici. Questi si possono ricavare in termini di integrali di Feynman sottratti. Le parti irrilevanti delle funzioni a due punti sono

$$\Pi_{\mu\nu,irr}(k) = \Pi_{\mu\nu}(k) - \left[\frac{1}{3}t^{\rho\sigma}\Pi_{\rho\sigma}(\bar{k})\right]_{\bar{k}=0} g_{\mu\nu} - \left[\frac{1}{3}\partial_{\bar{k}^2}(t^{\rho\sigma}\Pi_{\rho\sigma}(\bar{k}))\right]_{\bar{k}=0} k^2 g_{\mu\nu}$$

$$+\frac{1}{3}\left[\partial_{\bar{k}^2}s^{\rho\sigma}\Pi_{\rho\sigma}(\bar{k})\right]_{\bar{k}=0} k_\mu k_\nu \tag{3.102}$$

e

$$\Pi_{\alpha\beta,irr}(p) = \Pi_{\alpha\beta}(p) - \Pi_{\alpha\beta}(\bar{p})\big|_{\bar{p}=0} - p_\mu \left.\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\mu}\Pi_{\alpha\beta}(\bar{p})\right|_{\bar{p}=0}. \tag{3.103}$$

Le parti irrilevanti del vertice $e^+e^-\gamma$ e del vertice a quattro fotoni sono rispettivamente

$$\Pi_{\mu\alpha\beta,irr}(p,p') = \Pi_{\mu\alpha\beta}(p,p') - \Pi_{\mu\alpha\beta}(0,0) \tag{3.104}$$

e

$$\Pi_{\mu\nu\rho\sigma,irr}(p,q,r) = \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}(p,q,r) - \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}(0,0,0). \tag{3.105}$$

Per semplicità ci restringeremo al calcolo dei propagatori.
Il propagatore del fotone a $\Lambda = 0$ è definito dall'integrale sottratto

$$\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(p) = \mathcal{F}_{\mu\nu}(p;0,\infty) - \mathcal{F}_{\mu\nu,rel}(p;0,\infty) \tag{3.106}$$

con

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(p;\Lambda,\Lambda_0) = i\int_q e^2 K_{\Lambda\Lambda_0}(q)K_{\Lambda\Lambda_0}(q+p)\cdot$$

$$\cdot\frac{g_{\mu\nu}(-8m^2+8p\cdot q+8q^2) - 8p_\mu q_\nu - 8q_\mu p_\nu - 16q_\mu q_\nu}{(q^2-m^2+i\varepsilon)((q+p)^2-m^2+i\varepsilon)}. \tag{3.107}$$

Per svolgere l'integrale conviene adottare la decomposizione

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_L\ell_{\mu\nu} + \mathcal{F}_T t_{\mu\nu} \tag{3.108}$$

da cui

$$\begin{aligned}\Pi_L^{(1)} &= \ell^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{(1)} = \mathcal{F}_L - p^2\partial_{p^2}\mathcal{F}_L|_0 - \mathcal{F}_T|_0, \\ \Pi_T^{(1)} &= \frac{1}{3}t^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{(1)} = \mathcal{F}_T - p^2\partial_{p^2}\mathcal{F}_T|_0 - \mathcal{F}_T|_0\end{aligned} \tag{3.109}$$

e un conto esplicito dà

$$\Pi_L^{(1)} = 0, \quad \Pi_T^{(1)} = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx 8q^2x(1-x)\log\frac{m^2 - q^2x(1-x)}{m^2}. \tag{3.110}$$

Si noti che la relazione $\Pi_L^{(\ell)} = 0$, alla scala fisica, vale identicamente a tutti gli ordini perturbativi in conseguenza delle identità di Ward.

Da $\Pi_T^{(1)}$ si estrae il comportamento della costante efficace definita nel capitolo 1. L'integrale (3.110) può essere completamente esplicitato in termini di funzioni elementari anche se qui non ci interessa farlo. Per i nostri scopi è sufficiente notare che nella regione profondamente euclidea ($-q^2 >> m^2$) $\Pi_T^{(1)}(q^2)$ assume la forma asintotica

$$\Pi_T^{(1)}(q^2) \to \frac{b_1}{2}q^2\log\frac{-q^2}{m^2} \tag{3.111}$$

dove $b_1 = 2\alpha/(3\pi)$ è il primo coefficiente della funzione β_α.

Per completezza riportiamo qualche cenno sul calcolo degli altri vertici. L'espressione del propagatore dell'elettrone, che per semplicità calcoliamo nella gauge di Feynman $\xi = 0$, ossia $a = 1$, è

$$\Pi^{(1)}(Q) = \int_0^1 dx\frac{x\not{Q} - 8m}{2}\log\frac{m^2(1-x) - Q^2x(1-x)}{m^2(1-x)}. \tag{3.112}$$

e può essere esplicitata in termini di funzioni elementari. Questo non si può fare per i vertici propri a tre o quattro punti $\Pi_\mu^{(1)}$ e $\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1)}$, che contengono integrali su due o tre parametri di Feynman e che al massimo possono essere espresse in termini di funzioni speciali (polilogaritmi) [152].

Capitolo 4

$\Lambda-$RG e risommazioni

In questo capitolo discutiamo il problema della risommazione della serie perturbativa e mostriamo come il gruppo di rinormalizzazione di Wilson, applicato alle teorie asintoticamente libere, permetta di definire una procedura di risommazione consistente e priva delle ambiguità dovute al polo di Landau infrarosso.

4.1 Il problema della risommazione della serie perturbativa

In genere una teoria fisica viene vista come perturbazione di una teoria ideale esattamente solubile. In particolare nel caso della teoria di campo la teoria interagente viene vista come perturbazione della teoria libera e il termine d'interazione viene moltiplicato per una piccola costante di accoppiamento $\alpha > 0$. È possibile calcolare le correzioni perturbative a tutti gli ordini in α poichè la teoria della rinormalizzazione assicura che esse sono ben definite a ogni ordine finito. Tuttavia il problema della risommazione della serie perturbativa resta completamente aperto, cioè l'esistenza della somma

$$F_{PT}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \alpha^{n+1} \tag{4.1}$$

dove $F_{PT}(\alpha)$ è una qualche quantità fisica estratta dalle funzioni di Green della teoria non è affatto assicurata. Questo problema (che non è nuovo: si presenta anche in fisica classica ed in meccanica quantistica) ha profonde implicazioni sia teoriche che pratiche. Sono possibili tre casi:

1. La serie perturbativa $F_{PT}(\alpha)$ converge in un dato cerchio nel piano complesso. In questo caso caso all'interno del raggio di convergenza la teoria delle perturbazioni è ben definita e permette di dare predizioni con precisione buona quanto si vuole, almeno in linea di principio.

2. La serie perturbativa diverge, tuttavia è possibile, con opportune tecniche di risommazione, definire $F_{PT}(\alpha)$ in maniera univoca in una certa regione del piano complesso. Anche in questo caso la teoria della perturbazioni funziona bene e la teoria è fisicamente predittiva con precisione in principio infinita.

3. La serie perturbativa diverge e non esistono tecniche di risommazione che permettono di definire $F_{PT}(\alpha)$ univocamente. In questo caso la teoria delle perturbazioni è inconsistente e presenta delle arbitrarietà ineliminabili che rendono impossibile dare predizioni significative oltre un certo grado di precisione.

Purtroppo in teoria di campo il terzo caso è quello tipico e la teoria delle perturbazioni appare inevitabilmente ambigua. A tutt'oggi non è chiaro se questo problema sia curabile oppure no. Quello che si sa per certo è che l'inconsistenza della teoria perturbativa non comporta necessariamente l'inconsistenza della teoria esatta. Per capire meglio questo punto conviene studiare un fenomeno analogo che avviene in meccanica quantistica in presenza di vuoti classici degeneri.

4.2 Un esempio di inconsistenza della teoria delle perturbazioni curabile

Consideriamo un semplice sistema quantistico, la doppia buca di potenziale, con azione euclidea[1] simmetrica per $q \to 1/\sqrt{\alpha} - q$

$$S_E(q,\alpha) = \int d\tau \; \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}q^2(1-\sqrt{\alpha}q)^2 \tag{4.2}$$

e funzione di partizione

$$Z(\alpha) = \lim_{\beta\to\infty} \mathrm{Tr}e^{-\beta H} = \int [dq]\exp[-S_E(q,\alpha)]. \tag{4.3}$$

La parte perturbativa di Z è per definizione la parte sviluppabile in serie di potenze

$$Z_{PT}(\alpha) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \alpha^{n+1}. \tag{4.4}$$

Studiando l'andamento agli alti ordini della serie perturbativa [113, 114], si ottiene la stima

$$Z_n \sim n! \tag{4.5}$$

[1]Nella (4.3) tutte le quantità sono state riscalate con la massa e rese adimensionali. La distanza tra i centri delle due buche è $d = 1/\sqrt{\alpha}$ e l'altezza della barriera è $1/(32\alpha)$.

e quindi la tecnica di risommazione usuale, basate sulla trasformata di Borel [123]

$$\tilde{Z}_{PT}(s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Z_n s^n \tag{4.6}$$

non permette di definire $Z_{PT}(g)$ univocamente. Il motivo è che le serie divergenti con $n!$, come per esempio

$$F_{PT}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{s_0^n} \alpha^{n+1}, \quad s_0 > 0, \tag{4.7}$$

hanno una trasformata di Borel che non è ben definita su tutto il semiasse reale positivo. Nell'esempio (4.7) la trasformata di Borel si ricava banalmente

$$\tilde{F}_{PT}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n / s_0^n = \frac{1}{1 - s/s_0} \tag{4.8}$$

e presenta un polo $s = s_0$ sul semiasse reale positivo della variabile coniugata s. Ciò fa sì che l'integrale di Borel (che permetterebbe di definire $F_{PT}(\alpha)$ se convergesse[2])

$$\int_0^\infty ds\ e^{-s/\alpha} \tilde{F}_{PT}(s) \tag{4.9}$$

sia mal definito. Tuttavia esso può essere regolarizzato mediante una opportuna prescrizione per aggirare il polo, ottenendo una quantità $F_{PT,reg}(\alpha)$ ben definita ma *complessa*. Nel caso in esame conviene usare la prescrizione $+i\varepsilon$,

$$F_{PT,+}(\alpha) = \int_0^\infty ds \frac{e^{-s/\alpha}}{1 - s/s_0 + i\varepsilon}; \tag{4.10}$$

ovviamente è anche possibile dare la prescrizione $-i\varepsilon$ e quindi vi è un'arbitrarietà proporzionale alla parte immaginaria di F_{PT}

$$\Delta F_{PT} = F_{PT,+} - F_{PT,-} = -2\pi i s_0 e^{-s_0/\alpha}. \tag{4.11}$$

L'arbitrarietà dipende dalle prescrizioni di regolarizzazione utilizzate; in ogni caso è del tipo (4.11), cioè non analitica in α e piccola nel regime di piccoli α: si tratta quindi di un quantità di tipo "non perturbativo".

[2] La Borel sommabilità di una funzione $F(\alpha)$, cioè la coincidenza tra $F(\alpha)$ e l'integrale di Borel (4.9) in un cerchio tangente all'origine del piano complesso e che biseca il semiasse reale positivo, dipende dall'andamento ai grandi ordini dello sviluppo perturbativo e dalla regione di analiticità di $F(\alpha)$. Per un'analisi dettagliata rimandiamo a [123, 124] e alla letteratura ivi citata. Un esempio di serie Borel sommabile è $\sum_{n=0}^{\infty} n!(-z)^n/s_0^n$, in cui il polo è sul semiasse reale *negativo* della variabile di Borel e l'integrale (4.9) è ben definito.

Si noti che in questo caso specifico [33] ci possiamo aspettare a priori che la teoria delle perturbazioni sia inconsistente perchè sappiamo che il vuoto quantistico esatto è unico e non degenere, mentre il vuoto perturbativo $q_{cl} = 0$ (oppure $q_{cl} = 1/\sqrt{\alpha}$) è degenere a tutti gli ordini. L'origine dell'arbitrarietà è stata completamente chiarita: la teoria delle perturbazioni attorno al vuoto classico trascura i contributi all'integrale funzionale dovuti alle configurazioni istantoniche[3], che sono essenziali nello studio della teoria completa. Si osserva [116] che la somma dei contributi non perturbativi è mal definita e va regolarizzata con una prescrizione opportuna. Ciò genera delle parti immaginarie. Si dimostra che esse cancellano esattamente le parti immaginarie generate dalla risommazione della serie perturbativa, e quindi sommando al risultato perturbativo il risultato non perturbativo si ottiene la corretta funzione di partizione fisica, reale e priva di arbitrarietà,

$$Z(\alpha) = Z_{PT}(\alpha) + Z_{NP}(\alpha) \ . \tag{4.12}$$

Che questo si possa fare è intuibile fin dall'inizio, in quanto la meccanica quantistica a finiti gradi di libertà è una teoria ben definita, nel senso che vi sono teoremi di esistenza della funzione di partizione $Z(\alpha)$ anche al di là della teoria delle perturbazioni. In generale quindi in meccanica quantistica le arbitrarietà della serie perturbativa danno un suggerimento sul settore non perturbativo della teoria, che deve essere tale da cancellarle.

Cercare di dare un'interpretazione analoga alle arbitrarietà che si incontrano in teorie di campo rinormalizzabili è molto più delicato. Infatti in questo contesto possono esistere altri meccanismi che danno luogo a poli nel semiasse positivo della variabile di Borel, oltre agli istantoni. Attualmente l'unica altra sorgente nota è costituita dai rinormaloni [120, 121, 126]. Si prova [115, 121] che sono le singolarità rinormaloniche che dominano l'andamento asintotico della serie perturbativa.

L'arbitrarietà dovuta ai rinormaloni potrebbe essere incurabile, cioè non cancellata da qualche effetto non perturbativo. Il motivo è che non esiste un teorema di esistenza della teoria di campo, ma anzi vi sono indicazioni contrarie. In particolare i rinormaloni ultravioletti in teorie non asintoticamente libere potrebbero essere il riflesso perturbativo della triviality [139]: siccome la teoria di campo non è definita ad $\alpha \neq 0$ la funzione di partizione va regolarizzata ed è inevitabilmente complessa [33]. Tuttavia non esistono teoremi rigorosi e inoltre il caso che interessa, cioè quello delle teorie asintoticamente libere, è afflitto dai rinormaloni infrarossi la cui interpretazione è molto più delicata. Discuteremo questi punti più in dettaglio nei prossimi paragrafi.

[3] Più precisamente delle configurazioni multi-istantoniche [116, 124]. In generale in meccanica quantistica vi è uno stretto legame tra l' andamento asintotico della serie perturbativa e gli istantoni, nel senso che è possibile ricavare l'andamento agli alti ordini con tecniche istantoniche, mediante una relazione di dispersione opportuna [33, 115].

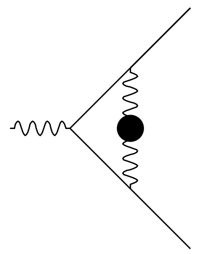


Figura 4.1: Vertice da cui si estrae il momento magnetico anomalo risommato.

4.3 Rinormaloni ultravioletti in teorie non asintoticamente libere

I rinormaloni sono delle singolarità nella trasformata di Borel della serie perturbativa di un qualche osservabile dovute alla risommazione della teoria delle perturbazioni generata dal gruppo di rinormalizzazione ($\mu-$RG). In questo paragrafo cercheremo di chiarire l'origine dei rinormaloni in QED. A tale scopo conviene considerare una quantità fisica su cui è possibile testare la teoria delle perturbazioni in maniera estremamente precisa, il momento magnetico anomalo dell'elettrone. Tale quantità si estrae dal grafico in figura 4.1, in cui il pallino nero rappresenta la risommazione della catena di bolle. La risommazione, come si è visto nel primo capitolo, si può riassorbire nella costante di accoppiamento efficace $\alpha_{eff}(k^2)$ data dalla formula (1.80), il cui andamento ultravioletto è fissato dal primo coefficiente della funzione beta, che è universale. In questo senso la risommazione è generata dal gruppo di rinormalizzazione. Si noti che vi sono comunque delle ambiguità nella definizione precisa di $\alpha_{eff}(k^2)$, che dipende dallo schema di rinormalizzazione adottato (per esempio sottrazioni a momenti nulli, prescrizioni on-shell, prescrizioni $\overline{MS}$, etc.).

Si dimostra che il contributo al momento magnetico anomalo a è dato da un'integrale del tipo [140, 144]

$$a \simeq \frac{1}{\pi}\int_{m^2}^{\infty}\frac{dk^2}{k^2}\frac{m^4}{k^4}\alpha_{eff}(k^2) \tag{4.13}$$

in cui si può usare l'espressione asintotica

$$\alpha_{eff}(k^2,\alpha) \simeq \frac{\alpha}{1-\alpha b_1 \log(k^2/m^2)}, \quad b_1 = \frac{2}{3\pi} > 0. \tag{4.14}$$

A causa del polo di Landau ultravioletto $\Lambda^2_{QED} \sim m^2 e^{1/(b_1\alpha)}$ l'integrale (4.13) è mal definito e quindi la risommazione della serie perturbativa è ambigua. Ciò si può vedere anche osservando che le correzioni perturbative al momento magnetico anomalo hanno un andamento di tipo $\ell!$ e quindi generano una serie perturbativa che non è Borel-sommabile. Esplicitamente, sviluppando in serie α_{eff} nella (4.13), ponendo $t = \log(k^4/m^4)$ e sfruttando la formula $\int_0^\infty dt\; e^{-t} t^\ell = \ell!$, si ha

$$a^{(\ell)} = \frac{\alpha^{\ell+1}}{2\pi} \left(\frac{b_1}{2}\right)^\ell \ell! \tag{4.15}$$

quindi la trasformata di Borel

$$\tilde{a}_{PT}(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{sb_1}{2}\right)^\ell = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - s/s_2}, \quad s_2 = 2/b_1 \tag{4.16}$$

presenta un polo (rinormalone ultravioletto) sul semiasse reale positivo nel punto $s = s_2$. Naturalmente si potrebbe pensare che tutti gli altri diagrammi che contribuiscono al momento magnetico anomalo possano invalidare l'argomento. Tuttavia se si introducono N_f sapori e si manda $N_f \to \infty$ [122] la risommazione generata dal gruppo di rinormalizzazione al primo ordine tiene conto dei contributi dominanti e quindi è perfettamente affidabile (anche per grandi α) e il polo di Landau pare inevitabile (simulazioni numeriche [111, 112] sembrano dare lo stesso risultato anche per $N_f = 1$). È comunque possibile estrarre una predizione fenomenologica passando all'integrale di Borel regolarizzato e calcolare il momento magnetico anomalo a meno di un'arbitrarietà (correzione a potenza *complessa*) dell'ordine di

$$e^{-s_2/\alpha_{eff}(Q^2)} = \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2_{QED}}\right)^2, \tag{4.17}$$

che è piccolissima per momenti molto al di sotto del polo di Landau della QED, cioè in pratica sempre poichè $\Lambda_{QED} \sim 10^{227}$ GeV. Dunque da un punto di vista fenomenologico il rinormalone ultravioletto della QED non dà problemi.

4.4 Teorie asintoticamente libere

Consideriamo ora il caso delle teorie asintoticamente libere, come per esempio la QCD, e usiamo di nuovo il gruppo di rinormalizzazione come guida per risommare la serie perturbativa, anche se un'interpretazione della costante running come risommazione ai logaritmi dominanti (leading log) di una opportuna classe di diagrammi di Feynman non è più evidente come in QED.

In generale la costante efficace risommata ottenuta dalla funzione beta a 1 loop ha la forma

$$\alpha_{eff}(k^2, \alpha) \simeq \frac{\alpha}{1 - b_1 \alpha \log k^2/Q^2}, \tag{4.18}$$

con $b_1 < 0$ e $\alpha = \alpha_{eff}(Q^2)$. La (4.18) è divergente a piccoli momenti $k^2 < \Lambda^2_{QCD} = Q^2 e^{1/(b_1/\alpha)}$ e quindi le quantità risommate del tipo

$$F(\alpha) = \int_0^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{Q^2}\right)^p \alpha_{eff}(k^2, \alpha), \quad p > 0 \tag{4.19}$$

a piccoli momenti sono mal definite e la teoria risommata è ambigua. Da ciò nasce il problema dei rinormaloni infrarossi [121]. Ci sono due meccanismi fisici che possono eliminare l'inconsistenza.

1. La presenza di correzioni non perturbative alla funzione beta.

   Seguendo la linea di pensiero suggerita dalla meccanica quantistica, si può pensare che l'inconsistenza della risommazione perturbativa, dovuta al polo di Landau infrarosso, sia un segnale della presenza di effetti non perturbativi. Questo è il punto di vista che è stato adottato per primo [121, 132] e trova applicazione soprattutto in connessione con l'Operator Product Expansion [130, 131]. L'idea è che i contributi non perturbativi alla funzione beta, del tipo $e^{-1/\alpha_{eff}(k^2)}$ e trascurabili nell'ultravioletto, possano modificare l'andamento infrarosso della costante efficace e assicurare la consistenza della teoria. Per esempio la funzione beta [128]

   $$\beta(\alpha) = \beta_{PT}(\alpha) + \beta_{NP}(\alpha) = b_1\alpha^2 - b_1\alpha^2 \frac{C^2}{\Lambda^2} e^{2/(b_1\alpha)} \tag{4.20}$$

   dà luogo ad una costante congelata nell'infrarosso $\alpha(Q^2) = 2/(-b_1 \log \frac{Q^2+C^2}{\Lambda^2})$. Altri possibili andamenti infrarossi sono stati studiati in letteratura [129, 134].

2. La presenza di correzioni dagli alti ordini perturbativi alla funzione beta.

   Recentemente [127, 135, 146] si è prestata più attenzione alla possibilità di eliminare il polo di Landau infrarosso in un contesto puramente perturbativo, senza bisogno di aggiungere termini non perturbativi. Infatti osserviamo che l'aver rimpiazzato la funzione beta esatta con la sua approssimazione al primo ordine è un passaggio che non è giustificato in generale (anche se e è giustificato in QED nel limite di grandi N_f.). Tenendo conto delle correzioni agli alti ordini, l'andamento della beta potrebbe cambiare completamente per grandi α e in particolare potrebbe esserci un punto fisso infrarosso. In questo modo la costante efficace $\alpha_{eff}(k^2)$ sarebbe ben definita a tutte le scale e gli integrali risommati sarebbero non ambigui. Il problema è che le correzioni agli alti ordini dipendono dalla scelta dello schema di rinormalizzazione per $\ell \geq 3$, e dunque è necessario specificare uno schema fisico [143].

Fisicamente potrebbero essere all'opera entrambi i meccanismi. Il problema, in un calcolo concreto di sezioni d'urto, è che è impossibile distinguere i contributi non perturbativi “veri”, dovuti per esempio a fenomeni istantonici, da quelli dovuti alla risommazione della serie perturbativa finchè non si riesce a stimare la loro grandezza relativa [145, 147]. Da un punto di vista fenomenologico entrambi gli effetti si riflettono in correzioni a potenza di ordine $O(\Lambda^2_{QCD}/Q^2)$, piccole e difficili da rilevare sperimentamente. Quindi l'analisi è molto complicata sotto tutti i punti di vista.

4.5 Origine dei rinormaloni infrarossi

L'origine dei rinormaloni infrarossi non ha nulla a che fare con la presenza o l'assenza del polo di Landau in $\alpha_{eff}(k^2)$, che è un problema non perturbativo [135]. Al contrario la posizione e la natura dei rinormaloni sono universalmente specificate dalla teoria delle perturbazioni e in particolare dalla conoscenza dei primi due coefficienti della funzione beta. Per mostrarlo conviene operare nella maniera seguente. Sia Q^2 una scala ultravioletta (per esempio il passo reticolare nel linguaggio del “lattice people”, oppure il cutoff ultravioletto nel linguaggio wilsoniano), Λ_L il polo di Landau infrarosso e μ^2 una scala intermedia, $\Lambda_L^2 << \mu^2 << Q^2$, che divide il regime perturbativo da quello non perturbativo. L'integrale $F(\alpha)$ può essere spezzato in due contributi,

$$F(\alpha) = \int_0^{\mu^2} \frac{dk^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{Q^2}\right)^p \alpha_{eff}(k^2,\alpha) + \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{Q^2}\right)^p \alpha_{eff}(k^2,\alpha). \tag{4.21}$$

Il rinormalone nasce dal primo integrale, che possiamo indicare con $F_{NP}(\alpha)$, quando si usa in maniera impropria (naive) l'andamento ultravioletto della costante efficace nella regione infrarossa. Passando alla trasformata di Borel si ottiene[4]

$$\tilde{F}^{naive}_{NP}(s) = \int_0^{\mu^2} \frac{dk^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{Q^2}\right)^{p+b_1 s} = \frac{1/b_1}{s-s_p} \left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)^{b_1(s-s_p)} \tag{4.22}$$

e la posizione del polo rinormalonico è $s_p = -p/b_1$. Se si usa l'approssimazione a due loop per la funzione beta, cioè si tiene conto del coefficiente b_2, che è anch'esso universale, la singolarità associata al rinormalone diventa un taglio [146] ed è del tipo

$$\frac{1}{(s-s_p)^{1+\delta_p}}, \quad \delta_p = -\frac{p}{b_2}. \tag{4.23}$$

[4]Nella (4.24) conviene usare l'espressione della costante efficace in trasformata di Borel,

$$\tilde{\alpha}_{eff}(k^2,s) = \left(\frac{k^2}{Q^2}\right)^{b_1 s}.$$

Chiaramente il valore di $F_{NP}(\alpha)$ dipende dalla prescrizione che si dà per valutare $\alpha_{eff}(k^2,\alpha)$ nel regime infrarosso e presenta un'ambiguità che corrisponde ad una correzione a potenza complessa [146].

Si noti invece che il secondo integrale nella (4.21), che possiamo indicare con $F_{PT}(\alpha)$, ha una trasformata di Borel perfettamente definita su tutto l'asse reale,

$$\tilde{F}_{PT}(s) = \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{Q^2}\right)^{p+b_1 s} = \frac{1/b_1}{s-s_p}\left(1-\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)^{b_1(s-s_p)}\right), \tag{4.24}$$

(in particolare $\tilde{F}_{PT}(s)$ tende a $\log(Q^2/\mu^2)$ per $s \to s_p$) e non dà luogo a singolarità fintanto che μ è non nullo.

4.6 Teoria delle perturbazioni $\Lambda-$RG risommata

Come si è visto, l'ordinario gruppo di rinormalizzazione ($\mu-$RG) nel caso delle teorie asintoticamente libere dà luogo ad arbitrarietà di difficile interpretazione e che possono o non possono avere a che fare con contributi non perturbativi. Ci si può quindi chiedere se il gruppo di rinormalizzazione di Wilson ($\Lambda-$RG) possa chiarire un po' le idee su questo punto. È quello che tenteremo di fare nel seguito, dando una procedura di risommazione nell'ambito del $\Lambda-$RG che è consistente nell'infrarosso già al primo ordine di approssimazione, senza bisogno di introdurre prescrizioni di regolarizzazione ad hoc e/o di invocare fisica non perturbativa incognita.

Per iniziare con un caso semplice e fissare le notazioni consideriamo dapprima la teoria ϕ^4 massless in quattro dimensioni. Nel seguito analizzeremo il caso di una teoria asintoticamente libera.
Il punto di partenza è l'equazione di evoluzione nella forma riscalata descritta in appendice A,

$$\left(\Lambda\partial_\Lambda + n\frac{\dot{Z}}{Z}\right)\hat{\Pi}_{2n}(p_i;\Lambda,\Lambda_0) = \hat{I}_{2n}(p_i;\Lambda,\Lambda_0), \tag{4.25}$$

in cui si è introdotta la funzione di rescaling $Z(\Lambda)$, determinata dalla richiesta che il termine cinetico sia normalizzato canonicamente

$$\partial_{p^2}\hat{\Pi}_2\Big|_{p^2=\mu^2} = 1. \tag{4.26}$$

L'idea è quella di risolvere iterativamente l'equazione ad un ordine fissato $\ell \geq 1$, partendo da un approssimazione di ordine zero del tipo

$$\hat{\Gamma}^{(0)}(\hat{\phi}(\Lambda),\hat{g}(\Lambda);\Lambda,\Lambda_0) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\Lambda)\cdot D^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\hat{\phi}(\Lambda) + \frac{1}{4!}\int_x \hat{g}(\Lambda)\hat{\phi}^4(\Lambda) \tag{4.27}$$

in cui si sono introdotti i campi riscalati $\hat{\phi}(\Lambda) = Z^{1/2}(\Lambda)\phi$ e la costante flowing $\hat{g}(\Lambda)$. Fissando le condizioni al contorno

$$\begin{gathered}\partial_{p^2}\hat{\Pi}_2^{(\ell)}|_{p^2=\mu^2,\Lambda=0} = \delta^{\ell 0}, \hat{\Pi}_4^{(\ell)}|_{p_i=\bar{p}_i,\Lambda=0} = g(\mu)\delta^{\ell 0}, \\ \hat{\Pi}_2^{(\ell)}|_{p=0,\Lambda=0} = 0, \hat{\Pi}_{2n,irr}^{(\ell)}|_{\Lambda=\Lambda_0} = 0,\end{gathered} \tag{4.28}$$

l'equazione di evoluzione per i vertici propri (4.25) può essere risolta ricorsivamente in termini di integrali su $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_\ell$. Per esempio al primo ordine per la costante di massa si ottiene

$$\hat{\Pi}_2^{[1]}(0; \Lambda, \Lambda_0) = Z^{-1}(\Lambda) \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1} Z(\Lambda_1) \hat{I}_2^{[0]}(0, \hat{g}(\Lambda_1); \Lambda_1, \Lambda_0) \tag{4.29}$$

mentre per le parti irrilevanti risulta

$$\hat{\Pi}_{2n,irr}^{[1]}(p_i; \Lambda, \Lambda_0) = -Z^{-n}(\Lambda) \int_\Lambda^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1} Z^n(\Lambda_1) \hat{I}_{2n,irr}^{[0]}(p_i, \hat{g}(\Lambda_1); \Lambda_1, \Lambda_0). \tag{4.30}$$

La differenza rispetto alla teoria delle perturbazioni ordinaria è l' introduzione delle funzioni $\Lambda-$dipendenti $Z(\Lambda)$ e $\hat{g}(\Lambda)$. Per ricavarle è sufficiente risolvere le rispettive equazione di evoluzione, cioè il sistema

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = -2\hat{\gamma}(\hat{g}, \Lambda) = \partial_{p^2} \hat{I}_2^{[\ell-1]}\Big|_{p^2=\mu^2}, \tag{4.31a}$$

$$\Lambda\partial_\Lambda \hat{g} = \hat{\beta}(\hat{g}, \Lambda) = -2\frac{\dot{Z}}{Z}\hat{g} + \hat{I}_4^{[\ell-1]}\Big|_{p_i=\bar{p}_i}. \tag{4.31b}$$

In quanto segue considereremo sempre il caso $\ell = 1$, in cui le (4.31) sono equazioni differenziali ordinarie la cui soluzione è nota in forma esatta per particolari scelte della funzione di taglio e in forma numerica in generale[5]. I dettagli della soluzione dipendono dalla funzione cutoff utilizzata, ma non l'andamento qualitativo.
Nel primo ordine di approssimazione $\hat{\gamma}(\hat{g}, \Lambda)$ è identicamente nulla mentre la funzione beta generalizzata,

$$\hat{\beta}(\hat{g}; \Lambda) = \hat{I}_4^{[0]}\Big|_{p_i=\bar{p}_i} = \frac{3}{16\pi^2}\hat{g}^2(\Lambda)F(\Lambda) \tag{4.32}$$

è determinata dalla funzione

$$F(\Lambda) = -16\pi^2 \int_q \dot{D}_{\Lambda\Lambda_0}(q) D_{\Lambda\Lambda_0}(q + \bar{p})\Big|_{\bar{p}^2=\mu^2}. \tag{4.33}$$

Per avere una soluzione completamente analitica conviene fare il limite $\Lambda_0 \to \infty$ e

[5] L'affidabilità della routine di integrazione è stata controllata sovrapponendo il grafico della soluzione esatta (nota con certe scelte della funzione di taglio) a quello della soluzione numerica. L'accordo è ottimo.

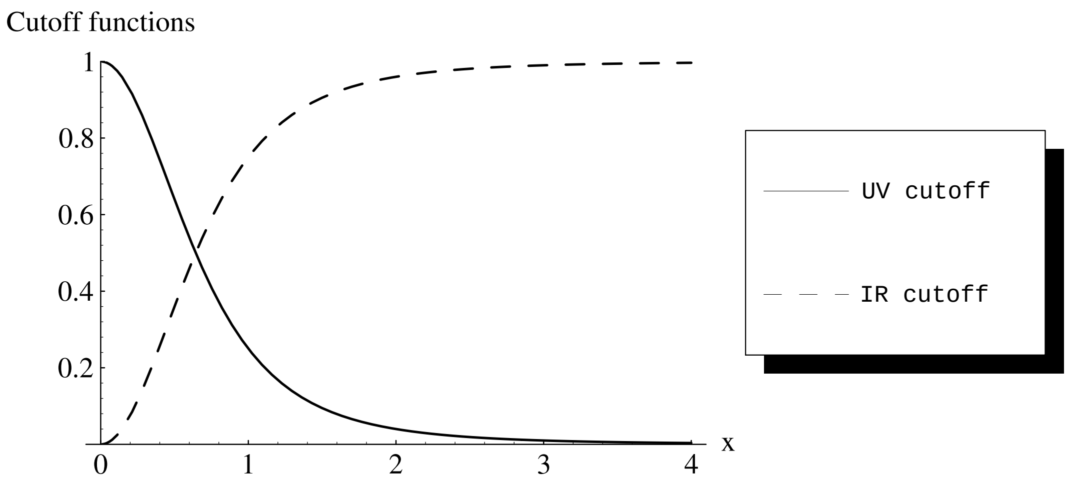


Figura 4.2: Grafici delle funzioni cutoff ultravioletta $K_{UV}(x) = 1/(x+1)^2$ e infrarossa $K_{IR}(x) = 1 - K_{UV}(x)$, con $x = q^2/\Lambda^2$.

prendere come funzione cutoff infrarossa

$$K_{\Lambda\infty}(q^2) = 1 - \frac{\Lambda^4}{(q^2+\Lambda^2)^2} = \frac{q^2(q^2+2\Lambda^2)}{(q^2+\Lambda^2)^2} \tag{4.34}$$

(si veda la figura 4.2 per un grafico di $K_{\Lambda\infty}(q^2)$ e $K_{0\Lambda}(q^2)$). In questo modo usando la parametrizzazione di Feynman (B.14) si ottiene

$$F(\Lambda) = \frac{2\Lambda^2(6\Lambda^4 + 7\Lambda^2\mu^2 + \mu^4)}{\mu^2(\mu^2+4\Lambda^2)^2} - \frac{48\Lambda^8 \mathrm{ArcTanh}\sqrt{\mu^2/(\mu^2+4\Lambda^2)}}{\sqrt{\mu^6}(\mu^2+4\Lambda^2)^{5/2}}. \tag{4.35}$$

I limiti asintotici sono

$$F(\Lambda^2/\mu^2) = 2\frac{\Lambda^2}{\mu^2} - 2\frac{\Lambda^4}{\mu^4} \quad (\Lambda << \mu), \tag{4.36}$$

$$F(\Lambda^2/\mu^2) = 1 - \frac{2}{5}\frac{\mu^2}{\Lambda^2} + \frac{1}{7}\frac{\mu^4}{\Lambda^4} \quad (\Lambda >> \mu). \tag{4.37}$$

Si noti che i limiti $F(0) \to 0$ e $F(\infty) \to 1$ sono universali e indipendenti dalla scelta della funzione di taglio.

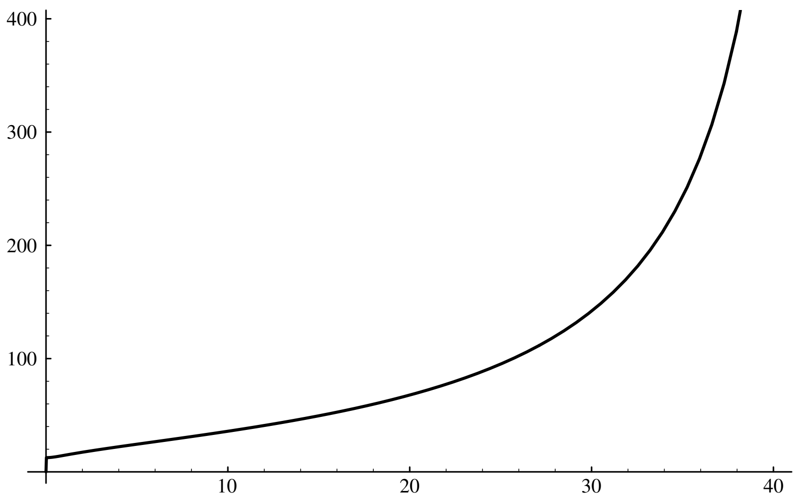


Figura 4.3: Costante di accoppiamento flowing $\hat{g}(\Lambda)$ come funzione di Λ/μ calcolata con la funzione di taglio (4.34). Il punto iniziale è $\hat{g}(0) = g = 4\pi$ e il polo di Landau è $\Lambda_L = 43.47\mu$.

La costante flowing si ottiene risolvendo la (4.32) ed è data dalla formula

$$\hat{g}(\Lambda) = \frac{g(\mu)}{1 - \frac{3}{16\pi^2} g(\mu) \int_0^\Lambda \frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1} F(\Lambda_1^2/\mu^2)}, \quad \hat{g}(0) = g(\mu) \tag{4.38}$$

dove l'integrale su Λ può essere eseguito esplicitamente. Il grafico è riportato in figura 4.3. Si noti che nell'ultravioletto $\hat{g}(\Lambda)$ diverge, cioè si ritrova l'usuale polo di Landau. L'esistenza del polo è un fatto generale poichè per grandi Λ l'equazione di evoluzione ha la soluzione asintotica *universale*, cioè indipendente dalla funzione di taglio adottata,

$$\hat{g}_{as}(\Lambda) = \frac{\hat{g}(\bar{\Lambda})}{1 - \frac{3}{16\pi^2} \hat{g}(\bar{\Lambda}) \log \Lambda/\bar{\Lambda}}. \tag{4.39}$$

Comunque la posizione esatta del polo di Landau dipende dal valore di $g(\mu)$ e dalla scelta della funzione di taglio. Per esempio, fissando $g(\mu) = 4\pi$, con il cutoff (4.34) si ottiene $\Lambda_L = 43.47\mu$ mentre con il cutoff a gradino si ha $\Lambda_L = 39.79\mu$. Abbiamo anche calcolato la posizione del polo con un cutoff esponenziale $K_{\Lambda\infty}(q^2) = 1 - \exp(-q^2/\Lambda^2)$ ottenendo $\Lambda_L = 37.74\mu$.

4.7 Risommazione $\Lambda-$RG in teorie asintoticamente libere

Consideriamo ora il caso di una teoria asintoticamente libera, la teoria ϕ^3 in sei dimensioni. In questo caso prendiamo come punto di partenza dell' iterazione

$$\hat{\Gamma}^{(0)}(\hat{\phi}(\Lambda), \hat{g}(\Lambda), m^2) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\Lambda)\cdot\Delta^{-1}_{\Lambda\infty}\hat{\phi}(\Lambda) + \frac{1}{3!}\int_x \hat{g}(\Lambda)\hat{\phi}(\Lambda)^3, \tag{4.40}$$

con

$$\Delta_{\Lambda\infty}(q) \equiv \frac{K_{\Lambda\infty}(q^2+m^2)}{q^2+m^2} \tag{4.41}$$

dove $\hat{g}(\Lambda)$ è la costante flowing mentre la massa m è tenuta fissa non zero, in modo da poter adottare le prescrizioni a momento nullo. Le equazioni di evoluzione a un loop per $\dot{Z}(\Lambda)$ e $\hat{g}(\Lambda)$ si estraggono dai vertici $\partial_{p^2}\hat{I}_2^{(0)}|_{p=0}$ e $\hat{I}_3^{(0)}|_{p_i=0}$ e si scrivono

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = -\frac{1}{6}r\hat{g}^2F_\phi(\Lambda), \quad \Lambda\partial_\Lambda\hat{g} = -r\hat{g}^3F_g(\Lambda) - \frac{3}{2}\frac{\dot{Z}}{Z}\hat{g} \tag{4.42}$$

dove $r = 1/(4\pi)^3$ e

$$\begin{aligned} F_\phi(\Lambda) &= 6(4\pi)^3\,\partial_{p^2}\int_q \dot{\Delta}_{\Lambda\infty}(q)\Delta_{\Lambda\infty}(q+p)\bigg|_{p=0}, \\ F_g(\Lambda) &= -3(4\pi)^3\int_q \dot{\Delta}_{\Lambda\infty}(q)\Delta_{\Lambda\infty}(q)^2. \end{aligned} \tag{4.43}$$

In generale le funzioni $F_\phi(\Lambda)$ e $F_g(\Lambda)$ sono crescenti con Λ e assumono valori tra zero e uno. Esse possono essere ottenute analiticamente con scelte opportune della funzione di taglio. Per esempio prendendo

$$K_{\Lambda\infty}(q^2+m^2) = 1 - \frac{\Lambda^6}{(q^2+m^2+\Lambda^2)^3} \tag{4.44}$$

si ottiene

$$F_\phi(\Lambda) = \frac{\Lambda^6(35\Lambda^4+40\Lambda^2m^2+14m^4)}{35(\Lambda^2+m^2)^5}, \tag{4.45a}$$

$$F_g(\Lambda) = \frac{\Lambda^6(140\Lambda^8+381\Lambda^6m^2+414\Lambda^4m^4+210\Lambda^2m^6+42m^8)}{140(\Lambda^2+m^2)^7}. \tag{4.45b}$$

Usando l'equazione per $\dot{Z}(\Lambda)$, l'equazione differenziale per $\hat{g}(\Lambda)$ si scrive

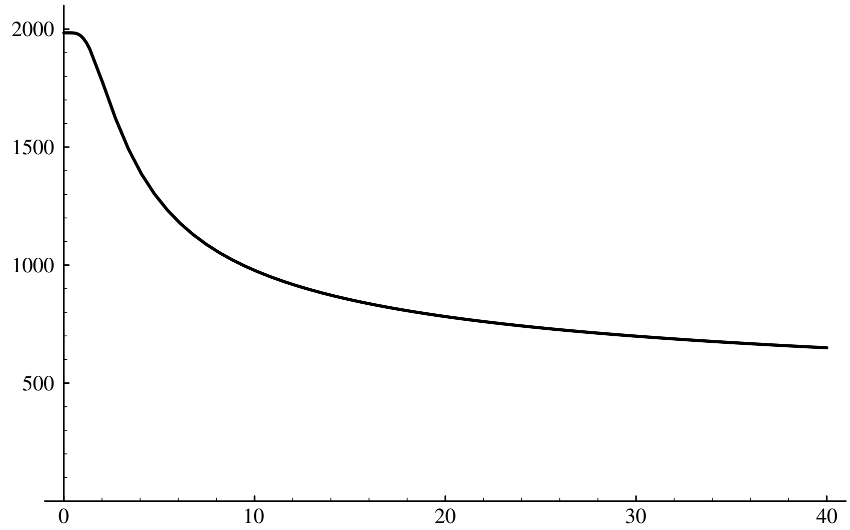


Figura 4.4: Flowing coupling wilsoniana $\hat{g}^2$ come funzione di Λ/m nella teoria ϕ_6^3 calcolata using il cutoff (4.34). La condizione iniziale è $\hat{g}^2(0) = g^2 = (4\pi)^3$.

$$\Lambda\partial_\Lambda \hat{g} = [-F_g(\Lambda) + \frac{1}{4}F_\phi(\Lambda)]r\hat{g}^3, \qquad \hat{g}(0) = g \tag{4.46}$$

e può essere risolta esattamente. Il risultato è mostrato in figura 4.4. Si noti che nel limite ultravioletto $\Lambda \geq \bar{\Lambda} >> m$ l'equazione (4.46) diventa

$$\Lambda\partial_\Lambda \hat{g}_{as} = -\frac{3}{4}r\hat{g}_{as}^3 = b_1\hat{g}_{as}^3, \qquad b_1 = -\frac{3}{256\pi^3} \tag{4.47}$$

e quindi la flowing coupling asintotica ha la stessa forma funzionale della running coupling

$$g_{as}^2(\Lambda) = \frac{\bar{g}^2}{1 - b_1\bar{g}^2\log\Lambda/\bar{\Lambda}}, \qquad g_{as}(\bar{\Lambda}) = \bar{g}. \tag{4.48}$$

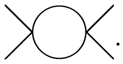
La coupling asintotica è mal definita nell'infrarosso per $\Lambda = \Lambda_L = \bar{\Lambda}e^{1/(b_1\bar{g}^2)}$ (polo di Landau), mentre invece la corretta flowing coupling $\hat{g}(\Lambda)$ è regolare per ogni Λ. Dalle (4.42) si ottiene anche la funzione di rescaling

$$Z(\Lambda) = \exp\left[-\frac{1}{6}r\int_0^\Lambda \frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1}\hat{g}^2(\Lambda_1)F_\phi(\Lambda_1)\right] \tag{4.49}$$

che è ben definita per ogni Λ, decrescente e tendente a zero per $\Lambda \to \infty$. Nel limite asintotico si ha $Z(\Lambda) \to \left(1 - b_1\bar{g}^2\log\Lambda/\bar{\Lambda}\right)^{\frac{r}{6b_1}} Z(\bar{\Lambda})$.

4.8 Confronto tra la risommazione $\Lambda-$RG e la risommazione $\mu-$RG

In questo sezione mostriamo che la risommazione fornita dal gruppo di rinormalizzaione di Wilson è praticamente indistinguibile da quella fornita dal gruppo di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low nel caso delle teorie non asintoticamente libere, mentre ne differisce radicalmente nel caso opposto, nel regime infrarosso.

Nella risommazione $\mu-$RG si passa da un diagramma di Feynman a un loop a un diagramma risommato rimpiazzando la costante di accoppiamento $g(\mu)$ nei vertici con la one-loop running coupling $g(q^2)$, dove q è il momento che circola nel loop. Consideriamo un semplice esempio che si generalizza in maniera banale a casi più complicati, il calcolo del diagramma risommato . L'integrale da calcolare ha la forma

$$\tilde{\mathcal{F}}(Q^2/\mu^2;\Lambda_0^2/\mu^2) = \int_0^{\Lambda_0^2} \frac{dq^2}{2q^2} g^2(q^2)[\tilde{F}(q^2/Q^2) - \tilde{F}(q^2/\mu^2)] \tag{4.50}$$

con

$$\tilde{F}(q^2/Q^2) = \frac{q^4}{2\pi^2}\int_\Omega \frac{1}{q^2}\frac{1}{(q+Q)^2}, \tag{4.51}$$

dove $\int_\Omega$ indica l'integrazione angolare in quattro dimensioni e il fattore q^4 rende adimensionale la quantità $\tilde{F}$. L'integrale (4.50) è sottratto alla scala $Q^2 = \mu^2$ per assicurare la convergenza nell'ultravioletto.

D'altra parte, nella formulazione del $\Lambda-$RG si devono calcolare integrali del tipo

$$\mathcal{F}(Q^2/\mu^2;\Lambda_0^2/\mu^2) = \int_0^{\Lambda_0^2} \frac{d\Lambda_1^2}{2\Lambda_1^2} \hat{g}^2(\Lambda_1)[F(\Lambda_1^2/Q^2) - F(\Lambda_1^2/\mu^2)] \tag{4.52}$$

dove F è la funzione definita in (4.33). Vogliamo mostrare che la (4.50) e la (4.52) danno numericamente quasi lo stesso risultato, $F \simeq \tilde{F}$, e le piccole differenze sono imputabili alle arbitrarietà nella scelta della funzione di taglio. In questo semplice esempio la funzione (4.51) può essere calcolata esattamente ottenendo

$$\tilde{F}(\Lambda^2/Q^2) = \frac{2\Lambda^2}{Q^2+4\Lambda^2} + \frac{8\Lambda^4 \mathrm{ArcTanh}\sqrt{Q^2/(Q^2+4\Lambda^2)}}{\sqrt{Q^2}(Q^2+4\Lambda^2)^{3/2}}. \tag{4.53}$$

Confrontando questo risultato con la (4.35) si trova che F e $\tilde{F}$ hanno gli stessi limiti asintotici per $\Lambda \to 0$ e $\Lambda \to \infty$

$$|\tilde{F} - F| \to \frac{6\Lambda^4}{Q^4} \to 0, \quad \Lambda^2 << Q^2,$$

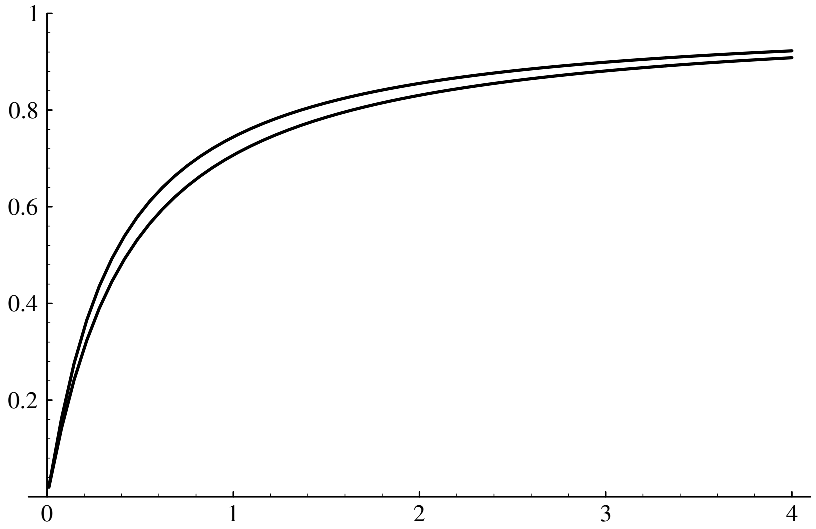


Figura 4.5: Confronto tra il risultato esatto $F(\Lambda^2/Q^2)$ (curva superiore) e il risultato approssimato $\tilde{F}(\Lambda^2/Q^2)$ (curva inferiore).

$$|\tilde{F} - F| \to \frac{1}{15}\frac{Q^2}{\Lambda^2} \to 0, \quad \Lambda^2 >> Q^2$$

e che l'errore relativo $\varepsilon(\Lambda^2/Q^2) = |\tilde{F} - F|/|\tilde{F}|$ è piccolo in ogni intervallo dei momenti. I grafici di F e $\tilde{F}$ sono riportati in figura 4.5. Il fatto che la funzione F non sia così diversa dalla funzione $\tilde{F}$ si può capire usando nellla (4.33) il cutoff a gradino $K_{\Lambda\infty}(q) = \theta(q^2/\Lambda^2 - 1)$ e l'approssimazione $K_{\Lambda\infty}(q+Q) \simeq K_{\Lambda\infty}(q)$. In questo modo si ottiene

$$F(\Lambda^2/Q^2) \simeq -8\pi^2 \int_q \Lambda\partial_\Lambda \frac{\theta(q^2/\Lambda^2 - 1)}{q^2(q+Q)^2} = \tilde{F}(\Lambda^2/Q^2), \tag{4.54}$$

dove abbiamo usato le proprietà $K_{\Lambda\infty}(q)^2 = K_{\Lambda\infty}(q)$ e $\dot{K}_{\Lambda\infty}(q) = -2\Lambda^2\delta(q^2 - \Lambda^2)$. Questo argomento si generalizza a grafici a un loop con un numero arbitrario di propagatori e vari indici (di Lorentz, spinoriali, di colore, etc). anche se questi integrali in genere non possono essere calcolati esplicitamente.

Nell'approssimazione $F \simeq \tilde{F}$ è chiaro che la teoria $\Lambda-$RG risommata è completamente equivalente alla teoria $\mu-$RG risommata, con l'unica differenza di rimpiazzare la running coupling $g(q^2)$ con la flowing coupling $\hat{g}(\Lambda_1)$. [6] In generale nella

[6] In QED l'analogo della (4.52) contiene anche la funzione di rescaling dell'elettrone, ma $Z_\psi(\Lambda) \simeq 1$ nella regione $\Lambda << \Lambda_L$, cioè per piccoli $\hat{g}(\Lambda)$.

regione ultravioletta $g(\sqrt{q^2})$ e $\hat{g}(\Lambda_1)$ hanno la stessa forma funzionale, mentre nell'infrarosso differiscono. Tuttavia, mentre in teorie non asintoticamente libere la regione infrarossa è congelata e quindi non vi sono differenze di rilievo nell'usare $g(\sqrt{q^2})$ oppure $\hat{g}(\Lambda_1)$, nel caso delle teorie asintoticamente libere $g(\sqrt{q^2})$ e $\hat{g}(\Lambda_1)$ differiscono radicalmente: $\hat{g}(\Lambda_1)$ è regolare a tutte le scale e l'integrale (4.52) è ben definito mentre invece (4.50) soffre della patologia dovuta al polo di Landau.

4.9 Conclusione

Chiudiamo il capitolo con qualche commento sulla procedura adottata e segnalando la differenza con il punto di vista del $\mu-$RG[7]. Si è visto esplicitamente che nel caso delle teorie asintoticamente libere la teoria delle perturbazioni risommata attraverso il gruppo di rinormalizzazione di Wilson è ben definita a tutte le scale, senza bisogno di invocare nè contributi perturbativi dagli altri ordini, nè contributi non perturbativi, nel senso che la funzione beta wilsoniana $\hat{\beta}(\hat{g},\Lambda)$ contiene solo il contributo di ordine $\hat{g}^2$ e non superiori o non analitici del tipo $\exp(-1/g)$. Il motivo per cui la tecnica funziona è il fatto che, in realtà, ci si restringe sempre alla regione perturbativa. Se infatti si parte da una costante $\hat{g}(0) = g(\mu)$ piccola, essendo $\hat{\beta} < 0$, $\hat{g}(\Lambda)$ resta sempre piccola e non succede nulla di pericoloso. Il regime non perturbativo corrisponde alla regione in cui il punto di sottrazione μ diventa piccolo, vicino al polo di Landau infrarosso. Tuttavia questa regione viene completamente evitata dal gruppo di rinormalizzazione di Wilson, in cui μ viene fissato nella regione perturbativa una volta e per tutte, e si studia il running in Λ, non in μ. L'interpretazione di $\hat{g}(\Lambda)$ è wilsoniana, cioè ci dice come deve cambiare la costante di accoppiamento via via che si integrano i gradi di libertà sopra Λ, con la richiesta che alla fine $\hat{g}(0)$ raggiunga il valore finito $g(\mu)$. In questo modo di vedere la regione non perturbativa (e le ambiguità che essa comporta) non viene mai attraversata e si capisce intuitivamente perchè la risommazione è consistente.

[7] Queste osservazioni nascono da una conversazione con U. Ellwanger.

Capitolo 5

Risommazione $\Lambda-$RG in teorie di gauge

In questo capitolo discutiamo il problema della consistenza tra risommazione e gauge invarianza, risolvendolo nel caso delle teorie di gauge abeliane.

5.1 Risommazione e gauge invarianza in QED

In teorie di gauge una procedura di risommazione è ragionevole solo se è consistente con la gauge invarianza. Controllare questo punto è estremamente complicato nel caso generale (sia per le risommazioni basate sul $\mu-$RG che per quelle basate sul $\Lambda-$RG) mentre è relativamente semplice nel caso abeliano. Considereremo in particolare la QED nel primo ordine di risommazione mediante la tecnica del $\Lambda-$RG. In questo contesto si può dimostrare che la proprietà di gauge invarianza, cioè il fatto che le identità di Ward per le funzioni di Green fisiche risommate siano soddisfatte, è assicurata, alle basse energie, a patto di partire da un'approssimazione di ordine zero che le rispetti ad ogni Λ.

A questo scopo prendiamo come punto di partenza l'azione

$$\hat{\Gamma}^{(0)}(\hat{\phi}, \hat{a}, \hat{e}; \Lambda, \Lambda_0) = \int_x \frac{1}{2} \hat{A}_\mu (D^{-1}_{\Lambda\Lambda_0})^{\mu\nu} \hat{A}_\nu + \hat{\bar{\psi}} S^{-1}_{\Lambda\Lambda_0} \hat{\psi} + \hat{e}(\Lambda) \hat{\bar{\psi}} \hat{\not{A}} \hat{\psi}, \tag{5.1}$$

dove $\hat{e}(\Lambda)$ è la flowing coupling, $\hat{a}(\Lambda)$ il parametro di gauge fixing alla scala Λ e i campi riscalati sono $\hat{\psi} = Z_\psi^{1/2}(\Lambda)\psi$, $\hat{\bar{\psi}} = Z_\psi^{1/2}(\Lambda)\bar{\psi}$, $\hat{A}_\mu = Z_A^{1/2}(\Lambda) A_\mu$.
Alla scala $\Lambda = 0$ le condizioni al contorno sugli oggetti appena introdotti sono fissate come segue:

- $\hat{e}(0) = e$ è la costante di accoppiamento rinormalizzata a momenti nulli;
- $\hat{a}(0) = a$ è un numero reale fissato che non influenza la fisica e vale 1 nella gauge di Feynman;

- le funzioni di rescaling sono fissate in maniera banale: $Z_A(0) = Z_\psi(0) = 1$.

L'azione $\hat{\Pi}^{(0)}(Z_A^{1/2}A, Z_\psi^{1/2}\psi, Z_\psi^{1/2}\bar{\psi}; \Lambda)$ in termini dei campi non riscalati ha la forma

$$\hat{\Pi}^{(0)} = \int_x -Z_A(\Lambda)\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\hat{a}(\Lambda)}(\partial\cdot A)^2\right] + Z_\psi(\Lambda)\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + \hat{e}Z_A^{1/2}A\!\!\!/ - m)\psi. \tag{5.2}$$

Imponendo le identità di Ward a tutte le scale

$$W(x)\Pi^{(0)} = \left(-\partial_\mu\frac{\delta\Pi^{(0)}}{\delta A_\mu} - ie\bar{\psi}\frac{\delta\Pi^{(0)}}{\delta\bar{\psi}} + ie\frac{\delta\Pi^{(0)}}{\delta\psi}\psi\right) = \frac{\Box}{a}\partial\cdot A(x) \tag{5.3}$$

si ottiene che la flowing coupling $\hat{e}(\Lambda)$ e il parametro $\hat{a}(\Lambda)$ devono essere legate alla funzione di rescaling $Z_A(\Lambda)$ dalle relazioni (del tutto analoghe alle (3.92))

$$\hat{e}(\Lambda) = eZ_A^{-1/2}(\Lambda), \quad \hat{a}(\Lambda) = aZ_A(\Lambda). \tag{5.4}$$

Per determinare le equazioni di evoluzione al primo ordine di approssimazione, usiamo le regole di Feynman che si estraggono da $\hat{\Pi}^{(0)}(\hat{\Phi}; \Lambda)$. I propagatori sono

$$D_{\Lambda\Lambda_0,\mu\nu}(k) = -\left(\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} - (1-\hat{a}(\Lambda))\frac{k_\mu k_\nu}{k^4}\right)K_{\Lambda\Lambda_0}(k^2) \tag{5.5}$$

e

$$S_{\Lambda\Lambda_0}(p) = -\frac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2}K_{\Lambda\Lambda_0}(p^2 + m^2), \tag{5.6}$$

dove $K_{\Lambda\Lambda_0}(k^2)$ è la funzione di taglio (4.34), mentre il vertice di interazione è

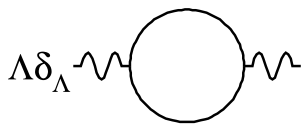
$$\Pi_\mu^{(0)}(p_1, p_2; \Lambda) = \hat{e}(\Lambda)\gamma_\mu. \tag{5.7}$$

Con queste notazioni l'equazione di evoluzione dell'inverso del propagatore del fotone si scrive

$$(\Lambda\partial_\Lambda + \frac{\dot{Z}_A}{Z_A})\hat{\Pi}_{\mu\nu}^{[1]}(p; \Lambda, \Lambda_0) = \hat{I}_{\mu\nu}(p; \Lambda, \Lambda_0), \tag{5.8}$$

$$\hat{I}_{\mu\nu}(p; \Lambda, \Lambda_0) = i\hat{e}^2(\Lambda)\int_q \Lambda\partial_\Lambda \mathrm{Tr}(\gamma_\mu S_{\Lambda\Lambda_0}(q)\gamma_\nu S_{\Lambda\Lambda_0}(q+p)). \tag{5.9}$$

Il termine $\hat{I}_{\mu\nu}$ è rappresentato in figura,



dove il simbolo $\Lambda\delta_\Lambda$ indica che la derivata è fatta solo sui propagatori, e non sui vertici $\hat{e}(\Lambda)$.

Dall'equazione (5.8) e dalla condizione di normalizzazione $-\,\partial_{p^2}\frac{1}{3}t^{\mu\nu}\hat{\Pi}_{\mu\nu}\Big|_{p^2=0} = 1$, otteniamo l'equazione di evoluzione per la funzione di rescaling $Z_A(\Lambda)$. Nel limite $\Lambda_0 \to \infty$, usando il cutoff (4.34), si ha

$$\frac{\dot{Z}_A}{Z_A} = -\,\partial_{p^2}\frac{1}{3}t^{\mu\nu}\hat{I}_{\mu\nu}\Big|_{p^2=0} = -\frac{\hat{e}^2(\Lambda)}{6\pi^2}\frac{\Lambda^4(5\Lambda^4+14\Lambda^2m^2+6m^4)}{5(\Lambda^2+m^2)^4}. \tag{5.10}$$

Usando la (5.4) e la condizione al contorno $Z_A(0) = 1$ si ottiene

$$Z_A(\Lambda) = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2}\left[\frac{1}{2}\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2} - \frac{\Lambda^2(7\Lambda^4+19\Lambda^2m^2+10m^4)}{20(\Lambda^2+m^2)^3}\right]. \tag{5.11}$$

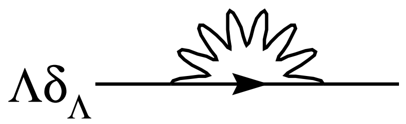
La flowing coupling $\hat{\alpha}(\Lambda) = \hat{e}^2(\Lambda)/(4\pi)$ e il parametro $\hat{a}(\Lambda) = aZ_A(\Lambda)$ calcolati con questa scelta della funzione cutoff sono mostrate nelle figure 5.1 e 5.1. Si noti la presenza del polo di Landau ultravioletto per $\hat{\alpha}(\Lambda)$ a $\Lambda = \Lambda_L$.

La funzione di rescaling dell'elettrone si può ottenere dall'equazione dell'inverso del propagatore dell'elettrone

$$(\Lambda\partial_\Lambda + \frac{\dot{Z}_\psi}{Z_\psi})\hat{\Pi}^{[1]}_{\alpha\beta}(p;\Lambda,\Lambda_0) = \hat{I}_{\alpha\beta}(p;\Lambda,\Lambda_0), \tag{5.12}$$

$$\hat{I}_{\alpha\beta}(p;\Lambda,\Lambda_0) = -i\hat{e}^2(\Lambda)\int_q \Lambda\partial_\Lambda\left[\gamma_\mu S_{\Lambda\Lambda_0}(q+p)\gamma_\nu D^{\mu\nu}_{\Lambda\Lambda_0}(q)\right]_{\alpha\beta}, \tag{5.13}$$

e la condizione di normalizzazione $\partial_{p^\mu}\hat{\Pi}_{\alpha\beta}\Big|_{p^2=0} = \gamma^\mu_{\alpha\beta}$. Il termine $\hat{I}_{\alpha\beta}$ è rappresentato in figura.



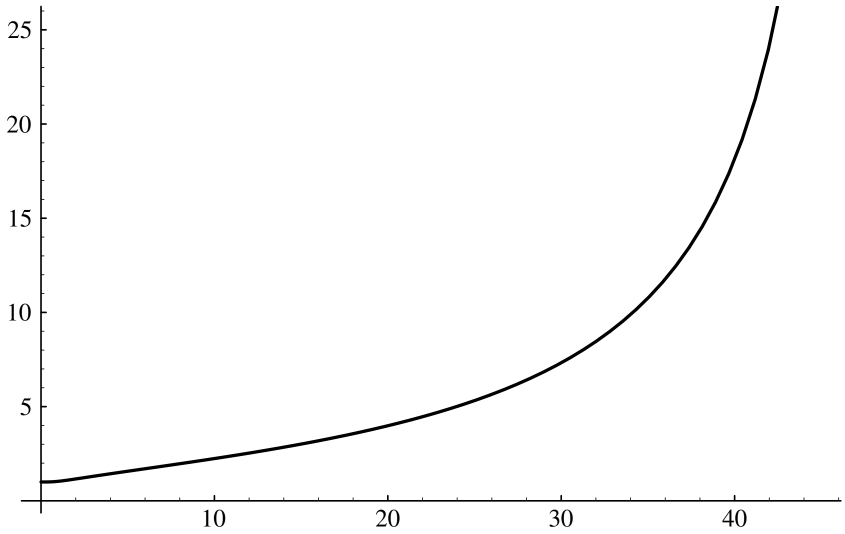


Figura 5.1: Flowing coupling wilsoniana $\hat{\alpha}$ come funzione di Λ/m in QED calcolata usando il cutoff (4.34). La condizione iniziale è $\hat{\alpha}(0) = \alpha = 1$.

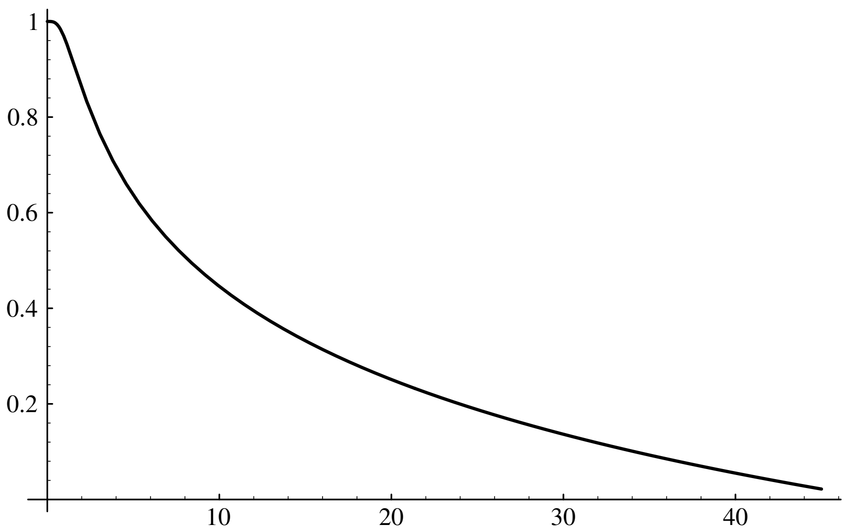


Figura 5.2: Flowing coupling wilsoniana $\hat{a}$ come funzione di Λ/m. La condizione iniziale è $\hat{a}(0) = a = 1$ (gauge di Feynman). Il polo di Landau è a $\Lambda_L = 46.8m$.

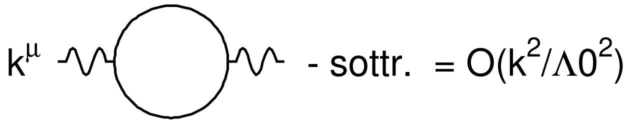


Figura 5.3: Identità di Ward per la parte longitudinale del propagatore del fotone a $\Lambda = 0$, Λ_0 finito.

Anche in questo caso si può calcolare esplicitamente $Z_\psi(\Lambda)$. Qui diamo solo il suo limite asintotico per $\Lambda_L >> \Lambda >> m$

$$Z_\psi(\Lambda) \simeq 1 - \frac{1}{16\pi^2} a e^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2}.$$

Riportiamo infine l'equazione di evoluzione del vertice $\Pi^{[1]}_{\mu\alpha\beta}$, che ci sarà utile nel seguito:

$$(\Lambda\partial_\Lambda + \frac{\dot{Z}_\psi}{Z_\psi} + \frac{1}{2}\frac{\dot{Z}_A}{Z_A})\Pi^{[1]}_{\mu\alpha\beta}(p,p';\Lambda,\Lambda_0) = \hat{I}_{\mu\alpha\beta}(p,p';\Lambda,\Lambda_0), \tag{5.14}$$

$$\hat{I}_{\mu\alpha\beta}(p,p';\Lambda,\Lambda_0) = -i\hat{e}^3(\Lambda)\int_q \Lambda\partial_\Lambda \left[\gamma^\rho S_{\Lambda\Lambda_0}(q+p)\gamma_\mu S_{\Lambda\Lambda_0}(q+p')\gamma^\sigma D_{\Lambda\Lambda_0,\sigma\rho}(q)\right]_{\alpha\beta}.$$

5.2 Studio delle identità di Ward a un loop

In questo paragrafo studiamo esplicitamente le identità di Ward della QED a un loop, nel caso della teoria delle perturbazioni ordinaria, come preparazione allo studio del caso risommato. Come si è visto nel capitolo 3 in QED con sottrazioni a momenti nulli teoremi generali assicurano la validità delle identità di Ward per i vertici fisici, nel limite in cui il cutoff ultravioletto viene rimosso, a tutti gli ordini perturbativi. Qui mostriamo come funziona il meccanismo con qualche esempio esplicito ad un loop.

Consideriamo in primo luogo l'identità di Ward per il vertice $\Gamma^{(1)}_{\mu\nu}(k;\Lambda_0)$ alla scala fisica $\Lambda = 0$. In questo caso l'identità è rappresentata in figura 5.3 e si scrive nella forma

$$k^\mu \Gamma^{(1)}_{\mu\nu,irr}(k;\Lambda_0) = k_\nu \Delta^{(1)}_L(k^2;\Lambda_0) \tag{5.15}$$

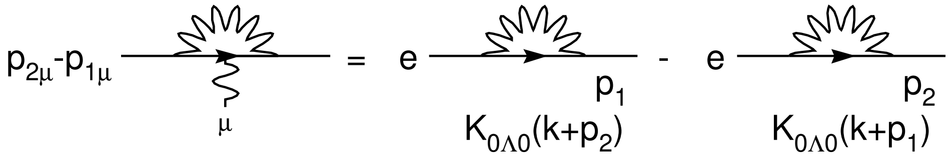


Figura 5.4: Identità di Ward per il vertice $\Gamma^{(1)}_{\mu\alpha\beta}(p_1, p_2; \Lambda_0)$, in cui entra in momento p_1, esce il momento p_2 e k indica il momento del fotone virtuale.

dove $\Gamma^{(1)}_{\mu\nu,irr}(k; \Lambda_0) = -\int_0^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1} I^{(0)}_{\mu\nu,irr}(k; \Lambda_1, \Lambda_0)$ è dato esplicitamente dalla formula

$$\Gamma^{(1)}_{\mu\nu,irr} \propto \mathrm{Tr} \int_q \gamma_\mu S_{0\Lambda_0}(q) \gamma_\nu S_{0\Lambda_0}(q+k) - \text{sottr.} \tag{5.16}$$

dove le sottrazioni sono date esplicitamente dalla formula (3.102). L'integrale di Feynman che definisce la parte longitudinale del propagatore del fotone $\Delta^{(1)}_L(k^2; \Lambda_0)$ può essere riscritto sotto forma di differenza di integrali usando la relazione $\not{k} = (\not{k} + \not{q} - m) - (\not{q} - m)$. Traslando il momento d'integrazione nel secondo integrale $(q \to q - k)$ si ottiene

$$\Delta^{(1)}_L \propto \frac{1}{k^2} \int_q \mathrm{Tr}[S_{0\Lambda_0}(q)\not{k}] K_{0\Lambda_0}(q)(K_{0\Lambda_0}(q-k) - K_{0\Lambda_0}(q+k)) - \text{sottr.} \tag{5.17}$$

Sviluppando l'integrale non sottratto per piccoli momenti e masse (si noti che il limite $k^2 \to 0$ è regolare) si ottiene un'espressione del tipo

$$c_1 \Lambda_0^2 + c_2 m^2 + c_3 k^2 + O(m^2/\Lambda_0^2, k^2/\Lambda_0^2) \tag{5.18}$$

in cui i coefficienti numerici c_i si possono ottenere specificando un cutoff opportuno.

Dall'espressione (5.18) eseguendo le sottrazioni a momenti nulli e facendo il limite $\Lambda_0 \to \infty$ si ottiene $\Delta^{(1)}_L \equiv 0$, come dev'essere.

Consideriamo ora l' identità di Ward per il vertice $\Gamma^{(1)}_{\mu\alpha\beta}(p_1, p_2; \Lambda_0)$,

$$(p_2 - p_1)^\mu \Gamma^{(1)}_{\mu\alpha\beta,irr}(p_1, p_2; \Lambda_0) - e\Gamma^{(1)}_{\alpha\beta,irr}(p_2; \Lambda_0) + e\Gamma^{(1)}_{\alpha\beta,irr}(p_1; \Lambda_0) = \Delta^{(1)}_{\alpha\beta}. \tag{5.19}$$

Sfruttando l'identità rappresentata in figura 5.4, che discende dalla ovvia relazione

$$\frac{1}{\not{k} + \not{p}_2 - m + i\varepsilon} (\not{p}_2 - \not{p}_1) \frac{1}{\not{k} + \not{p}_1 - m + i\varepsilon} = \frac{1}{\not{k} + \not{p}_1 - m + i\varepsilon} - \frac{1}{\not{k} + \not{p}_2 - m + i\varepsilon},$$

e tenendo conto delle sottrazioni (3.103),(3.104) si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)} &= -ie^3 \int_k D^{\rho\sigma}_{0\Lambda_0}(k)\gamma_\rho S_{0\Lambda_0}(k+p_1)\gamma_\sigma[K_{0\Lambda_0}(k+p_2)-1] \\ &-p_1^\mu \frac{\partial}{\partial \bar{p}^\mu}\left[ie^3 \int_k D^{\rho\sigma}_{0\Lambda_0}(k)\gamma_\rho S_{0\Lambda_0}(k+\bar{p})\gamma_\sigma\right]_{\bar{p}=0} - (p_1 \leftrightarrow p_2).\end{aligned} \tag{5.20}$$

Sviluppando nei momenti esterni si vede subito che, grazie alle sottrazione che elimina il termine lineare in $p_2 - p_1$, $\Delta^{(1)}$ può contenere solo potenze descrescenti del cutoff ultravioletto e quindi si annulla nel limite in cui il regolatore viene rimosso.

Con le stesse tecniche, cioè scrivendo il termine di rottura in termine di integrali di superficie e tenendo conto delle sottrazioni, si può verificare esplicitamente che tutti i vertici propri ad un loop soddisfano le identità di Ward, dunque la simmetria di gauge è preservata dalla rinormalizzazione con sottrazioni a momenti nulli, in accordo con i teoremi generali stabiliti nel capitolo 3.

5.3 Identità di Ward risommate

In questa sezione verifichiamo la gauge invarianza dei vertici fisici risommati. La parte longitudinale del propagatore del fotone si ottiene dalla (5.8) scritta in forma integrale,

$$\hat{\Delta}_L^{[1]}(p;\Lambda_0) = -\int_0^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1} Z_A(\Lambda_1)\hat{I}_{L,irr}(p;\Lambda_1,\Lambda_0), \tag{5.21}$$

dove la parte irrilevante di $\hat{I}_L$ è definita dalle sottrazioni $\hat{I}_{L,irr}(p;\Lambda_1,\Lambda_0) = \hat{I}_L - \hat{I}_L(0;\Lambda_1;\Lambda_0) - p^2\partial_{p^2}\hat{I}_L(0;\Lambda_1;\Lambda_0)$.

Usando la (5.4) e la definizione (5.9) si vede subito che il fattore $Z_A(\Lambda_1)$ nella (5.21) si cancella con il fattore proveniente da $\hat{e}^2$ e la sola dipendenza da Λ_1 nell' integrale è nei propagatori tagliati. Dunque $\Pi_L^{[1]}$ è pari alla parte longitudinale del propagatore ottenuto nella teoria perturbativa usuale, che come si è appena visto, decresce con potenze inverse del cutoff ultravioletto Λ_0. Si noti che mentre nella teoria delle perturbazioni usuale la proprietà di rinormalizzabilità assicura che Λ_0 possa essere mandato all'infinito (e dunque la parte longitudinale del propagatore del fotone sparisce), nella teoria delle perturbationi risommata la presenza del polo di Landau alla scala Λ_L impedisce di rimuovere Λ_0. Dunque in questo caso si può recuperare la trasversalità del propagatore del fotone solo per momenti molto minori di Λ_0.

La violazione dell' identità di Ward per il vertice fisico risommato $\Pi^{[1]}_{\mu\alpha\beta}(p_1,p_2;\Lambda_0)$

è data dalla quantità seguente:

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}^{[1]}_{\alpha\beta}(p_1,p_2;\Lambda_0) = (p_2-p_1)^\mu \Pi^{[1]}_{\mu\alpha\beta}(p_1,p_2;\Lambda_0) + \\ - e\Pi^{[1]}_{\alpha\beta}(p_2;\Lambda_0) + e\Pi^{[1]}_{\alpha\beta}(p_1;\Lambda_0).\end{aligned} \tag{5.22}$$

Usando le (5.12), (5.14) e (5.4) si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta^{[1]}_{\alpha\beta} = e^3 \int_0^{\Lambda_0} d\Lambda_1/\Lambda_1 [(Z_\psi Z_A^{-1/2})(\Lambda_1)(p_2-p_1)^\mu \hat{I}_{\mu\alpha\beta,irr}(p_1,p_2;\Lambda_1,\Lambda_0) \\ - eZ_\psi(\Lambda_1)\hat{I}_{\alpha\beta,irr}(p_2;\Lambda_1,\Lambda_0) + eZ_\psi(\Lambda_1)\hat{I}_{\alpha\beta,irr}(p_1;\Lambda_1,\Lambda_0)],\end{aligned} \tag{5.23}$$

dove $\hat{I}_{\mu\alpha\beta,irr}$ e $\hat{I}_{\alpha\beta,irr}$ sono definiti dalle sottrazioni (3.103) e (3.104), che esplicitamente si scrivono

$$\hat{I}_{\mu\alpha\beta,irr}(p_1,p_2;\Lambda_1,\Lambda_0) = \hat{I}_{\mu\alpha\beta}(p_1,p_2;\Lambda_1,\Lambda_0) - \hat{I}_{\mu\alpha\beta}(0,0;\Lambda_1,\Lambda_0)$$

e

$$\hat{I}_{\alpha\beta,irr}(p;\Lambda_1,\Lambda_0) = \hat{I}_{\alpha\beta}(p;\Lambda_1,\Lambda_0) - \hat{I}_{\alpha\beta}(0;\Lambda_1) - p^\mu \partial_{\bar{p}^\mu} \hat{I}_{\alpha\beta}(0;\Lambda_1,\Lambda_0).$$

Il trucco per provare l'identità di Ward

$$\hat{\Delta}^{[1]}_{\alpha\beta} = O(Q^2/\Lambda_0^2), \quad Q^2 = \max\{p_1^2, p_2^2, m^2\}. \tag{5.24}$$

è quello di ricondurla all'identità ordinaria (non risommata) sfruttando il teorema della media integrale. In generale infatti il termine $\hat{\Delta}^{[1]}$ è dato da somme di integrali del tipo

$$\Delta^{[1]} = \int_0^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1} z(\Lambda_1) I^{(0)}_{irr}(\Lambda_1,\Lambda_0) \tag{5.25}$$

dove $z(\Lambda_1)$ è una qualche combinazione delle funzioni $Z_A(\Lambda_1)$ e $Z_\psi(\Lambda_1)$ mentre $I^{(0)}_{irr}$ corrisponde al secondo membro dell'equazione di evoluzione nella teoria delle perturbazioni ordinaria (e quindi è la derivata $\Lambda\partial_\Lambda$ di un diagramma di Feynman sottratto). Per il teorema della media, che vale per funzioni regolari, cioè tali che gli integrali nella (5.26) esistano, sappiamo che esiste un $\bar{\Lambda}$ compreso tra 0 e Λ_0 tale che

$$\int_0^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1} z(\Lambda_1) I^{(0)}_{irr}(\Lambda_1,\Lambda_0) = z(\bar{\Lambda}) \int_0^{\Lambda_0} \frac{d\Lambda_1}{\Lambda_1} I^{(0)}_{irr}(\Lambda_1,\Lambda_0). \tag{5.26}$$

Siccome abbiamo provato che per $\Lambda_0 \to \infty$ l'integrale ottenuto dalla teoria delle perturbazioni ordinaria va a zero con potenze inverse del cutoff ultravioletto, lo stesso risultato vale anche per l'integrale risommato, in quanto $z(\bar{\Lambda}) = 1 + c\log\bar{\Lambda}/m + \cdots$ è regolare per $\Lambda_0 < \Lambda_L$. A differenza del caso non risommato, però, non si può rimuovere Λ_0 a causa del polo di Landau e quindi anche l'identità di Ward del vertice è valida solo in senso debole, cioè per momenti molto minori di Λ_0. Gli stessi ragionamenti si applicano a tutti gli altri vertici ad un loop risommati, quindi tutte le identità di Ward sono verificate a meno di termini $O(Q^2/\Lambda_0^2)$. Si noti che l'argomento è del tutto indipendente dalla forma funzionale delle funzioni di rescaling $Z_i(\Lambda)$.

Appendice A

Altre formulazioni dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione

In letteratura [42, 63, 64, 65, 70] sono diffuse delle formulazioni del gruppo di rinormalizzazione di Wilson differenti dalla procedura di $\Lambda-$rinormalizzazione da noi descritta. Per completezza (e per rendere più semplice il confronto con la letteratura corrente) in questa appendice riportiamo qualche nota sulla formulazioni di Wegner-Houghton [11] e di Polchinski [7].

A.1 L'equazione di evoluzione nella forma di Wegner e Houghton

La formulazione del gruppo di rinormalizzazione di Wilson più intuitiva e più vicina alla meccanica statistica è quella di Wegner e Houghton. In questa formulazione si considera l'azione efficace $\mathcal{S}(\phi;\Lambda)$ ottenuta integrando i gradi di libertà sul guscio infinitesimo tra Λ e $\Lambda+\delta\Lambda$ (cioè si integra sulle fluttuazioni $\phi'(p)$ nulle al di fuori della regione $\Lambda<p<\Lambda+\delta\Lambda$),

$$e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda)} = \int [d\phi'] e^{-\mathcal{S}(\phi+\phi';\Lambda+\delta\Lambda)}. \tag{A.1}$$

Sviluppando

$$\mathcal{S}(\phi+\phi') = \mathcal{S}(\phi) + \int_p' \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi(p)}\phi'(p) + \int_p'\int_q' \frac{1}{2}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi(-p)\delta\phi(q)}\phi'(-p)\phi'(q)+\cdots$$

(la notazione $\int_p'$ indica che l'integrale sui momenti è fatto solo sul guscio $\Lambda<p<\Lambda+\delta\Lambda$; si noti che i termini di ordine superiore possono essere trascurati per $\delta\Lambda$

infinitesimo) e usando la formula dell'integrazione gaussiana (B.7) si ottiene

$$e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda)} \simeq e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda+\delta\Lambda)} \left(\det{}' \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi^2}\right)^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2}\int_p' \int_q' \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi(-p)} \left(\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi^2}\right)^{-1} \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi(q)}\right]$$

in cui si è definito

$$\left(\det{}' \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi^2}\right) = \exp\left(\mathrm{Tr}' \log \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi^2}\right) = \exp\left(\int_q' \log \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi(-q)\delta\phi(q)}\right). \tag{A.2}$$

Sviluppando per $\delta\Lambda$ infinitesimo si ha l'equazione di evoluzione di Wegner-Houghton

$$\delta_\Lambda \mathcal{S}(\phi;\Lambda) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}' \log \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi^2} + \frac{1}{2}\int_p' \int_q' \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi(-p)} \left(\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi^2}\right)^{-1} \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi(q)}. \tag{A.3}$$

Per risolvere la (A.3) si usa tipicamente l'approssimazione di potenziale locale [42]. Troncando ulteriormente il potenziale a un numero finito di termini, per esempio considerando solo i coefficienti rilevanti, resi adimensionali,[1] l'equazione di Wilson si riduce a un sistema finito di equazioni differenziali ordinarie del tipo $\dot{g}_i = f(g_i)$. Il linguaggio del gruppo di rinormalizzazione discreto, usuale in meccanica statistica, si trasporta immediatamente senza difficoltà. In particolare si possono studiare i punti fissi del sistema e calcolare gli esponenti critici linearizzando attorno al punto critico. Questo tipo di approssimazioni sono ben studiate [42, 59, 60, 70] e piuttosto affidabili da un punto di vista numerico.

Il legame tra la formulazione di Wegner-Houghton e il $\Lambda-$RG è stato studiato in [58]; in particolare si prova che troncando il funzionale $\Pi(\phi;\Lambda)$ al termine di potenziale e usando il cutoff a gradino, si ottengono le equazioni di Wegner e Houghton troncate, anche se la forma iniziale dell'equazione di evoluzione è completamente diversa e anche se $\Pi(\phi;\Lambda)$ in generale differisce da $\mathcal{S}(\phi;\Lambda)$. Naturalmente questo risultato non è inaspettato, poichè le quantità universali (per esempio gli esponenti critici) devono essere indipendenti dalla maniera precisa con cui si integrano i gradi di libertà ultravioletti, dunque tutte le formulazioni del gruppo di rinormalizzazione devono alla fine dare gli stessi risultati.

A.2 L'equazione di evoluzione nella forma di Polchinski

Un'altra formulazione del gruppo di rinormalizzazione è quella di Polchinski, che fa uso di una funzione di taglio regolare $K_{\Lambda\Lambda_0}(q)$ per specificare la procedura di

[1] Per esempio in tre dimensioni il troncamento più semplice è

$$\mathcal{S}_{trunc}(\phi,\Lambda) = \int_x \frac{g_1}{2}\Lambda^2\phi^2 + \frac{g_2}{4!}\Lambda\phi^4 + \frac{g_3}{6!}\phi^6.$$

integrazione dei gradi di libertà. L'azione efficace ottenuta integrando i modi tra Λ e Λ_0 è data dall'espressione

$$e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda)} = \int [d\phi']_{\Lambda\Lambda_0} e^{-\mathcal{S}(\phi+\phi';\Lambda_0)} \tag{A.4}$$

in cui la misura funzionale, gaussiana, deprime le frequenze al di fuori dell'intervallo tra Λ e Λ_0 ed è data esplicitamente dalla formula

$$[d\phi']_{\Lambda\Lambda_0} \equiv [d\phi'] \exp(-\frac{1}{2}\phi' \cdot \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\phi'). \tag{A.5}$$

L'equazione di evoluzione si può ottenere direttamente dalla definizione (A.4), derivando rispetto a $\Lambda\partial_\Lambda$ e usando il trucco

$$\Lambda\partial_\Lambda e^{-\frac{1}{2}\phi\cdot\Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\phi} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\dot{\Delta}_{\Lambda\Lambda_0}\left(\frac{\delta}{\delta\phi\delta\phi} + \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\right) e^{-\frac{1}{2}\phi\cdot\Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\phi}. \tag{A.6}$$

In questo modo si ha

$$\Lambda\partial_\Lambda e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda)} = \int [d\phi']\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\dot{\Delta}_{\Lambda\Lambda_0}\left(\frac{\delta}{\delta\phi'\delta\phi'} + \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\right) e^{-\frac{1}{2}\phi'\cdot\Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\phi'} e^{-\mathcal{S}(\phi+\phi';\Lambda_0)};$$

integrando per parti e rimpiazzando $\frac{\delta}{\delta\phi'} \to \frac{\delta}{\delta\phi}$ l'equazione di evoluzione diventa

$$\Lambda\partial_\Lambda e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda)} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\dot{\Delta}_{\Lambda\Lambda_0}\left(\frac{\delta}{\delta\phi\delta\phi} + \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\right) e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda)} \tag{A.7}$$

ovvero

$$\Lambda\partial_\Lambda \mathcal{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\dot{\Delta}_{\Lambda\Lambda_0}\left(\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi\delta\phi} - \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi} - \Delta^{-1}_{\Lambda\Lambda_0}\right). \tag{A.8}$$

Di nuovo, anche se l'equazione (A.8) sembra diversa dalla (A.3), conti espliciti nell'approssimazione di potenziale locale mostrano che alla fine si ottengono gli stessi risultati [64].

Nota 1: La (A.8) si può ottenere anche dalla richiesta che la funzione di partizione

$$Z = e^{-\mathcal{S}(0;0)} = \int [d\phi]_{0\Lambda} e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda)}. \tag{A.9}$$

sia indipendente dalla scala Λ. In questa prospettiva, che è quella originaria di Polchinski, sfruttando la relazione

$$\Lambda\partial_\Lambda e^{-\frac{1}{2}\phi\cdot\Delta^{-1}_{0\Lambda}\phi} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\dot{\Delta}_{0\Lambda}\left(\frac{\delta}{\delta\phi\delta\phi} + \Delta^{-1}_{0\Lambda}\right) e^{-\frac{1}{2}\phi\cdot\Delta^{-1}_{0\Lambda}\phi} \tag{A.10}$$

si ottiene

$$0 = \Lambda\partial_\Lambda Z \;\; = \int [d\phi] \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\dot{\Delta}_{0\Lambda}\left(\tfrac{\delta}{\delta\phi\delta\phi} + \Delta_{0\Lambda}^{-1}\right) e^{-\frac{1}{2}\phi\cdot\Delta_{0\Lambda}^{-1}\phi} e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda)} + e^{-\frac{1}{2}\phi\cdot\Delta_{0\Lambda}^{-1}\phi}\; \Lambda\partial_\Lambda\; e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda)}$$

e integrando per parti si riottiene l'equazione di evoluzione (A.8) nella forma equivalente[2]

$$\Lambda\partial_\Lambda \mathcal{S} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\dot{\Delta}_{0\Lambda}\left(\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi\delta\phi} - \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi} - \Delta_{0\Lambda}^{-1}\right). \tag{A.12}$$

Nota 2: l'equazione di evoluzione originale introdotta da Wilson [5]

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = \int_q \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\sigma_q\delta\sigma_{-q}} + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\sigma_q}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\sigma_{-q}} + \sigma_q\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\sigma_q} + const\right\} \tag{A.13}$$

si ottiene dall'equazione di Polchinski (A.8) con le sostituzioni $\sigma_q = K_{0\Lambda}^{-1/2}(q)\phi(q)$, $\mathcal{H}(\sigma_q;\Lambda) = -\mathcal{S}(\phi;\Lambda)$, $\alpha_q(t) = \log K_{0\Lambda}^{-1/2}(q)/q^2$, $t = \log\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ [23].

Nota 3: il legame tra l'azione efficace di Polchinski e il funzionale $W(j;\Lambda)$ che si usa nella formulazione del $\Lambda-$RG si ricava immediatamente dalla (A.4), che conviene riscrivere nella forma (posto $\hat{\phi} = \phi + \phi'$)

$$e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda)} = e^{-\frac{1}{2}\phi\cdot\Delta_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}\phi}\int [d\hat{\phi}]_{\Lambda\Lambda_0} e^{\hat{\phi}\Delta_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}\phi - \mathcal{S}(\hat{\phi};\Lambda_0)}. \tag{A.14}$$

Usando la definizione della funzione di partizione tagliata (1.9) si ottiene $e^{-\mathcal{S}(\phi;\Lambda)} = e^{-\frac{1}{2}\phi\cdot\Delta_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}\phi} Z(\Delta_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}\phi;\Lambda)$ e quindi

$$W(\Delta_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}\phi;\Lambda) = \frac{1}{2}\phi\cdot\Delta_{\Lambda\Lambda_0}^{-1}\phi - \mathcal{S}(\phi;\Lambda). \tag{A.15}$$

A.3 L'equazione di evoluzione riscalata

Spesso è conveniente adottare una formulazione riscalata dell'equazione di evoluzione. In questo paragrafo prendiamo in considerazione la versione riscalata dell'equazione del $\Lambda-$RG usuale,[3]

$$\dot{\Pi} = -\frac{1}{2}\int_q \dot{R}_{\Lambda\infty}\Gamma_2^{-1}\bar{\Gamma}_{\phi\phi}\Gamma_2^{-1}, \quad R_{\Lambda\infty}(q) = q^2(K_{\Lambda\infty}^{-1}(q) - 1). \tag{A.16}$$

[2] Nel lavoro originale [7] si usa la notazione $\int_x L(\phi;\Lambda) = -\mathcal{S}(\phi;\Lambda)$ e il termine indipendente dai campi viene trascurato perchè non contribuisce alle funzioni di Green.

[3] Naturalmente è possibile considerare anche la formulazione riscalata delle equazioni di Wegner-Houghton, di di Polchinski e di Wilson, come è stato fatto sia nella letteratura originaria [5] che in quella più recente [60, 65, 67].

Per semplicità notazionale nella (A.16) abbiamo considerato una teoria con un solo campo scalare e rimosso il cutoff ultravioletto Λ, tuttavia l'estensione al caso generale è immediata. Introduciamo ora il fattore di riscalamento $Z(\Lambda)$ e definiamo

$$\hat{\phi} = Z^{1/2}(\Lambda)\phi, \quad \hat{R}_{\Lambda\infty} = Z(\Lambda)^{-1}R_{\Lambda\infty}, \quad \hat{\Pi}(\hat{\phi},\Lambda) = \Pi(\phi,\Lambda). \tag{A.17}$$

Le definizioni (A.17) assicurano la validità della relazione $\hat{\Pi}(\hat{\phi},\Lambda) + \frac{1}{2}\hat{\phi}\cdot\hat{R}_{\Lambda\infty}\hat{\phi} = \Pi(\phi,\Lambda) + \frac{1}{2}\phi\cdot R_{\Lambda\infty}\phi$, cioè

$$\hat{\Gamma}(\hat{\phi},\Lambda) = \Gamma(\phi,\Lambda). \tag{A.18}$$

Come conseguenza i vertici propri riscalano come segue:

$$\hat{\Pi}_n = Z^{-n/2}\Pi_n, \quad \hat{\Gamma}_n = Z^{-n/2}\Gamma_n, \quad \hat{\bar{\Gamma}}_{n+2} = Z^{-n/2-1}\bar{\Gamma}_{n+2}. \tag{A.19}$$

L'equazione di evoluzione del funzionale riscalato $\hat{\Pi}(\hat{\phi},\Lambda)$ assume la forma

$$\left(\Lambda\partial_\Lambda + \frac{1}{2}\frac{\dot{Z}}{Z}\hat{\phi}\cdot\frac{\delta}{\delta\hat{\phi}}\right)\hat{\Pi} = \hat{I} + \frac{\dot{Z}}{Z}\hat{J} \tag{A.20}$$

dove $\hat{I}$ ha la forma esplicita

$$\hat{I} = -\frac{1}{2}\int_q \Lambda\partial_\Lambda\hat{R}_{\Lambda\infty}\hat{\Gamma}_2^{-1}\bar{\Gamma}_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\Gamma}_2^{-1} \tag{A.21}$$

e $\hat{J}$ vale

$$\hat{J} = -\frac{1}{2}\int_q \hat{R}_{\Lambda\infty}\hat{\Gamma}_2^{-1}\bar{\Gamma}_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\Gamma}_2^{-1}. \tag{A.22}$$

Derivando la (A.20) si ottengono le equazioni sui vertici propri

$$\left(\Lambda\partial_\Lambda + n\frac{\dot{Z}}{2Z}\right)\hat{\Pi}_n = \hat{I}_n + \frac{\dot{Z}}{Z}\hat{J}_n. \tag{A.23}$$

Il fattore di riscalamento $Z(\Lambda)$ viene scelto in maniera tale che il termine cinetico abbia la normalizzazione canonica, cioè imponendo

$$\partial_{p^2}\hat{\Pi}_2\Big|_{p=0} \equiv 1 \quad \forall\Lambda, \tag{A.24}$$

quindi è dato dalla formula

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = \frac{\partial_{p^2}\hat{I}_2|_0}{1-\partial_{p^2}\hat{J}_2|_0}. \tag{A.25}$$

Nota 1: se la costante di accoppiamento non è troppo grande è possibile trascura il termine $\frac{\dot{Z}}{Z}\hat{J}$ che è di ordine superiore (per esempio in ϕ_6^3 il termine I_n è di ordine g^n mentre $\frac{\dot{Z}}{Z}\hat{J}$ è di ordine g^{n+2}). Questa osservazione si applica ai calcoli da noi svolti per la teoria ϕ_6^3.

Nota 2: se la funzione cutoff soddisfa la legge di scala [23]

$$\dot{R}_{\Lambda\infty} = 2kR_{\Lambda\infty} \tag{A.26}$$

cioè

$$R_{\Lambda\infty}(q^2) = q^2\left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right)^k \tag{A.27}$$

il funzionale $\hat{J}$ è proporzionale a I, $\hat{J} = \frac{1}{2k}\hat{I}$ e la (A.20) si riscrive

$$\left(\Lambda\partial_\Lambda + \frac{1}{2}\frac{\dot{Z}}{Z}\hat{\phi}\cdot\frac{\delta}{\delta\hat{\phi}}\right)\hat{\Pi} = \left(1 + \frac{\dot{Z}}{2kZ}\right)\hat{I}. \tag{A.28}$$

In questo caso il fattore di rescaling è dato dalla formula

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = \frac{\partial_{p^2}\hat{I}_2|_0}{1-(2k)^{-1}\partial_{p^2}\hat{I}_2|_0}. \tag{A.29}$$

Si noti che per $k \to \infty$ la funzione

$$K_{0\Lambda}(q;k) = \frac{R_{\Lambda\infty}}{q^2 + R_{\Lambda\infty}} = \frac{\Lambda^{2k}}{\Lambda^{2k} + q^{2k}} \to \theta(1 - q^2/\Lambda^2) \tag{A.30}$$

tende alla funzione a gradino. In questo limite la (A.28) ha la forma

$$\left(\Lambda\partial_\Lambda + \frac{1}{2}\frac{\dot{Z}}{Z}\hat{\phi}\cdot\frac{\delta}{\delta\hat{\phi}}\right)\hat{\Pi} = \hat{I}(\hat{\phi};\Lambda\Lambda_0) \tag{A.31}$$

e il termine $\hat{J}$ si può trascurare, anche nel regime di accoppiamento forte.

Nota 3: definendo

$$\hat{\gamma}_\phi = -\frac{1}{2}\frac{\dot{Z}}{Z}, \quad \hat{\beta}_i\partial_{g_i}\hat{\Pi} = -\hat{I} - \frac{\dot{Z}}{Z}\hat{J}, \tag{A.32}$$

la (A.20) assume la stessa forma dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione di Gell-Mann e Low,

$$\left(\Lambda\partial_\Lambda - \hat{\gamma}_\phi\hat{\phi}\cdot\frac{\delta}{\delta\hat{\phi}} + \hat{\beta}_i\partial_{g_i}\right)\hat{\Pi} = 0, \tag{A.33}$$

anche se ora si segue il flusso di un numero infinito di costanti adimensionali g_i. Nella forma (A.33) l'equazione di evoluzione si può ricondurre[4] a un'equazione che descrive come cambia l'azione $\hat{\Pi}$ sotto trasformazioni di scala,

$$W\hat{\Pi} = \int_x (x^\mu \partial_\mu + d_\phi)\hat{\phi}\frac{\delta}{\delta\hat{\phi}}\Pi = \hat{\beta}_i \partial_{g_i}\hat{\Pi} \tag{A.34}$$

dove $d_\phi = D_\phi + \hat{\gamma}_\phi$ è la dimensione anomala del campo ϕ. In particolare c'è invarianza di scala nel punto fisso $\hat{\beta}_i(g_j^*) = 0$.

[4]Basta usare l'identità, valida per motivi dimensionali, $\left(\Lambda\partial_\Lambda + \int_x (x^\mu\partial_\mu + D_\phi)\hat{\phi}\frac{\delta}{\delta\hat{\phi}}\right)\Pi = 0$ e ripetere i ragionamenti svolti nel capitolo 2 per il $\mu-$RG.

Appendice B

Convenzioni adottate e formule utili

In questa appendice diamo qualche dettaglio in più sulle convenzioni adottate e riportiamo qualche formula utile per i calcoli svolti nel testo.

B.1 Trasformate di Fourier

Usiamo le seguenti abbreviazioni:

$$\int_x \equiv \int d^d x, \quad \int_p \equiv \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}; \tag{B.1}$$

le trasformate di Fourier si scrivono

$$\phi(p) = \int_x e^{ip\cdot x}\phi(x), \quad \phi(x) = \int_p e^{-ip\cdot x}\ \phi(p), \tag{B.2a}$$

$$\phi^*(p) = \int_x e^{-ip\cdot x}\phi^*(x), \quad \phi^*(x) = \int_p e^{ip\cdot x}\ \phi^*(p); \tag{B.2b}$$

se il campo ϕ è reale

$$\phi^*(p) = \phi(-p). \tag{B.3}$$

La formula di Plancharel si scrive

$$\int_x \phi^*(x)\phi(x) = \int_p \phi^*(p)\phi(p); \tag{B.4}$$

integrali del tipo $\int_x \phi_1(x)\cdots\phi_n(x)$ si scrivono

$$\int_x \phi_1(x)\cdots\phi_n(x) = \int_{p_1\dots p_n} (2\pi)^4\delta(p_1+\cdots+p_n)\psi_1(p_1)\cdots\psi_n(p_n). \tag{B.5}$$

Per le derivate funzionali usiamo le convenzioni[1]

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} = \delta^{(d)}(x-y), \quad \frac{\delta\phi(p)}{\delta\phi(q)} = (2\pi)^d \delta^{(d)}(p-q). \tag{B.6}$$

B.2 Integrali gaussiani

Per comodità del lettore riportiamo le seguenti formule standard [33] valide a meno di un fattore di propozionalità infinito.

- Integrazione di campi commutanti reali:

$$\int d\phi \exp(-\frac{1}{2}\phi^T A\phi \pm \phi^T j) = \det(2\pi/A)^{1/2} \exp(\frac{1}{2}j^T A^{-1} j) \tag{B.7}$$

- Integrazione di campi commutanti complessi[2]:

$$\int d\phi d\phi^* \exp(-\phi^+ A\phi \pm \phi^+ j \pm j^+\phi) = \det|2\pi/A| \exp(j^+ A^{-1} j) \tag{B.8}$$

- Integrazione di campi anticommutanti "reali"[3]:

$$\int d\psi \exp(-\frac{1}{2}\psi^T A\psi \pm \psi^T j) = \det|A|^{1/2} \exp(\frac{1}{2}j^T A^{-1} j) \tag{B.9}$$

- Integrazione di campi anticommutanti "complessi":

$$\int d\psi d\psi^* \exp(-\psi^+ A\psi \pm \psi^+ j \pm j^+\psi) = \det|A| \exp(j^+ A^{-1} j) \tag{B.10}$$

B.3 Parametrizzazione di Feynman

La formula generale per manipolare i diagrammi di Feynman ad un loop con n propagatori e masse m_i si ottiene dalla relazione [41]

$$F_n \equiv \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{[(q+p_i)^2 + m_i^2]^{\alpha_i}} = \frac{\Gamma(|\alpha|)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 d^n x \frac{x^{\alpha-1}\delta(1-|x|)}{[\sum_i x_i(q+p_i)^2 + m_i^2]^{|\alpha|}} \tag{B.11}$$

---

[1] In [10] si usano invece le convenzioni $\frac{\delta\phi(p)}{\delta\phi(q)} = \delta^{(d)}(p-q)$.

[2] Il modulo di una matrice complessa è $|A| \equiv (A^+A)^{1/2} = \exp\left[\frac{1}{2}\log(A^+A)\right]$ e il logaritmo è ben definito se A^+A non ha autovalori nulli.

[3] Diciamo che gli elementi di un'algebra di Grassman sono "reali" se soddisfano $a^* = a$; chiaramente gli oggetti a non sono veri numeri reali e hanno proprietà del tutto diverse (per esempio $a^2 = 0\ \forall a$).

dove

$$|\alpha| \equiv \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad |x| \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i \quad x^{\alpha-1} \equiv \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i-1}, \quad \Gamma(a) \equiv (a-1)! \tag{B.12}$$

Traslando il momento d'integrazione ($q \to q - \sum_i x_i p_i$) si ottiene

$$\int_q F_n = \int_q \frac{\Gamma(|\alpha|)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 d^n x \frac{x^{\alpha-1}\delta(1-|x|)}{[q^2 - (\sum_i x_i p_i)^2 + \sum_i x_i(p_i^2 + m_i^2)]^{|\alpha|}}. \tag{B.13}$$

In particolare nella tesi si fa largo uso della formula

$$\int_q f(q,p) F_2 = \int_q f(q,p) \frac{1}{(q^2+m_1^2)^u} \frac{1}{((q+p)^2+m_2^2)^v} =$$

$$\frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \int_0^1 dx \frac{f(q-p(1-x),p) x^{u-1}(1-x)^{v-1}}{[q^2+p^2 x(1-x) + m_1^2 x + m_2^2(1-x)]^{u+v}}. \tag{B.14}$$

Bibliografia

[1] J. D. Bjorken, S. D. Drell, "Relativistic Quantum Field Theory", McGraw-Hill, New York, 1964

[2] N.N. Bogoliubov e D. Parasiuk, Acta Math. 97 (1957) 227, K. Hepp, Commun. Math. Phys. 2 (1966) 301

[3] W. Zimmermann, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, Vol.1*, eds. S. Deser,M. Grisaru e H. Pendleton (M.I.T. Press, Cambridge, Mass.)

[4] J. H. Lowenstein, Commun. Math. Phys. 24 (1971) 1, "BPHZ renormalization" in: *Renormalization Theory*, eds. G. Velo e A. A. Wightman (D. Reidel Publishing Co. 1976)

[5] K.G. Wilson, Phys.Rev. B4 (1971) 3174; K.G. Wilson e I.G. Kogut, Phys. Rep. 12 (1974) 75

[6] J. Polchinski, Lectures presented at TASI 1992, hep-th/9210046

[7] J. Polchinski, Nucl. Phys. B231 (1984) 269

[8] C. Wetterich, "Exact evolution equation for the effective potential", Phys. Lett. 301B (1993) 90

[9] T.R. Morris, Int. J. Mod. Phys. A9 (1994) 2411

[10] M.Bonini, M. D'Attanasio, G. Marchesini, Nucl. Phys. B409 (1993) 441

[11] F. Wegner, A. Houghton, Phys. Rev. A8 (1973) 401

[12] G. Keller, C. Kopper "Perturbative Renormalization of Massless phi**4 in Four Dimensions with Flow Equations", Helv. Phys. Acta 65:32-52,1992, Commun. Math. Phys.161:515-532,1994

[13] R.D. Ball, R.S. Thorne, Annals Phys.236:117-204,1994; Annals Phys.241:337-367,1995

[14] M. Reuter e C. Wetterich, Nucl. Phys. B417 (1994) 181

[15] M.Bonini, M. D'Attanasio, G. Marchesini, Nucl. Phys. B418 (1994) 81

[16] M.Bonini, M. D'Attanasio, G. Marchesini, Nucl. Phys. B421 (1994) 429, Nucl. Phys. B437 (1995) 163

[17] U. Ellwanger, Phys. Lett. 335B (1994) 364, hep-th/9402077

[18] M. D'Attanasio and T.R. Morris, Phys. Lett. 378B (1996) 213

[19] C. Becchi, in *Elementary Particles, Field Theory and Statistical Mechanics*, Eds. M.Bonini, G.Marchesini and E. Onofri, Parma University 1993, hep-th/9607188

[20] B.J. Warr, Ann. Phys. (NY) 183 (1988) 1,89

[21] M. Bonini, G. Marchesini and M. Simionato, Nucl. Phys. B483 (1997) 475

[22] M. Bonini, M. Simionato, "Wilson Renormalization Group and Improved Perturbation Theory", hep-th/9705146

[23] T.R. Morris, "Properties of derivative expansion approximations to the renormalization group", *Proceedings of 3rd International Conference on Renormalization Group '96*, Dubna, hep-th/9610012

[24] T.R. Morris, "Elements of the continuum renormalization group", Invited talk at *Yukawa International Seminar on Non-Perturbative QCD: Structure of the QCD Vacuum (YKIS 97)*, Kyoto, Japan, hep-th/9802039

[25] U. Ellwanger, Z.Phys.C69:687-698,1996

[26] U. Ellwanger, M. Hirsch and A. Weber, Z. Phys. 69 (1996) 687, "The heavy quark potential from Wilson's exact renormalization group", hep-ph/9606468

[27] D.U. Jungnickel, C. Wetterich, *Lectures given at NATO Advanced Study Institute on Confinement, Duality and Nonperturbative Aspects of QCD*, Cambridge, England, 23 Jun - 4 Jul 1997, hep-ph/9710397

[28] Ken-Ichi Aoki, Kei-ichi Morikawa, Jun-Ichi Sumi, Haruhiko Terao, Masashi Tomoyose, Prog.Theor.Phys.97:479-490,1997, hep-ph/9612459

[29] J. Adams, J. Berges, S. Bornholdt and C. Wetterich, Mod. Phys. Lett. A10 (1995) 2367

[30] M. D'Attanasio, M. Pietroni, Nucl.Phys. B 472:711-737, 1996; Nucl.Phys. B 498:443-466, 1997

[31] S. Falkenberg, B. Geyer, "Effective Average Action in N=1 Super-Yang-Mills Theory", hep-th/9802113

[32] T. R. Morris, *Invited key talk at NATO Advanced Research Workshop on Theoretical Physics: New Developments in Quantum Field Theory*, Zakopane, Poland, 14-20 Jun 1997, hep-th/9709100

[33] J. Zinn-Justin,"Quantum Field Theory and Critical Phenomena", Clarendon Press, Oxford 1989.

[34] G. Parisi, "Statistical Field Theory', *Frontiers in Physics 66*, Redwood City, USA, Addison-Wesley, 1988

[35] I. Montvay, G. Münster, "Quantum Fields on a Lattice", Cambridge University Press, Cambridge 1994

[36] C. Itzykson, J. M. Drouffe, "Statistical Field Theory", Cambridge University Press, Cambridge

[37] C. Itzykson, J. B. Zuber "Quantum Field Theory", Mc Graw-Hill, International Edition, New York 1985

[38] S. Pokorski, "Gauge field theories", Cambridge University Press, Cambridge 1986

[39] J. C. Collins, "Renormalization", Cambridge University Press

[40] Ramon, "Field Theory", Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981

[41] T. Muta, "Perturbative Quantum Chromodynamics", World Scientific 1986

[42] A. Hasenfratz e P. Hasenfratz, Nucl. Phys. B270 (1986) 687

[43] J. Hughes and J. Liu, Nucl. Phys. B307 (1988) 183.

[44] M.Bonini, M. D'Attanasio, G. Marchesini, Phys.Lett.B329:249-258,1994

[45] M. Bonini, F. Vian, UPRF-97-07, hep-th/9707094, accepted for publication in Nuclear Physics B.

[46] M. Bonini, F. Vian, *in preparation*

[47] G. Keller, C. Kopper, ,"Renormalizability Proof for QED based on Flow Equations", Phys.Lett.B273:323-332,1991, Comm. Math. Phys. 176, 193 (1996)

[48] G. Keller, C. Kopper, "Perturbative Renormalization of Composite Operators via Flow Equations", Comm. Math. Phys. 148,445 (1992),

[49] G. Keller, C. Kopper, C. Schophaus, “Perturbative Renormalization with Flow Equations in Minkowski Space”, Helv.Phys.Acta 70:247-274,1997

[50] M. Pernici, M. Raciti, F. Riva, hep-th/9710145

[51] M. Pernici, M. Raciti, F. Riva, Nucl.Phys.B458:355-386,1996

[52] D. F. Litim, J. M. Pawlowski, “Flow equations for Yang-Mills Theories in General Axial Gauges”, hep-th/9802064

[53] U. Ellwanger, Z.Phys.C62:503-510,1994

[54] U. Ellwanger, Z.Phys.C76:721-727,1997

[55] T. Papenbrok, C. Wetterich, “Two loop results from one loop computations”, Z.Phys.C65:519-535,1995

[56] N. Tetradis e C. Wetterich, Nucl. Phys. B422 (1994) 541

[57] N. Tetradis e D.F. Litim,“Analytical Solutions of Exact Renormalization Group Equations”, Nucl. Phys. B464 (1996) 492

[58] T.R. Morris, “Momentum Scale Expansion of Sharp Cutoff Flow Equations”, Nucl. Phys. B458[FS] (1996) 477.

[59] T.R. Morris, Phys. Lett. 329B (1994) 241, Phys. Lett. 334B (1994) 355

[60] T. R. Morris, Nucl.Phys.B495:477-504,1997

[61] M. D’Attanasio, T. R. Morris, “Large N and the Renormalization Group”, Phys.Lett.B409:363-370,1997

[62] G. R. Golner, hep-th/9801124

[63] Ken-Ichi Aoki, Kei-ichi Morikawa, Wataru Souma, Jun-ichi Sumi, Haruhiko Terao, Prog.Theor.Phys.95:409-420,1996, hep-ph/9612458

[64] J. Comellas, A. Travesset, “O(N) models within the local potential approximation”, hep-ph/9701028

[65] J. Comellas, “Polchinski equation, reparametrization invariance and the derivate expansion”, Nucl.Phys.B509:662-686,1998 hep-th/9705129

[66] J. Comellas, Y. Kubyshin and E. Moreno, “Exact renormalization group study of fermionic theories”, hep-th/9512086.

[67] R. D. Ball, P. E. Haagensen, J. I. Latorre, E. Moreno, “Scheme Independence and the Exact Renormalization Group”, Phys.Lett.B347:80-88,1995

[68] R.D. Ball, R. S. Thorne, “Decoupling Theorem in Effective Scalar Field Theory”, Ann. Phys. 241 (1995) 368-393

[69] L. Girardello, A. Zaffaroni, Nucl. Phys. B424 (1994) 219

[70] S.B. Liao and J. Polonyi, Ann. Phys. (NY) 222 (1993) 122

[71] S.B. Liao and J. Polonyi, “Renormalization Group and Universality”, Phys. Rev. D51 (1995) 4474

[72] J. Alexandre, V. Branchina, J. Polonyi, “Global Renormalization Group”, hep-th/9712147

[73] V. Branchina, H. Mohrbach, J. Polonyi, hep-th/9612111, hep-th/9612110 , hep-lat/9610030

[74] V. Branchina, J. Polonyi, HEPTH-9606160, Jun 1996, “Istantons in cutoff theories”, Nucl.Phys.B433:99-122,1995

[75] V. Branchina, J. Polonyi, “Istanton Induced Phenomena in Effective Standard Model”, Talk given at Eotvos Conference in Science: Strong and Electroweak Matter (SEWM97), Eger, Hungary, 21-25 May 1997, hep-ph/9709276

[76] A. Bonanno, D. Zappalà, “Two loop results from the derivative expansion of the blocked action”, hep-th/9712038

[77] S. Weinberg, “Phenomenological Lagrangians”, Physica 96 A (1979) 327

[78] J. Gomis, S. Weinberg, “Are non-renormalizable gauge theories renormalizable ?”, Nucl.Phys.B469:473-487,1996

[79] B. R. Holstein, “Chiral Perturbation Theory: a Primer”, In *Seattle 1993 Proceedings, Phenomenology and Lattice QCD 1-61*

[80] H. Leutwyler, “Light Quark Effective Theory”, in *Lecture Notes, Summer School on Effective Theories and Fundamental Interactions*, Erice, 1996, hep-ph/9609465,

[81] M. Neubert, “B Decays and the Heavy-Quark Expansion”, hep-ph/9702375

[82] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, Ann. Phys. (NY) 98 (1976) 287

[83] T. Kugo, I. Ojima, “Covariant operator formalism of gauge theories”, Suppl. of the Progress of Theoretical Physics 66 (1979)

[84] J. H. Lowenstein, Comm. Math. Phys. 47 (1976) 53, Nucl. Phys. B96 (1975) 189

[85] Y. M. P. Lam, Phys. Rev. D 6 (1972) 2145, Phys. Rev. D 7 (1973) 2943 T. E. Clark, J. H. Lowenstein, Nucl. Phys. B113 (1976) 109

[86] L. Baulieu, "Perturbative gauge theories", Physics Reports 129 (1985) 1-74

[87] J. Wess e B. Zumino, Phys. Lett. 37B (1971) 95

[88] Zinn-Justin in *Trends in Elementary Particle Theory*, Lectures Notes in Physics vol. 37, Springer, Berlin 1975

[89] I. A. Batalin, C. A. Vilkoviski, Phys. Lett. 69B (1977) 309, Phys. Lett. 102B (1981) 27, Phys. Rev. D 28 (1983) 2567, Nucl. Phys. B234 (1984) 106

[90] J. Gomis, J.Paris e S. Samuel, Phys. Rep. 259 (1995) 1.

[91] W. Troost, P. van Nieuwenhuizen, A. Van Proeyen, Nucl. Phys. B333:727,1990

[92] B. DeWitt, "Supermanifolds", Cambridge University Press, Cambridge 1992

[93] A. Diaz, W. Troost, P. van Nieuwenhuizen, A. Van Proeyen, Int. J. Mod. Phys. A4:3959,1989.

[94] Everton M.C. Abreu, Nelson R.F Braga, hep-th/9708035

[95] C. Becchi, "Lectures on the renormalization of gauge theories", in *Relativity, Group and Topology II (les Houches 1983)*, Eds. B. S. deWitt e R. Stora (Elsevier Science Publications B. V. 1984)

[96] O. Piguet e A. Rouet, "Symmetries in perturbative quantum field theory", Phys. Rep. 76 (1981) 1.

[97] O. Piguet e S. P. Sorella, "Algebraic renormalization", Lecture Notes in Physics, Vol. m28, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

[98] S. L. Adler, W. A. Bardeen, Phys. Rev. 182 (1969) 1517

[99] O. Piguet e S. P. Sorella, "Adler-Bardeen theorem and vanishing of the gauge beta function", Nucl. Phys. B395:661-671,1993

[100] O. Piguet, S. P. Sorella, Nucl. Phys. B381:373-393,1992

[101] G. Costa, T. Marinucci, J. Julve, M. Tonin, Il Nuovo Cimento 38A (1977) 373

[102] M. Tonin, “Dimensional regularization and anomalies in chiral gauge theories”, Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.) 29B,C (1992) 137-151

[103] G. Bandelloni, C. Becchi, A. Blasi, R. Collina, Comm. Math. Phys. 72 (1980) 239

[104] H. Kluberg-Stern, J.B. Zuber, Phys. Rev. D 12 (1975) 467

[105] H. Kluberg-Stern, J.B. Zuber, Phys. Rev. D 12 (1975) 482

[106] L. F. Abbot, Nucl. Phys. B185 (1981) 189

[107] D. M. Capper, A. Mac Lean, Nucl. Phys. B203 (1982) 413

[108] P. A. Grassi, Nucl.Phys.B462:524-550,1996

[109] J. Fröhlich, Nucl. Phys. B200 (1982) 281

[110] M. Lüscher, P. Weisz, Nucl. Phys. B290 (1987) 25, Nucl. Phys. B295 (1988) 65, Phys. Lett. 212BB (1988) 472, Nucl. Phys. B318 (1989) 705

[111] V. Azcoiti, “Strongly Coupled QED”, Nucl. Phys. B53, Proc. Suppl. (1997) 148-154, In *St. Louis 1996, Lattice 96* 148-154

[112] M. Göckeler, R. Horsley, V. Linke, P. Racow, G. Schierholz, H. Stüben, “Is there a Landau Pole Problem in QED ?”, hep-th/9712244

[113] C.M. Bender e T.T. Wu, Phys. Rev. Letters 27 (1971) 461; Phys. Rev. D7 (1973) 1620

[114] E. Brezin, G. Parisi, J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D 16 (1977) 408

[115] J. C. Guillou, J. Zinn-Justin, eds,“Large Order Behavior of Perturbation Theory”, North-Holland (1990)

[116] J.Zinn-Justin, Nucl. Phys. B192 (1981) 125, Nucl. Phys. B218 (1983) 333, J. Math. Phys. 25 (1984) 549

[117] S.J. Brodsky, G.P. Lepage e P.B. Mackenzie, Phys. Rev. D 28 (1983) 228

[118] M. Beneke and V.M. Braun, Phys. Lett. 348B (1995) 513

[119] M. Beneke, V.M. Braun, N.Kivel, Phys. Lett. 348B (1995) 513

[120] G. Parisi, Phys. Lett. 76B (1978) 65

[121] G.'t Hooft, Can we make sense of the "Quantum Chromodynamics?", in *"The whys of Subnuclear Physics"*, Proc. Erice summer school, 1977, ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, 1979

[122] R. Coquereaux, Phys. Rev. D 23 (1981) 2276

[123] J. Fisher, "On the role of power expansions in quantum field theory", hep-ph/9704351

[124] G. Di Cecio, Tesi di Dottorato di Ricerca, Università di Pisa 1994.

[125] M. D'Attanasio, Tesi di Dottorato di Ricerca, Università di Parma 1995

[126] G. Altarelli, CERN-TH-95-309, "Introduction to Renormalons", *Lectures presented at E. Majorana School*, Erice, July 1995

[127] N.V. Krasnikov, A.A. Pivovarov, Mod.Phys.Lett.A11:835-852,1996, hep-ph/9510207, hep-ph/9602272, hep-ph/9512213

[128] A. C. Mattingly e P. M. Stevenson, Phys. Rev. D 49 (1994) 437

[129] A. I. Alekseev, "QCD running coupling: Freezing versus enhancement in the infrared region", hep-ph/9802372

[130] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein e V. I. Zacharov, Nucl. Phys. B147 (1979) 385,448,519;
V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein e V. I. Zacharov, "Wilson's OPE: can it fail ?", Nucl. Phys. B249 (1985) 445

[131] F. David, Nucl. Phys. B209 (1982) 465, Nucl. Phys. B234 (1984) 493, Nucl. Phys. B263 (1986) 508

[132] V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B385 (1992) 452;

[133] A.H. Müller, in *QCD 20 Years Later*, vol. 1 (World Scientific, Singapore, 1993)

[134] Yu. L. Dokshitzer, B. R. Webber, Phys. Lett. 352B (1995) 451

[135] Yu. L. Dokshitzer, N.G. Uraltsev, Phys. Lett. 380B (1996) 141

[136] Yu. L. Dokshitzer, G. Marchesini, B. R. Webber, Nucl.Phys.B469:93-142,1996

[137] G. Burgio, F. Di Renzo, G. Marchesini, UPRF-97-06, hep-ph/9706209

[138] F. Di Renzo, G. Marchesini, E. Onofri, UPRF-96-488, "Infrared Renormalons and Finite Volume", Nucl.Phys.B497:435-444,1997

[139] D. Espriu, R. Tarrach, Phys.Lett.B383:482-486,1996, hep-ph/9604431

[140] De Rafael, Phys.Lett.B387:603-608,1996, hep-ph/9603359

[141] B. Lautrup, Phys. Lett. 69B (1977) 109

[142] S. Peris, E. de Rafael, “Low energy QCD and Ultraviolet Renormalons”, hep-ph/9701418

[143] N. J. Watson “The Gauge Independent QCD Effective Charge” hep-ph/9606381

[144] G. Grunberg, Phys. Lett. 308B (1993) 355

[145] G. Grunberg, Phys. Lett. 325B (1994) 441

[146] G. Grunberg, Phys. Lett. 372B (1996) 121, hep-ph/9512203

[147] G. Grunberg, “Fixed points and Power Corrections”, CPTH-PC463-0896, Aug 1996, *Talk Presented at International Workshop on Deep Inelastic Scattering and Related Phenomena (DIS 96)*, Rome, Italy, 15-19 Apr 1996, hep-ph/9608375

[148] G. Grunberg, hep-ph/9705290

[149] J. Papavassiliou, E. de Rafael, N.J. Watson, Nucl.Phys.B503:79-116,1997

[150] J. Papavassiliou, A. Pilaftsis, Phys.Rev.D54:5315-5335,1996

[151] A. Pilaftsis, Nucl.Phys.B487:467-491,1997

[152] G. Passarino, M. Veltman, Nucl. Phys. B160 (1979) 151

[153] M. Rossi, A. P. Flitney, “Simbolic Algebra and Renormalization of Gauge Theories”, Comput.Phys.Commun.90:189-200,1995 (hep-th/9508074)

[154] A. Hsieh, E. Yehudai, “HIP: Simbolic High-Energy Physics Calculations”, Comput.Phys.6:253-261,1992

[155] S. Wolfram, “*Mathematica:* a System for Doing Mathematics”, Addison-Wesley Publishing Company, 1988

[156] M. Stipcevic, “FEYN: a package for drawing Feynman graphs”, PAW-Physics Analysis Workstation, CERN Program Library Long Writeup Q121