UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

DIPARTIMENTO DI FISICA "GALILEO GALILEI"

TESI DI LAUREA

FORMULAZIONE GEOMETRICA DI TEORIE DI SUPERGRAVITÀ IN DIVERSE DIMENSIONI

RELATORE: CH.MO PROF. MARIO TONIN

LAUREANDO: MICHELE SIMIONATO

ANNO ACCADEMICO 1992-1993

Indice

Capitolo 0

Introduzione

Da molti anni ormai si cerca da più parti e con svariate tecniche di andare al di là del Modello Standard, verso una visione unificata delle leggi fisiche fondamentali.

Il primo tentativo in questo senso è rappresentato dalle cosiddette teorie di grande unificazione (GUT) in cui si cerca di dedurre il gruppo di simmetrie del modello standard $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ da un qualche gruppo semplice (per esempio $SU(5)$, $SO(10)$ o E_6) che si rompe spontaneamente ad energie dell'ordine di $10^{15}\ GeV$. In questo modo è possibile unificare quark e leptoni e spiegare l'uguaglianza della carica elettrica tra protone ed elettrone; inoltre è possibile far diminuire il numero dei parametri liberi del modello standard (che sono molti: masse e cariche delle particelle, costanti di accoppiamento dei tre fattori del gruppo di gauge, angoli di mixing, etc.). Nonostante ciò anche i modelli GUT presentano vari problemi tra i quali il più importante è quello della gerarchia: le masse dei bosoni di Higgs sono "innaturalmente" piccole rispetto alla scala di unificazione.

Tale problema è risolto se si postula una nuova importantissima simmetria della natura, la supersimmetria per scambi tra bosoni e fermioni. Tale assunzione a livello quantistico ha anche molti altri notevoli pregi: in particolare la supersimmetria dà luogo a "miracolose" cancellazioni che migliorano notevolmente il comportamento ultravioletto della teoria.

Per questo motivo si è pensato che estendendo la supersimmetria a livello locale fosse possibile anche dare una versione quantistica della gravità; tuttavia i lavori svolti hanno dimostrato che tale speranza è irrealizzabile (le teorie di supergravità permangono non rinormalizzabili). Per dare una versione quantistica consistente della gravità è allora necessario modificare anche il concetto stesso di particella puntiforme e sostituirlo con quello di stringa.

Per estrarre dalla teoria di stringa informazioni fenomenologiche è necessario considerare il suo limite a basse energie (basse rispetto alla scala di Planck $m_P \sim 10^{19}\ GeV$): questo è costituito da una teoria di campo locale e più precisamente da una teoria di supergravità in 10 dimensioni accoppiata con un gruppo di Yang-Mills (supergravità di

Chaplin-Manton).[1] Per passare da questa ad una teoria fenomenologicamente promettente, la supergravità $D = 4$, $N = 1$[2] è necessario compattificare 6 delle 10 dimensioni su una varietà complessa detta spazio di Calabi-Yau. Tali spazi sono piuttosto complicati e studiando le loro proprietà topologiche è possibile estrarre molte caratteristiche interessanti (per esempio il numero di famiglie leptoniche).

Il generale il meccanismo di compattificazione è molto importante, anche al di fuori dal caso $D = 10$, in quanto permette di spiegare le simmetrie della teoria 4-dimensionale come conseguenze delle simmetrie esistenti nelle dimensioni aggiuntive (è la famosa idea di Kaluza-Klein degli anni '20, che permette di unificare il campo elettromagnetico alla gravità sfruttando una quinta dimensione) ; inoltre la compattificazione permette, almeno in linea di principio, di dare predizioni sperimentali partendo da una qualunque teoria in $D > 4$.

L'importanza dello studio delle teorie di supergravità viste come limite classico di teorie di stringa (in $D = 10$) o studiate di per sè ($\forall D > 4$) è quindi evidente; in questa tesi ci occuperemo in dettaglio di tale argomento. In particolare adotteremo un approccio geometrico molto potente (group manifold approach) con cui analizzeremo varie teorie di supergravità in tutte le dimensioni da 3 a 11.

Il programma della tesi è il seguente:

CAPITOLO 1. Il group manifold approach. Si tratta di un capitolo tecnico che dà varie nozioni indispensabili sulla geometria dei gruppi di Lie e delle varietà simmetriche. In particolare si introduce il G.M.A. nel caso non supersimmetrico e si rideriva la relatività generale ordinaria e di De Sitter in questo formalismo.

CAPITOLO 2. Gravità estesa. In questo capitolo vedremo cosa succede quando si accoppia la gravità alla materia (teorie di gauge e modello σ non lineare) e qual'è il significato delle teorie con più di quattro dimensioni. Anche questo è un capitolo tecnico essenziale alla comprensione del capitolo 7.

CAPITOLO 3. Spinori. In questo capitolo si dà una trattazione generale delle proprietà degli spinori in tutte le dimensioni e si considera il loro accoppiamento alla gravità: ciò è naturalmente indispensabile in vista alle applicazioni alla supergravità.

[1] Un'approssimazione migliore della teoria di stringa è fornita dalla supergravità priva di anomalie (AFS) in 10 dimensioni.

[2] Questa a sua volta si può pensare come un'estensione localmente supersimmetrica delle *GUT*.

CAPITOLO 4. Supergruppi e supergravità. In questo capitolo si estende il G.M.A. ai supergruppi e si spiega in questo formalismo l'origine delle supersimmetrie. Verrà trattata come esempio applicativo la supergravità semplice in quattro dimensioni.

CAPITOLO 5. Il principio d'azione reonomico. Questo capitolo è dedicato all'enunciazione e all'esemplificazione del principio d'azione reonomico (in 3,4 e 5 dimensioni) secondo il quale le equazioni del moto della supergravità sono deducibili da un'azione sul group manifold completamente determinata dalle simmetrie della teoria.

CAPITOLO 6. Teorie con $k-$forme. In questo capitolo si introduce il concetto di algebra differenziale libera che viene esemplificato in due teorie di supergravità (in D=3 e 6) contenenti $k-$forme (vedremo che tutte le teorie in dimensione maggiore di 5 contengono $k-$forme nel multipletto del gravitone).

CAPITOLO 7. Teorie con 0-forme. In questo capitolo si considera il problema dell'estensione off-shell delle teorie di supergravità e si analizza la possibilità dell'accoppiamento con multipletti di Yang-Mills e multipletti scalari nelle varie dimensioni. Il caso più interessante è quello in $D = 4,\ N = 1$.

CAPITOLO 8. Supergravità in dimensione grande. In questo capitolo trattiamo alcune teorie di supergravità in 7,8,9,10 e 11 dimensioni. Di particolare interesse è la supergravità in 10 dimensioni, per quanto si è detto nell'introduzione. Tratteremo sia la versione anomala che quella priva di anomalie.

APPENDICE A. Appunti di geometria differenziale. Questa breve appendice è dedicata al richiamo di alcune convenzioni e trucchi utili.

APPENDICE B. Teoria della rappresentazioni dei gruppi. In questa appendice riportiamo dei concetti sulle rappresentazioni finito-dimensionali dei gruppi classici e delle tecniche utilissime per la risoluzione delle equazioni della supergravità.

APPENDICE C. Superalgebra di Poincarè. Qui diamo una formulazione generale della supergravità di Poincarè on-shell in tutte le dimensioni e con tutti i possibili accoppiamenti. Di particolare interesse sono le tabelle che riportano il contenuto in campi di tutti i possibili supermultipletti.

Capitolo 1

IL GROUP MANIFOLD APPROACH

1.1 Introduzione

Lo scopo principale di questo capitolo è quello di introdurre il cosiddetto "group manifold approach", formalismo che permette di dare una formulazione geometrica profonda delle teorie di gravità e supergravità, basata sul concetto di gruppo di Lie come varietà differenziabile; a differenza dell' approccio "di gauge", in cui lo spazio fisico è assegnato a priori e il gruppo di simmetria è scelto opportunamente, qui lo spaziotempo è costruito a partire dal gruppo: prima si assegna il gruppo e poi si deduce lo spazio. I primi paragrafi sono un pò tecnici e descrivono la teoria geometrica dei gruppi di Lie che servirà in seguito. A partire dal paragrafo (1.7) si tratta più esplicitamente il group manifold approach nel caso concreto del gruppo di De Sitter e nel paragrafo (1.11) si descrive la relatività generale in tale approccio.

1.2 Gruppi di Lie

In questo paragrafo si darà una trattazione geometrica astratta dei gruppi di Lie. Cominciamo ricordando la definizione: un gruppo di Lie è una varietà differenziabile H in cui le leggi di prodotto e inversione sono differenziabili. Fissato un sistema di coordinate locali centrate nell' elemento neutro e ogni punto a nell' intorno di e si può scrivere

$$a = a(x^{\mathcal{A}}), \quad a(0) \equiv e. \tag{1.1}$$

Indichiamo gli insiemi dei vettori, delle 1-forme e dei tensori di H rispettivamente con $V(H), V^*(H), T(H)$. La struttura di gruppo individua due classi fondamentali di diffeomorfismi: la traslazione sinistra

$$L_a b = ab \tag{1.2}$$

e la traslazione destra

$$R_a b = ba; \tag{1.3}$$

si noti che L_a e R_b commutano

$$L_a R_b = R_b L_a \tag{1.4}$$

e che valgono

$$L_e = 1\!\!1, \quad L_{ab} = L_a L_b \tag{1.5}$$
$$R_e = 1\!\!1, \quad R_{ab} = R_b R_a. \tag{1.6}$$

L_a e R_a dicriminano due tipi di campi tensoriali: quelli invarianti sinistri (L_a^* indica la mappa di pullback associata a L_a)

$$L_a^* t = t \tag{1.7}$$

e quelli invarianti destri (R_a^* è associata a R_a)

$$R_a^* t = t. \tag{1.8}$$

In particolare un campo scalare è invariante sinistro sse è costante,

$$(L_a^* f)(b) = f(ab) = f(b) \quad \Leftrightarrow \quad f(a) \equiv f(e) = cost. \tag{1.9}$$

Nota: se consideriamo dei campi scalari Λ a valori in una rappresentazione matriciale di H in $GL(n, \mathcal{C})$, $\Lambda(e) = 1\!\!1, \quad \Lambda(a)\Lambda(b) = \Lambda(ab)$, l'azione della traslazione sinistra si scrive [1];

$$(L_a^* \Lambda)(b) = \Lambda(ab) = \Lambda(a)\Lambda(b) \quad \Leftrightarrow \quad L_a^* \Lambda = \Lambda(a)\Lambda \tag{1.10}$$

si vede allora immediatamente che la 1-forma matriciale $\mu = \bar{\Lambda} d\Lambda$ [2] è invariante sinistra:

$$L_a^* (\bar{\Lambda} d\Lambda) = \bar{\Lambda}\bar{\Lambda}(a)\Lambda(a) d\Lambda = \bar{\Lambda} d\Lambda. \tag{1.11}$$

Lo stesso si può fare per ogni rappresentazione lineare $H(Z)$ in uno spazio vettoriale Z. Si noti che in generale ogni gruppo di Lie, almeno in un intorno dell'elemento neutro, si può rappresentare con matrici del tipo $\Lambda(\varepsilon) = \exp(T_{\mathcal{A}} \varepsilon^{\mathcal{A}})$.

[1] Per la traslazione destra vale $R_a^* \Lambda = \Lambda \Lambda(a)$.
[2] Si intende $\bar{\Lambda} \equiv \Lambda^{-1}$.

1.3 Algebre di Lie

Concentriamoci ora sui campi vettoriali invarianti sinistri. Il loro insieme costituisce l'algebra di Lie astratta H' di H. Vettori invarianti sinistri si ottengono come generatori di traslazione destre; precisamente sia $h(t)$ un sottogruppo a un parametro di H; si dice generatore di traslazioni destre[3]

$$\varrho = \delta R_h \text{ definito da } \delta R_h(f) = \frac{d}{dt} f \circ R_h \Big|_{t=0} . \tag{1.13}$$

Si prova facilmente quanto voluto,

$$\begin{aligned} (L_a^* \varrho)(f) &= \varrho(f \circ L_{\bar{a}})|L_a \\ &= \tfrac{d}{dt} f \circ L_{\bar{a}} R_h L_a \big|_{t=0} \\ &= \delta R_h(f) \\ &= \varrho(f). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Nota: per dare una forma esplicita a ϱ serve una rappresentazione matriciale concreta di H: risulta allora

$$\varrho\Lambda = \frac{d}{dt} \Lambda \circ R_h \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Lambda\Lambda(h) \Big|_{t=0} = \Lambda \delta\Lambda; \tag{1.15}$$

in particolare per

$$\Lambda(h(t)) = \exp(t T_{\mathcal{A}} \varepsilon^{\mathcal{A}}) \tag{1.16}$$

risulta

$$\delta\Lambda = \frac{d}{dt} \Lambda(h) \Big|_{t=0} = T_{\mathcal{A}} \varepsilon^{\mathcal{A}}; \tag{1.17}$$

dunque i vettori invarianti sinistri ϱ che formano l'algebra di Lie astratta sono rappresentati dalle matrici $\delta\Lambda$ che formano l'algebra di Lie concreta.

---

[3] Analogamente si dice generatore di traslazioni sinistre

$$\lambda = \delta L_h \text{ definito da } \delta L_h(f) = \frac{d}{dt} f \circ L_h \Big|_{t=0} . \tag{1.12}$$

Sia $t_{\mathcal{A}}$ una base di $V(H)$ invariante sinistra; allora l'insieme di tutti i campi vettoriali invarianti sinistri (l'algebra di Lie) H' è dato dalle combinazioni lineari a coefficienti costanti

$$H' = \{t_{\mathcal{A}}\varepsilon^{\mathcal{A}} : \varepsilon^{\mathcal{A}} \in \Re\}; \tag{1.18}$$

dunque H' è uno spazio vettoriale reale a N dimensioni.

Se indichiamo con $\mu^{\mathcal{A}}$ la base duale a $t_{\mathcal{A}}$ (chiaramente pure $\mu^{\mathcal{A}}$ è invariante sinistra) la proprietà $L_a^* d = dL_a^*$ comporta che anche $d\mu^{\mathcal{A}}$ sia invariante sinistro: dunque è una combinazione lineare dei $\mu^{\mathcal{A}}$ (rispetto al prodotto esterno $\hat{}$, che sottointendiamo)

$$d\mu^{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\mu^{\mathcal{B}}\mu^{\mathcal{C}} \tag{1.19}$$

a coefficienti $c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ costanti. La (1.19), scritta anche

$$d\mu^{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\mu^{\mathcal{A}}\mu^{\mathcal{B}} = 0 \tag{1.20}$$

si dice equazione di Maurer-Cartan.

Applicando la ben nota relazione, valida per ogni varietà differenziabile

$$d\alpha(u,v) = u(\alpha(v)) - v(\alpha(u)) - \alpha([u,v]), \quad u,v \in T(H), \alpha \in T^*(H) \tag{1.21}$$

alle basi $\mu^{\mathcal{A}}, t_{\mathcal{A}}$ si ottiene

$$d\mu^{\mathcal{A}}(t_{\mathcal{B}}, t_{\mathcal{C}}) = -[t_{\mathcal{B}}, t_{\mathcal{C}}]^{\mathcal{A}} \tag{1.22}$$

cioè la formulazione duale della (1.20)

$$[t_{\mathcal{B}}, t_{\mathcal{C}}] = t_{\mathcal{A}}c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}. \tag{1.23}$$

I coefficienti $c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ si dicono costanti di struttura dell' algebra H'; si noti che la condizione $d^2 = 0$ applicata alla (1.20) comporta l'identità di Jacobi

$$c^{\mathcal{A}}_{[B|E|}c^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}D]} = 0. \tag{1.24}$$

Nella pratica le 1-forme $\mu^{\mathcal{A}}$ si determinano usando una rappresentazione lineare $H(Z)$ di H su uno spazio vettoriale Z; si può infatti scrivere

$$\mu = \bar{\Lambda}d\Lambda = T_{\mathcal{A}}\mu^{\mathcal{A}} \tag{1.25}$$

con $T_{\mathcal{A}}$ generatori dell'algebra concreta, e c'è un isomorfismo di algebre tra H' e $H'(Z)$, in quanto valgono le relazioni di commutazione

$$[T_{\mathcal{A}}, T_{\mathcal{B}}] = T_{\mathcal{C}} \tilde{c}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B} \text{ con } \tilde{c}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B} = c^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B}. \tag{1.26}$$

La dimostrazione avviene come segue:

$$\begin{aligned} 0 = d\mu + \mu\mu \quad &= T_{\mathcal{A}} d\mu^{\mathcal{A}} + T_{\mathcal{A}} T_{\mathcal{B}} \mu^{\mathcal{A}} \mu^{\mathcal{B}} \\ &= T_{\mathcal{A}} d\mu^{\mathcal{A}} + \tfrac{1}{2}[T_{\mathcal{A}}, T_{\mathcal{B}}] \mu^{\mathcal{A}} \mu^{\mathcal{B}} \\ &= T_{\mathcal{C}} (d\mu^{\mathcal{C}} + \tfrac{1}{2} \tilde{c}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B} \mu^{\mathcal{A}} \mu^{\mathcal{B}}) \\ &= T_{\mathcal{C}} (-\tfrac{1}{2} c^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B} \mu^{\mathcal{A}} \mu^{\mathcal{B}} + \tfrac{1}{2} \tilde{c}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B} \mu^{\mathcal{A}} \mu^{\mathcal{B}}) \\ &\Rightarrow c^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B} = \tilde{c}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Riportiamo come esempio il caso di $SU(2)$; la 1-forma μ si può ottenere dalla parametrizzazione con gli angoli di Eulero;

$$\Lambda(\chi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \exp(i\frac{\chi+\phi}{2}) \cos\frac{\theta}{2} & \exp(i\frac{\chi-\phi}{2}) \sin\frac{\theta}{2} \\ -\exp(i\frac{\phi-\chi}{2}) \sin\frac{\theta}{2} & \exp(i\frac{\chi-\phi}{2}) \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

da cui segue

$$\begin{cases} \mu^1 = \cos\phi \sin\theta d\chi - \sin\phi d\theta \\ \mu^2 = \sin\phi \sin\theta d\chi \\ \mu^3 = d\phi + \cos\phi d\chi \end{cases} \tag{1.29}$$

con $T_{\mathcal{A}} = \frac{\sigma_{\mathcal{A}}}{2i}, \sigma_{\mathcal{A}}$ matrici di Pauli.
Nel caso del gruppo ortogonale invece si può usare la parametrizzazione

$$\Lambda(\varepsilon) = e^{T_{\mathcal{A}} \varepsilon^{\mathcal{A}}} = e^{\frac{1}{2} T_{aa'} \varepsilon^{aa'}} \tag{1.30}$$

con

$$(T_{aa'})^c{}_d \equiv 2\eta^c{}_{[a} \eta_{a']d} \tag{1.31}$$

Tale parametrizzazione descrive la componente connessa all'unità di $O(P, D-P)$, componente che indichiamo con $SO(P, D-P)$.[4] Ricavare esplicitamente i $\mu^{\mathcal{A}}$ dalla (1.25) è però complicato (si devono fare sviluppi in serie dell'esponenziale).

[4] In particolare le matrici di $SO(P, D-P)$ hanno determinante

$$\det \exp(\frac{1}{2} T_{aa'} \varepsilon^{aa'}) = \exp(Tr(\frac{1}{2} T_{aa'} \varepsilon^{aa'})) = \exp(0) = 1$$

.

Consideriamo infine il caso del toro $N-$dimensionale $T^N = U(1) \times \cdots \times U(1)$:

$$\Lambda(\varepsilon) = \begin{pmatrix} e^{i\varepsilon_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\varepsilon_n} \end{pmatrix}, \tag{1.32}$$

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & i & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.33}$$

$$\mu^{\mathcal{A}} = d\varepsilon^{\mathcal{A}}. \tag{1.34}$$

La(1.27) permette di ricavare esplicitamente le costanti di struttura; per esempio per il gruppo metrico si può procedere nel modo seguente: [5]

$$\begin{aligned} 0 &= (d\mu^{ab} + \mu^a{}_c\mu^{cb})(t_{ef}, t_{gh}) \\ &= -\mu^{ab}([t_{ef}, t_{gh}]) + \mu^a{}_c(t_{ef})\mu^{cb}(t_{gh}) - \mu^a{}_c(t_{gh})\mu^{cb}(t_{ef}) \\ &= -c^{ab}_{ef,gh} + 4\eta^a{}_{[e}\eta_{f]c}\eta^c{}_{[g}\eta_{h]}{}^b - 4\eta_{[g}{}^a\eta_{b]c}\eta^c{}_{[e}\eta^b_{f]} \\ &\Rightarrow c^{ab}_{ef,gh} = 8\eta^{[a}{}_{[e}\eta_{f][g}\eta_{h]}{}^{b]}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Per i gruppi abeliani come T^N le costanti di struttura sono tutte nulle.

1.4 La rappresentazione aggiunta

Con le traslazioni destra e sinistra si può costruire una terza classe di diffeomorfismi, gli automorfismi interni

$$I_a = L_a R_{\bar{a}} \tag{1.36}$$

soddisfacenti

$$I_e = \mathbb{1}, \quad I_{ab} = I_a I_b \tag{1.37}$$

I_a^* sulle funzioni a valori in $H(Z)$ (o in $H'(Z)$) è data da

$$I_a^*\Lambda = \Lambda(a)\Lambda\bar{\Lambda}(a) \tag{1.38}$$

[5]Usiamo il trucco $\mu^{aa'}(t_{bb'}) = 2\eta^{aa'}_{bb'}$, $\eta^{aa'}_{bb'} \equiv \eta^{[a}_{[b}\eta^{a']}_{b']}$, che assicura $\frac{1}{2}t_{aa'}\mu^{aa'}(v) = v$.

Si consideri ora la rappresentazione lineare di H in H' definita da

$$\begin{aligned} I : H &\longrightarrow H' \\ a &\longrightarrow I^*_a \\ I^*_a v \equiv L_a R_{\bar{a}} v &= R_{\bar{a}} L_a v = R_{\bar{a}} v \end{aligned} \tag{1.39}$$

la (1.39) si dice rappresentazione aggiunta astratta. È immediato verificare che è effettivamente una rappresentazione; in particolare I^*_a manda vettori invarianti sinistri in vettori invarianti sinistri ($L^*_b(I^*_a v) = I^*_a v$). Sulla base $t_{\mathcal{A}}$ di H' risulta

$$I^*_a t_{\mathcal{A}} = t_{\mathcal{B}} \Lambda^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}; \tag{1.40}$$

per determinare effettivamente i coefficienti $\Lambda^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}$ si considera l'azione di I^*_a sui generatori di una rappresentazione matriciale di H',

$$I^*_a T_{\mathcal{E}} = \Lambda(a) T_{\mathcal{E}} \bar{\Lambda}(a) = T_{\mathcal{B}} \Lambda^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{E}}. \tag{1.41}$$

Sia ora $a(\tau)$ il diffeomorfismo a un parametro generato da $t_{\mathcal{A}}\varepsilon^{\mathcal{A}}$, $a(\tau) = e^{\tau t_{\mathcal{A}}\varepsilon^{\mathcal{A}}}$; si ha allora $\Lambda(a(\tau)) = e^{\tau T_{\mathcal{A}}\varepsilon^{\mathcal{A}}}$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(I^*_a T_{\mathcal{B}}) &= \frac{d}{d\tau}\Lambda T_{\mathcal{B}}\bar{\Lambda} + \Lambda T_{\mathcal{B}}\frac{d}{d\tau}\bar{\Lambda} \\ &= e^{\tau T_{\mathcal{A}}\varepsilon^{\mathcal{A}}}[T_{\mathcal{A}}\varepsilon^{\mathcal{A}}, T_{\mathcal{B}}]e^{-\tau T_{\mathcal{A}}\varepsilon^{\mathcal{A}}} \\ &= (I^*_a T_{\mathcal{C}}) c^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B}\varepsilon^{\mathcal{A}}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

L'equazione differenziale lineare matriciale (1.42) dà la forma esplicita di $\Lambda^{\mathcal{C}}{}_{\mathcal{B}}(a)$, note le costanti di struttura $c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}C}$: infatti ha come soluzione[6]

$$I^*_a T_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{C}} (e^{\varepsilon})^{\mathcal{C}}{}_{\mathcal{B}}, \quad \varepsilon^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \equiv c^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B}\varepsilon^{\mathcal{A}} \tag{1.43}$$

Le matrici e^{ε} formano la rappresentazione aggiunta concreta del gruppo H; le matrici

$$(C_{\mathcal{A}})^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{C}} \equiv c^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}C} \tag{1.44}$$

si possono pensare come suoi generatori[7] e la (1.41) si può scrivere, per $T_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{A}}$,

$$\bar{\Lambda}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{D}} c^{\mathcal{D}}{}_{\mathcal{E}\mathcal{F}} \bar{\Lambda}^{\mathcal{F}}{}_{\mathcal{C}} = c^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \Lambda^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{E}} \quad (c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}C} = \Lambda^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}} c^{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}F} \bar{\Lambda}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \bar{\Lambda}^{\mathcal{F}}_{\mathcal{C}}) \tag{1.45}$$

dunque le costanti di struttura sono tensori $H-$invarianti.

[6] È del tipo $\dot{x} = xA \quad \Rightarrow \quad x(\tau) = x(0)e^{\tau A}$.

[7] $[C_{\mathcal{A}}, C_{\mathcal{B}}] = C_{\mathcal{C}}\ c^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B}$ è assicurata dall'identità di Jacobi .

Veniamo ora agli esempi: nel caso del gruppo $SU(2)$ $c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}C} = \varepsilon^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}C}$ e la rappresentazione aggiunta è fatta di rotazioni tridimensionali $H' \longrightarrow H'$:

$$\Lambda \frac{\sigma_{\mathcal{B}}}{2i} \bar{\Lambda} = \frac{\sigma_{\mathcal{C}}}{2i} R^{\mathcal{C}}{}_{\mathcal{B}}, \tag{1.46}$$

$R^{\mathcal{C}}{}_{\mathcal{B}}(\vec{\varepsilon}) = \exp(\varepsilon^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B}\varepsilon^{\mathcal{A}})$ rotazione di asse $\vec{\varepsilon}$ e angolo $\theta = |\vec{\varepsilon}|$.

Nel caso del gruppo ortogonale si ha[8]

$$\begin{aligned}(\Lambda T_{aa'}\bar{\Lambda})^c{}_d &= \Lambda^c{}_e 2\eta^e{}_{[a}\eta_{a']f}\bar{\Lambda}^f{}_d \\ &= 2\Lambda^c{}_{[a}\bar{\Lambda}_{a']d} = 2\eta^c{}_{[e}\eta_{f]d}\Lambda^e{}_a\bar{\Lambda}_{a'}{}^f \\ &= (T_{ef})^c{}_d\Lambda^e{}_a\Lambda^f{}_{a'}.\end{aligned} \tag{1.47}$$

Per i gruppi abeliani come T^N la rappresentazione aggiunta è banale:

$$\Lambda T_{\mathcal{A}}\bar{\Lambda} = T_{\mathcal{A}}. \tag{1.48}$$

1.5 Metrica di Killing

In questo paragrafo ci occuperemo in dettaglio di gruppi semisemplici, cioè con metrica di Killing

$$h_{\mathcal{A}B} = c^{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}C}\; c^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}D} \tag{1.49}$$

non degenere. In tal caso H' diventa uno spazio vettoriale metrico[9]e H diventa una varietà metrica con tensore metrico $h = h_{\mathcal{A}B}\mu^{\mathcal{A}} \otimes \mu^{\mathcal{B}}$. Una forma alternativa è

$$h = Tr(\mu \otimes \mu) \text{ con } \mu \equiv C_{\mathcal{A}}\mu^{\mathcal{A}}; \tag{1.50}$$

infatti si ha

$$h(t_{\mathcal{A}}, t_{\mathcal{B}}) = Tr(C_{\mathcal{A}}C_{\mathcal{B}}) = h_{\mathcal{A}B}. \tag{1.51}$$

La metrica (1.50) si dice di Killing e gode della fondamentale proprietà di essere biinvariante:

$$L^*_a h = h, \quad R^*_a h = h \tag{1.52}$$

[8]Si usa $\bar{\Lambda}_a{}^b \equiv \eta_{ac}\bar{\Lambda}^c{}_d\eta^{db} = \Lambda^T{}_a{}^b = \Lambda^b{}_a$.

[9]In particolare le matrici $\Lambda^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}$ della rappresentazione aggiunta sono isometrie di h.

La dimostrazione sfrutta l'invarianza sinistra dei $\mu^{\mathcal{A}}$ e il lemma

$$R_a^*\mu = C_{\mathcal{A}} R_a^* \mu^{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{A}} R_a^* L_{\bar{a}}^* \mu^{\mathcal{A}} = I_{\bar{a}}^* \mu = \bar{\Lambda}(a)\mu\Lambda(a); \tag{1.53}$$

segue

$$\begin{aligned} R_a^* Tr(\mu \otimes \mu) &= Tr(R_a^*\mu \otimes R_a^*\mu) \\ &= Tr(\Lambda(a)\mu\bar{\Lambda}(a) \otimes \Lambda(a)\mu\bar{\Lambda}(a)) \\ &= Tr(\mu \otimes \mu). \end{aligned} \tag{1.54}$$

Abbassando e alzando gli indici con $h_{\mathcal{A}B}$ la biinvarianza dà come conseguenza la totale antisimmetria delle costanti di struttura:

$$c_{\mathcal{A}BC} = c_{[ABC]} \tag{1.55}$$

in quanto

$$h(t_{\mathcal{A}}, t_{\mathcal{B}}) \quad = Tr(e^{tC_{\mathcal{C}}} C_{\mathcal{A}} e^{-tC_{\mathcal{C}}} e^{tC_{\mathcal{C}}} C_{\mathcal{B}} e^{-tC_{\mathcal{C}}}) \tag{1.56}$$

implica, applicando l'operatore $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$,

$$\begin{aligned} 0 \quad &= Tr([C_{\mathcal{C}}, C_{\mathcal{A}}]C_{\mathcal{B}} + C_{\mathcal{A}}[C_{\mathcal{C}}, C_{\mathcal{B}}]) \quad \Rightarrow \\ 0 \quad &= c^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}A} h_{\mathcal{D}B} + c^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}B} h_{\mathcal{A}D} \\ \Rightarrow \quad & c_{\mathcal{B}AC} = -c_{\mathcal{A}BC} \end{aligned} \tag{1.57}$$

Nell'esempio del gruppo $SU(2)$ risulta

$$h = \varepsilon^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}D}\mu^{\mathcal{A}} \otimes \varepsilon^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}C}\mu^{\mathcal{B}} = -\varepsilon_{\mathcal{A}D}{}^{\mathcal{C}} \varepsilon_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{D}}{}_{\mathcal{C}} \mu^{\mathcal{A}} \otimes \mu^{\mathcal{B}} = -2\delta_{\mathcal{A}B}\mu^{\mathcal{A}} \otimes \mu^{\mathcal{B}} \tag{1.58}$$

invece nel caso del gruppo metrico

$$\begin{aligned} h \quad &= \tfrac{1}{16} c^{cc'}_{aa'dd'} c^{dd'}_{bb'cc'} \mu^{aa'} \otimes \mu^{bb'} \\ &= \text{sostituendo le (1.35)} \\ &= (D-2)\mu^c{}_d \otimes \mu^d{}_c \end{aligned} \tag{1.59}$$

Nota : anche il gruppo non semisemplice T^N può essere pensato come varietà riemanniana banale con metrica canonica $g_{\mathcal{A}B} = \delta_{\mathcal{A}B}$.

1.6 Gruppi soffici

In questo paragrafo vogliamo studiare cosa succede se invece di usare la base canonica si usa un'altra base generica di $V^*(H)$, non invariante sinistra. Indichiamo con $\mu^{\mathcal{A}}$ la nuova base (detta "soffice") e con $\hat{\mu}^{\mathcal{A}}$ la vecchia (detta "rigida"); analogamente per $t_{\mathcal{A}}$ e $\hat{t}_{\mathcal{A}}$. Si pone ancora

$$\mu_T = T_{\mathcal{A}}\mu^{\mathcal{A}} \tag{1.60}$$

con $T_{\mathcal{A}}$ rappresentazione matriciale di H' (eventualmente $T_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{A}}$; in tal caso abbreviamo $\mu \equiv \mu_C$), ma ora

$$\mu_T \neq \bar{\Lambda} d\Lambda \tag{1.61}$$

e l'identità di Maurer-Cartan diventa la definizione delle 2-forme di curvatura

$$\breve{\mu} = d\mu + \mu\mu \quad (\breve{\mu}^{\mathcal{A}} = d\mu^{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{BC}}\mu^{\mathcal{B}}\mu^{\mathcal{C}}) \tag{1.62}$$

da cui la relazione sulla base $t_{\mathcal{A}}$ duale a $\mu^{\mathcal{A}}$[10]

$$[t_{\mathcal{B}}, t_{\mathcal{C}}] = t_{\mathcal{A}}(c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}C} - \breve{\mu}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B}). \tag{1.63}$$

La condizione $d^2 = 0$ dà le identità di Bianchi

$$d\breve{\mu} + [\mu, \breve{\mu}] = 0 \qquad (d\breve{\mu}^{\mathcal{A}} + c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{BC}}\mu^{B}\breve{\mu}^{\mathcal{C}} = 0) \tag{1.64}$$

È naturale definire la seguente derivata covariante sulle $H-$forme (forme differenziali con indici in una rappresentazione finito-dimensionale di H):

$$D\nu^{\alpha} = d\nu^{\alpha} + \mu^{\alpha}{}_{\beta}\nu^{\beta}, \quad \mu^{\alpha}{}_{\beta} \equiv T_{\mathcal{A}}{}^{\alpha}{}_{\beta}\mu^{\mathcal{A}}. \tag{1.65}$$

In particolare le identità di Bianchi (1.64) si possono riscrivere (gli $\mathcal{A}$ sono indici nella rappresentazione aggiunta di H)

$$D\breve{\mu}^{\mathcal{A}} = d\breve{\mu}^{\mathcal{A}} + \mu^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}\breve{\mu}^{\mathcal{B}} = 0, \quad \mu^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} \equiv c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}B}\mu^{\mathcal{C}}. \tag{1.66}$$

Nota 1: ricordiamo che per $H-$trasformazioni le 1-forme $\mu^{\mathcal{A}}$ cambiano colla legge

$$\mu' = \bar{\Lambda}\mu\Lambda + \bar{\Lambda}d\Lambda \tag{1.67}$$

e le curvature secondo la

$$\breve{\mu}' = \bar{\Lambda}\breve{\mu}\Lambda \tag{1.68}$$

[10] La struttura (1.133) si dice algebra di Lie soffice con funzioni di struttura $\tilde{c}^{\Gamma}_{\Delta\Theta} = c^{\Gamma}_{\Delta\Theta} - \breve{\mu}^{\Gamma}_{\Delta\Theta}$.

A livello infinitesimo ($\Lambda = 1 + \varepsilon$) le (1.67),(1.68) diventano

$$\delta\mu \quad = D\varepsilon = d\varepsilon + [\mu, \varepsilon] \quad (\delta\mu^{\mathcal{A}} = d\varepsilon^{\mathcal{A}} + c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{BC}}\mu^{\mathcal{B}}\varepsilon^{\mathcal{C}}) \tag{1.69}$$

$$\delta\breve{\mu} \quad = -[\varepsilon, \breve{\mu}] \quad (\delta\breve{\mu}^{\mathcal{A}} = -c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{BC}}\varepsilon^{\mathcal{B}}\breve{\mu}^{\mathcal{C}}). \tag{1.70}$$

Nota 2: ricordiamo che la derivata covariante si può definire anche sulle $k-$forme con indici duali

$$D\nu_\alpha = d\nu_\alpha - (-1)^k \nu_\beta \mu^\beta{}_\alpha; \tag{1.71}$$

in tale modo è assicurata la $D(X_\alpha Y^\alpha) = d(X_\alpha Y^\alpha)$.
Riportiamo ora vari esempi.

$$\begin{array}{lll} 1) & H = SU(2): & D\vec{X} = d\vec{X} + \vec{\mu} \times \vec{X} \\ 2) & H = SO(P, D-P): & DX^{aa'} = dX^{aa'} + \mu^a{}_b X^{ba'} + \mu^{a'}{}_b \mu^{ab} \\ 3) & H = T^N: & DX^{\mathcal{A}} = dX^{\mathcal{A}} \end{array} \tag{1.72}$$

1.7 Gruppi decomponibili

In questo paragrafo pensiamo H come sottogruppo di un gruppo più grande G, ovvero H' come sottoalgebra di G'. Diciamo K' il complemento di H' a G'. L'algebra G' (o il gruppo G) si dice decomponibile se si può scrivere

$$\begin{aligned} &[H', H'] < H' \quad (H' \text{ sottoalgebra}) \\ &[H', K'] < K' \quad (\text{riduttività}) \end{aligned} \tag{1.73}$$

La condizione (1.73b) non è restrittiva in quanto è sempre verificata se si scelgono opportunamente i generatori (per esempio se ci si mette nella base in cui la metrica di Killing è diagonale). Detti $T_{\mathcal{A}}$ i generatori di H' e T_a i generatori di K', valgono

$$\begin{aligned} &[T_{\mathcal{A}}, T_{\mathcal{B}}] = T_{\mathcal{C}}\ c^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \quad c^{c}_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = 0 \\ &[T_{\mathcal{A}}, T_a] = T_b\ c^{b}_{\mathcal{A}a}, \quad c^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}a} = 0 \end{aligned} \tag{1.74}$$

ovvero le costanti di struttura si possono scrivere[11]

$$c^{\Gamma}_{\mathcal{A}\Delta} = \begin{pmatrix} c^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{A}\mathcal{C}} & 0 \\ 0 & c^{b}_{\mathcal{A}c} \end{pmatrix}, \quad c^{\Gamma}_{a\Delta} = \begin{pmatrix} c^{\mathcal{B}}_{a\mathcal{C}} & 0 \\ 0 & c^{b}_{ac} \end{pmatrix}. \tag{1.75}$$

[11] Si intende $\Gamma \equiv (\mathcal{A}, a)$.

Se in più vale la condizione

$$[K, K'] < H' \quad \text{(simmetria)}$$

la decomposizione si dice simmetrica. In tal caso risulta

$$[T_a, T_b] = T_{\mathcal{C}}\ c^{\mathcal{C}}_{ab}, \quad c^c_{ab} = 0. \tag{1.76}$$

Un gruppo decomponibile semisemplice e simmetrico, di importanza fondamentale per il seguito, è il gruppo $SO(P, D-P, \bar{e})$, definito come l'insieme delle isometrie della metrica

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} \eta_{ab} & \\ & \bar{e}^{-2} \end{pmatrix} \qquad (A, B = 0, \dots D, \quad a, b = 0, \dots, D-1). \tag{1.77}$$

L'algebra di Lie di $SO(P, D-P, \bar{e})$ è fatta di matrici del tipo

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & 0 \end{pmatrix}, \quad A = -\eta A^T \eta^{-1}, \ \bar{B} \equiv \bar{e}^2 B^T \eta \tag{1.78}$$

e le regole di commutazione si scrivono[12]

$$[J^{ab}, J_{cd}] = -4\eta^{[a}{}_{[c} J_{d]}{}^{b]}, \quad [J_{ab}, P_c] = 2P_{[a}\eta_{b]c}, \quad [P_c, P_d] = -\bar{e}^2 J_{ab} \tag{1.79}$$

da cui

$$\begin{cases} c^{cc'}_{aa'bb'} = 8\eta^{[c}{}_{[a}\eta_{a'][b}\eta_{b']}{}^{c']} \\ c^{c}_{aa'b} = 2\eta^{d}{}_{[a}\eta_{a']b} \\ c^{cc'}_{ab} = -2\bar{e}^2\eta^{[c}{}_{a}\eta_{b}{}^{c']} \end{cases} \tag{1.80}$$

Nel seguito chiameremo $SO(1, D-1, \bar{e})$ gruppo di De Sitter (improprio); esso si specializza in tre casi:

- $\bar{e}^2 = -1$ gruppo di anti De Sitter (AdS) equivalente a $SO(1, D)$
- $\bar{e}^2 = +1$ gruppo di De Sitter proprio (dS) equivalente a $SO(2, D-1)$
- $\bar{e}^2 = 0$ gruppo di Poincarè (non semisemplice) $ISO(1, D-1)$

[12] Generatori $J_{ab} \equiv T_{ab} = \begin{pmatrix} 2\eta^c{}_{[a}\eta_{b]d} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_a \equiv \bar{e}^2 T_{aD} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^a_b \\ -\bar{e}^2\eta_{ab} & 0 \end{pmatrix}$; al limite $\bar{e} \longrightarrow 0$ si riducono a quelli di Poincarè.

L'equazione di Maurer-Cartan (1.20), che è la formulazione duale delle regole di commutazione, in generale si scrive

$$\left\{\begin{array}{l} d\mu^{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{BC}}\mu^{\mathcal{B}}\mu^{\mathcal{C}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{bc}\mu^b\mu^c = 0 \\ d\mu^a + c^a_{\mathcal{B}c}\mu^{\mathcal{B}}\mu^c + \frac{1}{2}c^a_{bc}\mu^b\mu^c = 0 \end{array}\right. \tag{1.81}$$

ovvero

$$\left\{\begin{array}{l} d\omega^{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{BC}}\omega^{\mathcal{B}}\omega^{\mathcal{C}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{bc}v^b v^c = 0 \\ dv^a + c^a_{\mathcal{B}c}\omega^{\mathcal{B}}v^c + \frac{1}{2}c^a_{bc}v^b v^c = 0 \end{array}\right. \tag{1.82}$$

e per $SO(P, D-P, \bar{e})$ diventa

$$\left\{\begin{array}{l} d\omega^{aa'} + \omega^a{}_b\omega^{ba'} - \bar{e}^2 v^a v^{a'} = 0 \\ dv^a + \omega^a{}_b v^b = 0. \end{array}\right. \tag{1.83}$$

Vogliamo ora studiare la rappresentazione aggiunta di un gruppo decomponibile. Conviene distinguere l'azione del sottogruppo H da quella degli elementi di K, in quanto l'azione di H è più semplice; risulta infatti

$$I^*_H t_{\mathcal{A}} = t_{\mathcal{B}} H^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{A}}, \quad I^*_H t_a = t_b H^b{}_a \tag{1.84}$$

poichè $H^\Gamma{}_\Delta = \exp(C_{\mathcal{A}}\varepsilon^{\mathcal{A}})$ è diagonale. Conviene poi considerare trasformazioni infinitesime, descritte dalla versione infinitesima della (1.43)

$$\delta_G t_\Gamma = t_\Theta \; c^\Theta_{\Delta\Gamma}\varepsilon^\Delta \tag{1.85}$$

In dettaglio si ha

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta_H t_{\mathcal{A}} = t_{\mathcal{C}} \; c^{\mathcal{C}}_{\mathcal{BA}}\varepsilon^{\mathcal{B}}, & \delta_H t_a = t_c \; c^c_{\mathcal{A}a}\varepsilon^{\mathcal{A}} \\ \delta_K t_{\mathcal{A}} = t_c c^c_{b\mathcal{A}}\varepsilon^b, & \delta_K t_a = t_c c^c_{ba}\varepsilon^b + t_{\mathcal{C}} c^{\mathcal{C}}_{ba}\varepsilon^b \end{array}\right. \tag{1.86}$$

e nell'esempio di De Sitter

$$\left\{\begin{array}{l} \delta_H J_{ab} = 2J_{[ac}\varepsilon^c{}_{b]} \\ \delta_H P_a = P_b\varepsilon^b{}_a \end{array}\right. \tag{1.87}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta_K J_{ab} = -2P_{[a}\varepsilon_{b]} \\ \delta_K P_a = \bar{e}^2 J_{ab}\varepsilon^b. \end{array}\right. \tag{1.88}$$

Dalle (1.87) si trova subito l'espressione delle $H-$trasformazioni,

$$\left\{\begin{array}{ll} J^a{}_b \longrightarrow \bar{\Lambda}^a{}_c J^c{}_d \Lambda^d{}_b & (J \text{ tensore}) \\ P^a \longrightarrow \bar{\Lambda}^a{}_b P^b & (P \text{ vettore}); \end{array}\right. \tag{1.89}$$

ricavare l'azione finita delle $K-$trasformazioni dalle (1.88) è semplice nel limite di Poincarè,

$$\begin{cases} J_{ab} \longrightarrow J_{ab} + 2\varepsilon_{[a}P_{b]} \\ P_a \longrightarrow P_a; \end{cases} \tag{1.90}$$

nel caso generale invece si usa la (1.47),[13] da cui

$$\begin{cases} \bar{L}J_{ab}L = J_{cd}\bar{L}^c{}_a\bar{L}^d{}_b + 2\bar{e}^{-2}P_c\bar{L}^c{}_{[a}\bar{L}^D{}_{b]} \\ \bar{L}P_aL = \bar{e}^2 J_{cd}\bar{L}^c{}_a\bar{L}^d{}_D + 2P_c\bar{L}^c{}_{[a}\bar{L}^D{}_{D]}. \end{cases} \tag{1.91}$$

In conclusione scriviamo l'espressione esplicita della metrica di Killing nel caso di De Sitter

$$g = (D-1)(\omega^a{}_a \otimes \omega^b a - 2\bar{e}^2 v^a \otimes v_a); \tag{1.92}$$

Si vede così immediatamente che nel limite $\bar{e} \longrightarrow 0$ G non è semisemplice (g è degenere).[14]

1.8 Spazi omogenei e simmetrici

In questo paragrafo affrontiamo un argomento importantissimo per il seguito, cioè la costruzione di uno spazio omogeneo K a partire da un gruppo decomponibile G. Da un punto di vista fisico ciò che interessa è il fatto che dal gruppo di Poincarè si può dedurre lo spazio di Minkowsky; tuttavia preferiamo dare in questa sede una trattazione del tutto generale (lo stesso formalismo si può applicare a molti altri casi di interesse, come si vedrà nel prossimo capitolo).

Sia K l'insieme delle classi di equivalenza che si ottengono identificando i punti del gruppo decomponibile G connessi da una $H-$trasformazione:

$$K = G/H. \tag{1.93}$$

Se la decomposizione è simmetrica K si dice simmetrico. Dato il gruppo G esistono tavole che riportano tutti i possibili $K = G/H$; viceversa data la dimensione di K si possono classificare tutti i possibili spazi omogenei.

Per costruire esplicitamente K occorre una rappresentazione matriciale $G(\varepsilon)$ di G; ad esempio per il gruppo di De Sitter[15]

$$G(\varepsilon) = \exp\begin{pmatrix} \varepsilon^a{}_b & \varepsilon^a \\ -\bar{\varepsilon}_b & 0 \end{pmatrix} \tag{1.94}$$

[13] Questa si può scrivere $\Lambda T_{AA'}\bar{\Lambda} = T_{BB'}\Lambda^B{}_A\Lambda^{B'}{}_{A'}$. con $A = (a, D)$.

[14] Un altro esempio di gruppo non semisemplice è costituito dai gruppi decomponibili del tipo $G = K \times H$ in cui uno dei fattori è abeliano (risulta $g = g_K \oplus g_H$ degenere); è di questo tipo $U(N) = SU(N) \times U(1)$.

[15] Si confronti con la (1.78). Si intende $\varepsilon^\Gamma = (\varepsilon^{ab}, \varepsilon^a)$.

gli elementi di K saranno delle classi di equivalenza con matrici rappresentative $L(x)$

$$K(x) = \{L(x) \sim L(x)H(y) : H(y) \in H\}. \tag{1.95}$$

Si possono prendere come rappresentativi di K[16]

$$L(x) = \exp\begin{pmatrix} 0 & b \\ -\bar{b} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - x\bar{x}} & x \\ -\bar{x} & \sqrt{1-\bar{x}x} \end{pmatrix} \tag{1.96}$$

e si noti che

$$\begin{aligned} &1) \text{ in generale} \qquad && L(-x) = L^{-1}(x) \\ &2) \text{ nel limite } \bar{e} \longrightarrow 0 \quad && L(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; G(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \Lambda(\varepsilon) & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.97}$$

L'azione di G su K è determinata dall'equazione fondamentale

$$G(\varepsilon)L(x) = L(x')H_G \tag{1.98}$$

che si può risolvere facilmente solo nel limite di Poincarè:

$$x' = \Lambda(\varepsilon)x + \varepsilon, \quad H_G = \Lambda(\varepsilon). \tag{1.99}$$

In generale invece conviene ragionare in termini di trasformazioni infinitesime

$$\begin{cases} G = \mathbb{1} + T_\Gamma \varepsilon^\Gamma \\ H_G = \mathbb{1} - T_\mathcal{A} W^\mathcal{A}_\Gamma \varepsilon^\Gamma \\ x'^a = x^a + K^{\tilde{a}}_\Gamma \varepsilon^\Gamma \end{cases} \tag{1.100}$$

Gli operatori differenziali $K_\Gamma = K^{\tilde{a}}_\Gamma \partial_a$ si dicono vettori di Killing (e fra poco sarà chiaro perchè), le matrici $W_\Gamma = T_\mathcal{A} W^\mathcal{A}_\Gamma$ H-compensatori. Per ricavare una loro espressione esplicita si consideri la 1-forma a valori in G'[17]

$$\mu = \bar{L}dL = T_a v^a + T_\mathcal{A}\omega^\mathcal{A}; \tag{1.101}$$

l'equazione fondamentale (1.98) si scrive

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} + T_\Gamma \varepsilon^\Gamma)L &= (L + K_\Gamma L \varepsilon^\Gamma)(\mathbb{1} - W_\Gamma \varepsilon^\Gamma) \\ \Rightarrow \quad T_\Gamma L &= K_\Gamma L - W_\Gamma \end{aligned} \tag{1.102}$$

[16] Usiamo le convenzioni $\bar{x} \equiv \bar{e}x^T\eta$, $\quad x(b) \equiv b\frac{\sin|b|}{|b|}$, $\quad |b| \equiv \sqrt{\bar{b}b}$.

[17] Si intende $v^a = v^a_{\tilde{b}} dx^b$, $\quad \omega^\mathcal{A} = \omega^\mathcal{A}_{\tilde{b}} dx^b$.

e moltiplicando a sinistra per $\bar{L}$

$$\bar{L}T_\Gamma L = \bar{L}K_\Gamma L - W_\Gamma = (\bar{L}dL)\circ K_\Gamma - W_\Gamma \tag{1.103}$$

cioè, nota l'azione della rappresentazione aggiunta $\bar{L}T_\Gamma L = T_\Delta L^\Delta{}_\Gamma$,

$$T_a L^a{}_\Gamma + T_{\mathcal{A}} L^{\mathcal{A}}{}_\Gamma \;=\; T_a v^a_{\tilde{a}} K^{\tilde{a}}_\Gamma + T_{\mathcal{A}}\omega^{\mathcal{A}}_{\tilde{a}} K^{\tilde{a}}_\Gamma - T_{\mathcal{A}} W^{\mathcal{A}}_\Gamma \tag{1.104}$$

Risulta dunque

$$\begin{cases} K^{\tilde{a}}_\Gamma = v^{\tilde{a}}_a L^a{}_\Gamma \\ W^{\mathcal{A}}_\Gamma = -L^{\mathcal{A}}_\Gamma + \omega^{\mathcal{A}}_{\tilde{a}} v^{\tilde{a}}_a L^a{}_\Gamma \end{cases} \tag{1.105}$$

Nel caso di $SO(1, D-1, \bar{e})$

$$\mu = \begin{pmatrix} \frac{-dx\bar{x}+x\,d\bar{x}}{2} & \sqrt{1-x\bar{x}}dx + \frac{x\bar{x}\,dx}{\sqrt{1-\bar{x}x}} \\ \frac{-\bar{x}\,dx\bar{x}+\bar{x}x\,d\bar{x}}{2\sqrt{1-x\bar{x}}} - \sqrt{1-\bar{x}x}d\bar{x} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.106}$$

e quindi

$$\begin{cases} v^a(x) = (\sqrt{1-x\bar{x}})^a{}_b dx^b \\ \omega^{ab}(x) = \bar{e}^2 x^{[a}\eta^{b]}{}_c dx^c \end{cases} \tag{1.107}$$

mentre $L^\Gamma{}_\Delta$ è dato dalle (1.91); tutto diventa più semplice nel limite di Poincarè $\bar{e} \longrightarrow 0$:

$$\begin{cases} v^a = dx^a, \qquad W^{aa'}_{bb'} = -\eta^{[a}{}_{[b}\eta^{a']}{}_{b']}, \qquad K^{\tilde{a}}_{bb'} = -2x_{[b}\eta^a{}_{b']} \\ \omega^{aa'} = 0, \qquad W^{aa'}_b = 0, \quad K^{\tilde{a}}_b = \eta^a_b \end{cases} \tag{1.108}$$

Notiamo infine che i vettori di Killing e i compensatori soddisfano le seguenti relazioni (del tutto generali):

$$[K_\Gamma, K_\Delta] = -K_\Theta\; c^\Theta_{\Gamma\Delta} \tag{1.109}$$

$$[W_\Gamma, W_\Delta] = -W_\Theta c^\Theta_{\Gamma\Delta} - 2K_{[\Gamma}W_{\Delta]} \tag{1.110}$$

La prova è la seguente:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}[T_\Gamma, T_\Delta]L \;&= T_{[\Gamma}K_{\Delta]}L - T_{[\Gamma}LW_{\Delta]} \\ &= K_{[\Delta}T_{\Gamma]}L - K_{[\Gamma}LW_\Delta + LW_{[\Gamma}W_{\Delta]} \\ &= K_{[\Delta}K_{\Gamma]}L - K_{[\Delta}(LW_{\Gamma]}) - K_{[\Gamma}(LW_{\Delta]}) + \\ &\quad LK_{[\Gamma}W_{\Delta]} + LW_{[\Delta}W_{\Gamma]} \end{aligned} \tag{1.111}$$

ma d'altra parte

$$\frac{1}{2}[T_\Delta, T_\Gamma] = \frac{1}{2}c^\Theta_{\Gamma\Delta}T_\Theta L = \frac{1}{2}c^\Theta_{\Gamma\Delta}(K_\Theta L - LW_\Theta) \tag{1.112}$$

e quindi si ha quanto voluto.

L'importanza della (1.109) è notevole: essa assicura che lo spazio omogeneo K ospiti una rappresentazione dell'algebra di Lie del gruppo di simmetria G in termini degli operatori differenziali K_Γ.

1.9 Proprietà metriche degli spazi omogenei e simmetrici

Osserviamo subito che le proprietà di trasformazione delle 1-forme in seguito ad una traslazione sinistra[18]

$$L(x') = GL(x)\bar{H}_G \tag{1.113}$$

sono

$$\mu(x') = \bar{L}(x')dL(x') = H\mu(x)\bar{H} + Hd\bar{H} \tag{1.114}$$

ovvero

$$v(x') = Hv(x)\bar{H}, \quad \omega(x') = H\omega(x)\bar{H} + Hd\bar{H} \tag{1.115}$$

Nel caso infinitesimo si ha

$$\delta\mu = [-\varepsilon, \mu] + d\varepsilon = \nabla\varepsilon, \quad \varepsilon \equiv W_\Gamma \varepsilon^\Gamma \tag{1.116}$$

cioè

$$\delta v = [-\varepsilon, v], \quad \delta\omega = d\varepsilon + [\omega, \varepsilon]; \tag{1.117}$$

più esplicitamente

$$\begin{cases} \delta v^a = -c^a_{\mathcal{A}b} W^{\mathcal{A}}_\Gamma \varepsilon^\Gamma v^b = -\varepsilon^a{}_b v^b, \quad (\varepsilon^a{}_b \equiv c^a_{\mathcal{A}b} W^{\mathcal{A}}_\Gamma \varepsilon^\Gamma v^b) \\ \delta\omega^{\mathcal{A}} = dW^{\mathcal{A}}_\Gamma \varepsilon^\Gamma + c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}\mathcal{C}} W^{\mathcal{C}}_\Gamma \varepsilon^\Gamma \omega^{\mathcal{B}} = D\varepsilon^{\mathcal{A}} \quad (\varepsilon^{\mathcal{A}} \equiv W^{\mathcal{A}}_\Gamma \varepsilon^\Gamma). \end{cases} \tag{1.118}$$

Sfruttando le (1.117) si può provare che K è uno spazio metrico e che le G-trasformazioni sono isometrie della metrica di Killing indotta

$$\gamma_{ab} \equiv g(T_a, T_b) \quad (= -D(D-1)\bar{e}^2\eta_{ab}\text{nel caso di De Sitter}) \tag{1.119}$$

infatti, posto $g = \gamma_{ab} v^a \otimes v^b$, si ha

$$\delta g_{\tilde{a}\tilde{b}} \quad = 2\gamma_{ab}\delta v^a_{\tilde{a}} v^b_{\tilde{b}} = -2\gamma_{ab}\varepsilon^a{}_c v^c_{\tilde{a}} v^b_{\tilde{b}} = 0 \tag{1.120}$$

per antisimmetria degli ε_{ab}.

Nota 1: nel limite di Poincarè γ degenera; si può comunque prendere come metrica la

[18] Si è invertita la (1.98).

canonica $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$.

Nota 2: in generale il gruppo di isometrie di K non coincide con G, in quanto in certi casi possono esserci più isometrie che G-trasformazioni o viceversa (G-trasformazioni diverse possono dare luogo alla stessa isometria).

Nota 3: in seguito alla decomposizione (1.81), che riscriviamo

$$\begin{cases} d\mu^{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\mu^{\mathcal{B}}\mu^{\mathcal{C}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{bc}\mu^b\mu^c = 0 \\ d\mu^a + (c^a_{\mathcal{B}c}\mu^{\mathcal{B}} + \frac{1}{2}c^a_{bc}\mu^b)\mu^c = 0 \end{cases} \tag{1.121}$$

K si può sempre pensare come spazio riemanniano: basta prendere come connessione

$$\hat{\omega}^a{}_c = c^a_{\mathcal{B}c}\mu^{\mathcal{B}} + \frac{1}{2}c^a_{bc}\mu^b \tag{1.122}$$

La scelta più naturale $\omega^a{}_c = c^a_{\mathcal{B}c}\mu^{\mathcal{B}}$ dà luogo invece ad uno spazio non riemanniano, con torsione

$$T^a = -\frac{1}{2}c^a_{bc}v^b v^c \tag{1.123}$$

a meno che non valga l'ipotesi di simmetricità $c^a_{bc} = 0$. In quest'ultimo caso K è addirittura uno spazio di Einstein. [19] Infatti si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{bd} &= (d\omega + \omega\omega)^a_{bad} \\ &= (d\omega^{\mathcal{A}} + \tfrac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\omega^{\mathcal{B}}\omega^{\mathcal{C}})_{ad}c^a_{\mathcal{B}b} \\ &= \text{ usando Jacobi} \\ &= -\tfrac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{ad}c^a_{\mathcal{A}b} \\ &= -\tfrac{1}{2}\gamma_{bd}. \end{aligned} \tag{1.124}$$

1.10 Gruppi vincolati

Gli spazi omogenei, costruiti su un gruppo decomponibile rigido, sono troppo poco generali per le applicazioni fisiche: l'idea è che lo spaziotempo fisico coincida con $ISO(1, D-1)/SO(1, D-1)$ soltanto nel vuoto. In generale ci si aspetta invece la presenza di una

[19] Ricordiamo che si dice spazio di Einstein uno spazio riemanniano con tensore di Ricci proporzionale al tensore metrico.

curvatura non nulla che descrive l'interazione gravitazionale: si deve dunque indebolire la struttura rigida del gruppo ammettendo la presenza di curvature non nulle $\breve{\mu}^{\Gamma}$[20]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \breve{R}^{\mathcal{A}} = d\omega^{\mathcal{A}} + \frac{1}{2} c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{BC}} \omega^{\mathcal{B}} \omega_{\mathcal{C}} + \frac{1}{2} c^{\mathcal{A}}_{ab} v^a v^b \neq 0 \\ \breve{T}^a = dv^a + c^a_{\mathcal{A}b} \omega^{\mathcal{A}} v^b + \frac{1}{2} c^a_{bc} v^b v^c \neq 0. \end{array} \right. \tag{1.126}$$

I gruppi soffici hanno però il problema di essere troppo generali: infatti descrivono varietà differenziabili troppo grandi, di dimensione $D' = \dim G > D$. Si deve dunque imporre la condizione che delle D' dimensioni soltanto D siano fisiche mentre le altre sono fittizie. Nel caso rigido è facile eliminare le $D' - D = \dim H$ dimensioni inutili identificando i punti connessi da H trasformazioni ($M = G/H$); nel caso soffice l'eliminazione delle $H-$coordinate si può ancora fare se la teoria è H-invariante.

Vediamo cosa si intende con questa affermazione. In generale per diffeomorfismi infinitesimi $\varepsilon = T_\Gamma \varepsilon^\Gamma$ le 1-forme di curvatura cambiano secondo la legge

$$\begin{aligned} \delta\mu^\Gamma \equiv \ell_\varepsilon \mu^\Gamma &= d i_\varepsilon \mu^\Gamma + i_\varepsilon d\mu^\Gamma \\ &= d\varepsilon^\Gamma + i_\varepsilon (d\mu^\Gamma + \tfrac{1}{2} c^\Gamma_{\Delta\Theta} \mu^\Delta \mu^\Theta) - i_\varepsilon (\tfrac{1}{2} c^\Gamma_{\Delta\Theta} \mu^\Delta \mu^\Theta) \\ &= d\varepsilon^\Gamma + c^\Gamma_{\Delta\Theta} \mu^\Delta \varepsilon^\Theta + i_\varepsilon \breve{\mu}^\Gamma \\ &\equiv \nabla\varepsilon + i_\varepsilon \breve{\mu}^\Gamma; \end{aligned} \tag{1.127}$$

la teoria si dice $H-$invariante se la legge di trasformazione soffice per

$$\varepsilon = t_{\mathcal{A}} \varepsilon^{\mathcal{A}} \tag{1.128}$$

è uguale a quella rigida[21] cioè se

$$i_{t_{\mathcal{A}}} \breve{\mu}^\Gamma = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \breve{\mu}^\Gamma_{\mathcal{A}\Delta} = 0 \tag{1.131}$$

[20] Nel caso di De Sitter

$$\breve{R}^{aa'} = d\omega^{aa'} + \omega^a{}_b \omega^{ba'} - \bar{e}^2 v^a v^{a'}, \quad \breve{T}^a = dv^a + \omega^a{}_b v^b. \tag{1.125}$$

Si noti che nel limite $\bar{e} \longrightarrow 0$ $\breve{R}$ ha la stessa espressione della curvatura ordinaria R (invece $\breve{T}$ corrisponde alla torsione T.

[21] $\delta_\varepsilon \mu = \nabla\varepsilon$, con

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla\varepsilon^{\mathcal{A}} = d\varepsilon^{\mathcal{A}} + c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{BC}} \omega^{\mathcal{B}} \varepsilon^{\mathcal{C}} + c^{\mathcal{A}}_{bc} v^b \varepsilon^c \equiv D\varepsilon^{\mathcal{A}} + c^{\mathcal{A}}_{bc} v^b \varepsilon^c \\ \nabla\varepsilon^a = d\varepsilon^a + c^a_{\mathcal{B}c} \omega^{\mathcal{B}} \varepsilon^c + c^a{}_{b\mathcal{C}} v^b \varepsilon^{\mathcal{C}} + c^a_{bc} v^b \varepsilon^c \equiv D\varepsilon^a - \varepsilon^a{}_b v^b + c^a_{bc} v^b \varepsilon^c \end{array} \right. \tag{1.129}$$

ovvero per il gruppo di De Sitter

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla\varepsilon^{aa'} = \mathcal{D}\varepsilon^{aa'} - 2\bar{e}^2 v^{[a} \varepsilon^{a']} \\ \nabla\varepsilon^a = \mathcal{D}\varepsilon^a - \varepsilon^a{}_b v^b. \end{array} \right. \tag{1.130}$$

(le componenti nelle direzioni "di gauge" delle curvature $\breve{\mu}^\Gamma$ sono nulle). In tal caso i diffeomorfismi (1.128) si dicono trasformazioni di gauge; si noti che nel caso banale piatto ogni diffeomorfismo si può interpretare come una trasformazione di gauge e l'intero G diventa gruppo di gauge; inoltre i diffeomorfismi formano un'algebra isomorfa a G':

$$[\ell_{t_\Gamma}, \ell_{t_\Delta}] = \ell_{[t_\Gamma, t_\Delta]} = c^\Delta_{\Gamma\Theta}\ell_{t_\Delta}. \tag{1.132}$$

Nel caso soffice si ha invece (si usa la (1.63))

$$[\ell_{t_\Gamma}, \ell_{t_\Delta}] = \ell_{[t_\Gamma, t_\Delta]} = \ell_{(c^\Theta_{\Gamma\Delta} - \breve{\mu}^\Theta_{\Gamma\Delta})t_\Theta}. \tag{1.133}$$

e se vale la condizione di $H-$invarianza (1.131) (detta anche di $H-$orizzontalità) risulta

$$[\ell_{t_\mathcal{A}}, \ell_{t_\mathcal{B}}] = c^\mathcal{C}_{\mathcal{A}B}\ell t\mathcal{C} \tag{1.134}$$

$$[\ell_{t_\mathcal{A}}, \ell_{t_b}] = c^c_{\mathcal{A}b}\ell t_c \tag{1.135}$$

$$[\ell_{t_a}, \ell_{t_b}] = \ell_{(c^c_{ab} - \breve{T}^c_{ab})t_c} + \ell(c^\mathcal{C}_{ab} - \breve{R}^\mathcal{C}_{ab})t_\mathcal{C}; \tag{1.136}$$

le trasformazioni di gauge formano quindi una sottoalgebra isomorfa ad H'.

Da un punto di vista analitico la condizione (1.131) corrisponde ad un sistema di equazioni differenziali (che esplicitiamo usando coordinate locali $x^\Gamma = (x^a, x^\mathcal{A})$)

$$\breve{\mu}_{\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\Delta}} = (d\mu + \mu\mu)_{\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\Delta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{[\tilde{\mathcal{A}}}\mu^\Gamma_{\tilde{\Delta}]} = -\tfrac{1}{2}c^\Gamma_{\Delta\Theta}\mu^\Delta_{\tilde{\mathcal{A}}}\mu^\Theta_{\tilde{\Delta}}. \tag{1.137}$$

Una soluzione del sistema è evidentemente quella in cui le 1-forme hanno solo componenti K e non dipendono dalle coordinate $y^\mathcal{A} \equiv x^\mathcal{A}$:

$$\mu_0 = \mu_{0\tilde{a}}(x)dx^a; \tag{1.138}$$

dunque per H-invarianza la soluzione generale sarà

$$\mu(x,y) = \bar{\Lambda}(y)\mu_0(x)\Lambda(y) + \bar{\Lambda}(y)d\Lambda(y). \tag{1.139}$$

Si dice che la dipendenza dalle coordinate y è stata fattorizzata: in pratica solo le coordinate x sono fisiche mentre le y si possono trascurare (noto μ a $y = 0$ è noto ovunque tramite le (1.139)); si è così ottenuto quanto si desiderava. Si può definire come spaziotempo D-dimensionale M (localmente) la porzione a $y = 0$ del gruppo soffice con i vincoli (1.131); nota una base v_0 e una connessione ω_0 su M la si può estendere a tutto G univocamente: la geometria dello spazio fisico G fissa la geometria del gruppo vincolato G, ovvero G è equivalente a M. In particolare nel caso di De Sitter la (1.139) si scrive

$$\begin{cases} v^a(x,y) = \bar{\Lambda}^a{}_b(y)v^b_0(x) \\ \omega^a{}_b(x,y) = \bar{\Lambda}^a{}_c(y)\omega^c_{0d}(x)\Lambda^d{}_b(y) + \bar{\Lambda}^a{}_c(y)d\Lambda^c{}_b(y). \end{cases} \tag{1.140}$$

1.11 La gravità nel G.M.A.

Nell'approccio di gauge la teoria classica della gravità è una teoria lagrangiana sui campi v_0^a e ω_0^{ab} (rispettivamente vielbein e connessione di spin definiti sullo spaziotempo M), invariante rispetto a due classi di trasformazioni locali, i diffeomorfismi e le trasformazioni di Lorentz.

Esplicitamente l'azione

$$I(v_0,\omega_0)=\int R_0^{a_1a_2}(\omega_0)v_0^{a_3}\cdots v_0^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} \tag{1.141}$$

e le corrispondenti equazioni del moto

$$\begin{cases} (D-2)T^{a_3}v^{a_4}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}=0\\ (D-2)R^{a_1a_2}v^{a_4}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}=0 \end{cases} \tag{1.142}$$

ammettono come simmetrie le trasformazioni

$$1)\ \begin{cases} v_0\longrightarrow \phi^*v_0 & (\delta_D v_0=\ell_\varepsilon v_0)\\ \omega_0\longrightarrow\phi^*\omega_0 & (\delta_D\omega_0=\ell_\varepsilon\omega_0) \end{cases} \tag{1.143}$$

$$2)\ \begin{cases} v_0\longrightarrow\bar\Lambda v_0 & (\delta_L v_0=-\varepsilon v_0)\\ \omega_0\longrightarrow\bar\Lambda\omega_0\Lambda+\bar\Lambda d\Lambda & (\delta_L\omega_0=\mathcal{D}\varepsilon). \end{cases} \tag{1.144}$$

Uno dei vantaggi del group manifold approach consiste nell'unificazione delle simmetrie 1) e 2): sia i diffeomorfismi spaziotemporali che le trasformazioni di gauge si possono pensare come indotte dai diffeomorfismi di un opportuno "spazio esteso". In questo formalismo, dunque, tutte le simmetrie continue della teoria hanno un origine geometrica comune.

L'idea fondamentale è quella di prendere come spazio della teoria non lo spaziotempo M, ma il gruppo di Poincarè vincolato, che è ad esso equivalente; la base v_0 e la connessione ω_0 vengono estese alla base intrinseca μ di $G=ISO(1,D-1)$, e le trasformazioni 1) e 2) vengono viste come "figlie" di opportuni diffeomorfismi di G. Tutto ciò è possibile per due motivi:

1. le equazioni del moto della gravità (1.142) sono equazioni su forme e quindi sono invarianti per diffeomorfismi;

2. le equazioni del moto della gravità non dipendono dalla dimensione della varietà su cui sono definite.

Si noti che le caratteristiche 1) e 2) dipendono dalla forma dell'azione (1.141), che contiene solo gli operatori wedge[22] e d e non la mappa di Hodge (buona dal punto di vista dei diffeomorfismi, ma dipendente dalla dimensione dello spaziotempo): azioni con questa forma si dicono geometriche (ne daremo molti altri esempi in futuro).

Proviamo ora quanto si è promesso, cioè che sia i diffeomorfismi (1.143) che le trasformazioni di Lorentz (1.144) sono indotte dai diffeomorfismi di G. Dalle proprietà della derivata di Lie si ha (per brevità sottointendiamo gli indici)

$$\begin{cases} \delta_D v_0 & = d i_\varepsilon v_0 + i_\varepsilon d v_0 = d\varepsilon + i_\varepsilon T_0 - i_\varepsilon(\omega_0 v_0) = \mathcal{D}\varepsilon - \varepsilon v_0 + i_\varepsilon T_0 \\ \delta_D \omega_0 & = d i_\varepsilon \omega_0 + i_\varepsilon d\omega_0 = d\varepsilon + i_\varepsilon R_0 - i_\varepsilon(\omega_0\omega_0) = \mathcal{D}\varepsilon + i_\varepsilon R_0 \end{cases} \tag{1.145}$$

mentre per le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} \delta_L v_0 = -\varepsilon v_0 \\ \delta_L \omega_0 = D\varepsilon \end{cases} \tag{1.146}$$

e quindi confrontando con la (1.125) e la (1.130) a $\bar{e}^2 = 0$ si ha che

1. il diffeomorfismo $\varepsilon^{\tilde{a}}\partial_{\tilde{a}}$ è indotto da

$$\varepsilon^\Gamma = (v^a_{\tilde{c}}\varepsilon^{\tilde{c}}, \omega^{ab}_{\tilde{c}}\varepsilon^{\tilde{c}}), \text{ cioè } \delta_D\mu_0 = (\nabla\varepsilon + i_\varepsilon\breve{\mu})_0; \tag{1.147}$$

2. la trasformazione di Lorentz di parametri $\varepsilon^{aa'}$ è indotta da

$$\varepsilon^\Gamma = (0, \varepsilon^{aa'}), \text{ cioè } \delta_L\mu_0 = (\nabla\varepsilon + i_\varepsilon\breve{\mu})_0. \tag{1.148}$$

Facciamo ora qualche considerazione sull'azione (1.141), che può essere pensata estesa a G:

$$I(\mu, M) = \int_{M\subset G} R^{a_1a_2} v^{a_3} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1\cdots a_D} \tag{1.149}$$

A differenza della (1.141) la (1.149) dipende anche dalla scelta della sezione spaziotemporale M, che diventa una nuova variabile dinamica indipendente; tuttavia la variazioni su M si possono ridurre a variazioni sui campi e viceversa, in quanto per la geometricità dell'azione

$$\int_{\phi M} \mathcal{L}(\mu, \breve{\mu}) = \int_M \phi^*\mathcal{L}(\mu, \breve{\mu}) = \int_M \mathcal{L}(\phi^*\mu, \phi^*\breve{\mu}). \tag{1.150}$$

Per studiare le invarianze della (1.149) occorre distinguere due tipi di trasformazioni.

[22] Il prodotto esterno di forme differenziali $\wedge$ è da noi sempre sottointeso.

1. Trasformazioni che non deformano M, cioè diffeomorfismi interni $\phi M = M$; c'è allora invarianza, se si sfrutta la (1.150):

$$I(\phi^* \mu, M) = I(\mu, \phi M) = I(\mu, M) \tag{1.151}$$

2. Trasformazioni che deformano M, cioè diffeomorfismi esterni $\phi M = M' \neq M$; c'è invarianza solo se $i_\varepsilon d\mathcal{L} = 0$:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{\phi M} \mathcal{L} - \int_M \mathcal{L} = \int_M \phi^* \mathcal{L} - \mathcal{L} = \int_M \ell_\varepsilon \mathcal{L} \\ &= \int_M d i_\varepsilon \mathcal{L} + i_\varepsilon d\mathcal{L} = \int_M i_\varepsilon d\mathcal{L} = 0 \end{aligned} \tag{1.152}$$

Nota 1: le trasformazioni di gauge sono sempre invarianze a causa dei vincoli (1.131): $d\mathcal{L}$ [23] non ha componenti $\omega^{\mathcal{A}}$ e dunque $i_{t_{\mathcal{A}}} d\mathcal{L} = 0$.

Nota 2: le traslazioni generate da $t_a \varepsilon^a$ non sono mai invarianze, a meno di non essere nel vuoto: in tal caso coincidono colle gauge-traslazioni

$$\delta v = \mathcal{D}\varepsilon, \quad \delta\omega = 0. \tag{1.153}$$

Vogliamo ora studiare le equazioni del moto dedotte dalla (1.149), che in pratica sono le (1.142), anche se si deve tener conto che R e T sono definite su G:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} T_{ab} v^a v^b + T_{\mathcal{A}b} \omega^{\mathcal{A}} v^b + \frac{1}{2} T_{\mathcal{A}\mathcal{B}} \omega^{\mathcal{A}} \omega^{\mathcal{B}} \\ R = \frac{1}{2} R_{ab} v^a v^b + R_{\mathcal{A}b} \omega^{\mathcal{A}} v^b + \frac{1}{2} R_{\mathcal{A}\mathcal{B}} \omega^{\mathcal{A}} \omega^{\mathcal{B}} \end{cases} \tag{1.154}$$

le (1.142) si scompongono allora in interne (settore $v \ldots v$)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} T^{a_1}_{ab} v^a v^b v^{a_2} \cdots v^{a_{D_2}} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0, \\ \frac{1}{2} R^{a_1 a_2}_{ab} v^a v^b v^{a_3} \cdots v^{a_{D-1}} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0 \end{cases} \tag{1.155}$$

ed esterne (settori $\omega v \ldots v$ e $\omega\omega v \ldots v$)

$$\begin{cases} T^{a_1}_{\mathcal{A}b} \omega^{\mathcal{A}} v^b v^{a_2} \cdots v^{a_{D-2}} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0, \\ R^{a_1 a_2}_{\mathcal{A}b} \omega^{\mathcal{A}} v^b v^{a_3} \cdots v^{a_{D-1}} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0 \end{cases} \tag{1.156}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} T^{a_1}_{\mathcal{A}\mathcal{B}} \omega^{\mathcal{A}} \omega^{\mathcal{B}} v^{a_2} \cdots v^{a_{D-2}} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0, \\ \frac{1}{2} R^{a_1 a_2}_{\mathcal{A}\mathcal{B}} \omega^{\mathcal{A}} \omega^{\mathcal{B}} v^{a_3} \cdots v^{a_{D-1}} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0. \end{cases} \tag{1.157}$$

Si noti il fatto importantissimo che le equazioni esterne danno

$$\breve{\mu}^{\Gamma}_{\Delta\mathcal{B}} = (R^{ab}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}, R^{ab}_{c\mathcal{B}}, T^{a}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}, T^{a}_{c\mathcal{B}}) = 0 \tag{1.158}$$

[23] In concreto $d\mathcal{L} = (D-2) R^{a_1 a_2} T^{a_3} v^{a_4} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D}$.

che sono proprio i vincoli che si sono assunti su G; questo assicura la consistenza interna della teoria.

Le equazioni interne invece sono le stesse che si trovano nell'approccio di gauge puramente spaziotemporale (si veda l'appendice A) e si risolvono nello stesso modo: si otterranno le equazioni del primo ordine

$$T^a_{bc} = 0, \quad \mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = 0. \tag{1.159}$$

1.12 La gravità di De Sitter

Il group manifold approach permette di estendere agevolmente (almeno in linea di principio) la teoria della gravità a gruppi G contenenti il gruppo di Poincarè; inoltre il discorso si può generalizzare ai supergruppi (supergravità), come vedremo nel capitolo 4. Qui ci limitiamo a trattare l' estensione al gruppo di De Sitter $SO(1, D-1, \bar{e})$.

Il nostro scopo è quello di determinare l'azione che determina le 1-forme di curvatura $\mu = (\omega, v)$ del gruppo soffice $SO(1, D-1, \bar{e})$ con i vincoli (1.131) . Le curvature$\breve{R}, \breve{T}$ sono date dalle (1.125) che riscriviamo [24]

$$R^{aa'} = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_b\omega^{ba'} - \bar{e}^2 v^a v^{a'}, \quad T^a = dv^a + \omega^a{}_b v^b. \tag{1.160}$$

Chiaramente poichè vogliamo avere una teoria geometrica la lagrangiana deve essere buona per diffeomorfismi ($\mathcal{L}(\phi^*\mu, \phi^*\breve{\mu}) = \phi^*\mathcal{L}(\mu, \breve{\mu})$) e indipendente dalla dimensione della varietà su cui è definita; questo si esprime dicendo che

C1) La lagrangiana deve essere geometrica (contiene d,ˆ e non *); dunque è una polinomiale in $\mu, \breve{\mu}$:

$$\mathcal{L} = \Lambda(\mu) + \breve{\mu}^\Gamma \nu_\Gamma(\mu) + \breve{\mu}^\Gamma \breve{\mu}^\Delta \nu_{\Gamma\Delta}(\mu) + \ldots \tag{1.161}$$

Dei vincoli fortissimi sulla forma dell'azione vengono dallo studio delle invarianze delle equazioni (1.160); oltre alla evidente Lorentz-invarianza c'è pure la seguente invarianza di scala

$$v \longrightarrow w^{+1}v, \quad \omega \longrightarrow w^0\omega, \quad e \longrightarrow w^{-1}e; \tag{1.162}$$

si dice che la connessione ha peso (dimensione) 0, il gravitone peso 1, il parametro $\bar{e}$ peso -1. Siccome l'azione da determinare dovrà essere una generalizzazione dell'azione di Einstein-Cartan che ha peso $D-2$ ed è scalare [25] (in dimensione pari), tutti i termini

[24] Per alleggerire la notazione nel seguito usiamo R, T in luogo di $\breve{R}, \breve{T}$.

[25] La scalarità dell'azione si vede meglio se viene scritta nella forma $\int R^{a_1a_2}v^{a_3}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} = (-1)^{D-1}2!(D-2)!\int R_S\eta$ con $R_S = \mathcal{R}^a{}_a$ scalare di curvatura, $\eta = v^0\cdots v^{D-1}$ elemento di volume.

aggiuntivi della nuova azione saranno di questo tipo; inoltre essi dovranno annullarsi nel limite di Poincarè $\bar{e} \longrightarrow 0$. Dunque

C2) La lagrangiana dev'essere scalare di peso $D-2$ e può contenere solo potenze positive del parametro $\bar{e}$ (per l'esistenza del limite di Poincarè).

Grazie alla proprietà C2) si determinano tutti i termini possibili dell' azione incognita a meno di coefficienti moltiplicativi; questi però vengono tutti fissati dalla ovvia condizione

C3) Deve esistere la soluzione di vuoto $\breve{\mu} = 0$.

Illustriamo come funzionano le regole C1)-C3) nella pratica; conviene cominciare dai termini più alti nelle curvature. Dimostreremo qui che $\mathcal{L}$ può essere al massimo lineare nelle curvature. Infatti certamente non ci sono termini cubici o di ordine superiore perchè troppo leggeri (i più pesanti sono del tipo $TTTvv\cdots v$ con peso $D-3$); per lo stesso motivo non ci sono neppure termini quadratici di tipo $RRvv\cdots v$ (peso D-4) o $RTvv\cdots v$ (peso D-3); termini di tipo $TTvv\cdots v$ hanno il giusto peso, ma possono apparire solo in $D=4$ e $D=6$ nelle forme T^aT_a e $T^aT^bv_av_b$ che non sono scalari. Restano dunque solo i termini lineari $Rvv\cdots v$ e $Tvv\cdots v$; quelli del primo tipo sono necessariamente della forma $R^{a_1a_2}v^{a_3}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}$ (la forma $R^{ab}v_av_b$ in $D=4$ va eliminata per pseudoscalarità), quelli del secondo tipo esistono solo in tre dimensioni, T^av_a. Il termine di ordine zero nelle curvature non può che essere $\bar{e}^2v^{a_1}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}$. In conclusione l'azione di De Sitter è

$$I = \int R^{a_1a_2}v^{a_3}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} + \alpha\bar{e}^2v^{a_1}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} \tag{1.163}$$

oppure

$$I = \int R^{ab}v^c\varepsilon_{abc} + \beta T^av_a + \alpha\bar{e}^2v^av^bv^c\varepsilon_{abc} \tag{1.164}$$

in $D=3$. Nel primo caso la richiesta dell'esistenza del vuoto dà

$$\begin{aligned} \delta I|_{\breve{\mu}=0} &= -2\bar{e}^2\delta v^{a_1}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} + \alpha D\bar{e}^2\delta v^{a_1}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} \\ &= 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tfrac{2}{D} \end{aligned} \tag{1.165}$$

nel secondo

$$\begin{aligned} \delta I|_{\breve{\mu}=0} &= -2\bar{e}^2\delta v^av^bv^c\varepsilon_{abc} + \beta(d\delta v^av_a + \delta\omega^a{}_bv^bv_a) + \alpha\bar{e}^2\delta v^av^bv^c\varepsilon_{abc} \\ &= 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tfrac{2}{3},\ \beta = 0 \end{aligned} \tag{1.166}$$

e in ogni caso l'azione è

$$I = \int R^{a_1a_2}v^{a_3}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} + \frac{2}{D}\bar{e}^2v^{a_1}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} \tag{1.167}$$

e nel limite $\bar{e} \longrightarrow 0$ giustamente si torna all'azione di Einstein-Cartan ordinaria.

Nota: osserviamo per concludere che gli spazi di De Sitter corrispondono a spazi di Einstein con costante cosmologica. Si consideri infatti il vuoto di De Sitter

$$\breve{R}^{ab} = 0, \qquad \breve{T}^a = 0; \tag{1.168}$$

questo corrisponde ad uno spazio con curvatura ordinaria

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb} = \bar{e}^2 v^a v^b \tag{1.169}$$

cioè con tensore di Riemann

$$R^{ab}_{cd} = 2\bar{e}^2 \eta^{ab}_{cd} = 2\bar{e}^2 \eta^{[a}_{[c} \eta^{b]}_{d]} \tag{1.170}$$

da cui

$$\mathcal{R}^a{}_b = \bar{e}^2 (D-1) \eta^a{}_b \tag{1.171}$$

e quindi

$$R_S = \bar{e}^2 D(D-1). \tag{1.172}$$

Le equazioni di Einstein si possono allora scrivere

$$\mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2} \eta^a{}_b R_S = -\Lambda \eta^a{}_b, \quad \Lambda = \frac{\bar{e}^2}{2}(D-1)(D-2). \tag{1.173}$$

Dal punto di vista delle teorie di supergravità interessa solo il caso di Anti De Sitter, in cui $\bar{e}^2$ e Λ sono minori di zero, cioè lo spazio ha curvatura R_S negativa. Lo spazio di De Sitter interessa invece in teorie cosmologiche inflazionarie, in quanto la presenza di una costante cosmologica positiva genera (in assenza di materia) un' espansione esponenziale: per vederlo basta considerare l'equazione della deviazione geodetica

$$D^2_u \delta x^a = R^a_{bcd} u^b \delta x^c u^c \quad (D_u \equiv u^a D_a) \tag{1.174}$$

nel sistema di riferimento localmente inerziale solidale ad u: si ottiene allora

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta \vec{x} = \bar{e}^2 \delta \vec{x} \tag{1.175}$$

che ha soluzioni esponenziali se $\bar{e}^2 > 0$ (due particelle libere si allontano sempre più).

Capitolo 2

GRAVITÀ ESTESA

2.1 Introduzione

In questo capitolo vedremo cosa succede quando si ammette la presenza di altri campi ($k-$forme) oltre alle 1-forme gravitazionali; parleremo in tali condizioni di gravità accoppiata e le k-forme aggiuntive verranno genericamente indicate col termine di materia o campi materiali. Esse saranno sempre pensate soggette a un loro gruppo di simmetria H_M (gruppo di simmetria della materia) per cui il gruppo di simmetria complessivo della teoria sarà $H = SO(1, D-1) \times H_M$. Adotteremo sia l'approccio spaziotemporale ordinario, sia il punto di vista del group manifold approach, restringendoci però al caso di Poincarè ($\bar{e} = 0$) [1] .

Dopo aver trattato la gravità accoppiata ci occuperemo della gravità in dimensione maggiore di quattro: vedremo come quest'ultima dia luogo ad una teoria quadridimensionale accoppiata con dei campi aggiuntivi che nascono dalla riduzione dimensionale; illustreremo quindi un paio di esempi di compattificazione che spesso si ritrovano spesso nelle teorie di (super)gravità.

2.2 L'accoppiamento con 1-forme.

L'accoppiamento più semplice è quello elettromagnetico; in tal caso la materia è costituita da una 1-forma A di peso 1 e da delle 0-forme f_{ab} di peso -1, soggette alla trasformazione $U(1)$

$$A \longrightarrow A + da, \qquad f_{ab} \longrightarrow f_{ab} \tag{2.1}$$

(si noti che in questo paragrafo pensiamo $A = A_a v^a + \frac{1}{2} A_{aa'} \omega^{aa'}$ e $f_{ab} = f_{ab}(x^a, \varepsilon^{aa'})$ come forme definite sul gruppo di Poincarè).

[1] La costante cosmologica può comunque rispuntare se vi sono campi scalari, come valore di aspettazione nel vuoto; lo vedremo nel paragrafo (2.6).

Definite le “curvature”

$$F = dA, \quad \breve{f}_{ab} = \mathcal{D} f_{ab} \tag{2.2}$$

si costruisce l'azione elettromagnetica seguendo le regole C1-C2, cercando funzioni dei campi e delle curvature che rispettino le invarianze della teoria (in particolare l'invarianza di scala impone l'uso di funzioni al più polinomiali).

- si osserva che non ci sono termini cubici o di ordine superiore in F per motivi di peso;
- l'unico termine quadratico possibile è FF in quattro dimensioni, ma va scartato in quanto derivata totale ($FF = d(AF)$);
- l'unico termine lineare è $Ff^{a_1 a_2} v^{a_3} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D}$ e l' unico termine di ordine zero $f_{ab} f^{ab} v^{a_1} \cdots\ v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D}$;
- in generale non compaiono termini nelle curvature di f.

Dunque l'unica azione possibile è

$$I(\omega, v, A, f) = I_G + \alpha \int (F f^{a_1 a_2} - \frac{\beta}{2} f_{ab} f^{ab} v^{a_1} v^{a_2}) v^{a_3} \cdots\ v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} \tag{2.3}$$

da cui seguono le equazioni del moto

$$\delta_\omega I: \quad (D-2) R^{a_3} v^{a_4} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0 \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \delta_v I: \quad & (D-2) R^{a_1 a_2} v^{a_4} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} + \alpha (D-2) F f^{a_1 a_2} v^{a_4} \cdots v^{a_D} \\ & -\tfrac{\alpha\beta}{2} D f_{ab} f^{ab} v^{a_1} v^{a_2} v^{a_4} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \delta_A I: \quad & \alpha \mathcal{D} f^{a_1 a_2} v^{a_3} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} + \alpha (D-2) f^{a_1 a_2} \cdot \\ & T^{a_3} v^{a_4} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\delta_f I: \quad \alpha F v^{a_3} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} - \alpha\beta f_{a_1 a_2} v^{b_1} \cdots v^{b_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0. \tag{2.7}$$

La (2.4) è la stessa della gravità pura e dà $T^a = 0$; la (2.7) dà

$$F|_{settori\ \omega\omega\ e\ \omega v} = 0 \quad \Rightarrow A = A_{\tilde{a}}(x^b) dx^a \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2} F_{b_1 b_2} \varepsilon^{b_1 b_2 a_3 \cdots a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} + \beta f_{a_1 a_2} \varepsilon^{b_1 \cdots b_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0 \\ & \Rightarrow \quad \alpha (D-2)! F_{a_1 a_2} - \beta D! f_{a_1 a_2} = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

e cambiando la normalizzazione relativa tra f e A è possibile scegliere

$$\beta = \frac{(D-2)}{D!} \qquad \Rightarrow \qquad F_{a_1 a_2} = f_{a_1 a_2} \tag{2.10}$$

Studiamo ora le (2.6) che si scrivono, considerando i vari settori e per $T^a = 0$

$$\mathcal{D}_a f^{ab} = 0 \tag{2.11}$$
$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} f^{ab} = 0 \tag{2.12}$$

le (2.12), cioè le equazioni corrispondenti ai settori esterni, danno la mappa di estensione di f da M a G[2]:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\varepsilon_{aa'}\mathcal{D}^{aa'} f^{cb} = 0 \quad & \Rightarrow \tfrac{1}{2}\varepsilon_{aa'}\partial^{aa'} f^{cb} + \varepsilon^c{}_d f^{db} + \varepsilon^b{}_d f^{cd} = 0 \\ & \Rightarrow \ell_{\frac{1}{2}t_{aa'}\varepsilon^{aa'}} f^{cb} = 2\varepsilon^{[c}{}_d f^{b]d} \\ & \Rightarrow f^{ab}(x^a, \varepsilon^{aa'}) = \bar{\Lambda}^a{}_c(\varepsilon)\bar{\Lambda}^b{}_d(\varepsilon) f^{cd}(x) \end{aligned} \tag{2.13}$$

mentre le (2.11), cioè le equazioni corrispondenti ai settori interni, sono le equazioni di Maxwell

$$\mathcal{D}_a F^{ab} = 0. \tag{2.14}$$

Nota: il campo f è un puro artificio che serve solo per poter scrivere l'azione del primo ordine; se si implementa la (2.10) e ci si restringe allo spaziotempo l'azione assume la forma più famosa

$$I \propto \int (R_S + \alpha \frac{1}{2} F_{aa'} F^{aa'})\eta \tag{2.15}$$

in cui f non compare.

Veniamo infine alle equazioni di Einstein (2.5); usando trucchi standard[3] si ottiene, nel settore non banale $v \cdots v$

$$\begin{aligned} \delta_{v^b} I = \; & -2(D-2)!(\mathcal{R}^a{}_b - \tfrac{1}{2}\eta^a{}_b R_S) \; {}^*v^a + 2(D-2)!\alpha(F^{ac}F_{cb} \\ & + \tfrac{1}{2}\eta^a{}_b F_{cd}F^{cd}) \; {}^*v^a - \alpha(D-2)!\tfrac{1}{2}F_{aa'}F^{aa'}\eta^a{}_b \; {}^*v_a \end{aligned} \tag{2.16}$$

[2] In generale una k–forma Φ (eventualmente con H–indici) si può estendere da M in G quando sono note le derivate esterne $\partial_{\mathcal{A}}\Phi|_{x^{\mathcal{A}}=0}$.

[3] Si veda l'appendice A.

da cui

$$\mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S - \alpha(F^{ac}F_{cb} + \frac{1}{4}\eta^a{}_b F_{cd}F^{cd}) = 0 \tag{2.17}$$

ovvero

$$\mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = \alpha\mathcal{T}^a{}_b(F) \tag{2.18}$$

con il solito tensore energia-impulso.

Il caso elettromagnetico si generalizza immediatamente al caso di Yang-Mills in cui esistono N forme $A^{\mathcal{I}}$ e $f^{\mathcal{I}}_{ab}$, nella rappresentazione aggiunta di un gruppo semisemplice H_{YM} a N parametri: [4]

$$\begin{cases} F^{\mathcal{I}} = dA^{\mathcal{I}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}K}A^{\mathcal{J}}A^{\mathcal{K}} & (F = dA + AA) \\ \breve{f}^{\mathcal{I}}_{ab} = \mathcal{D}f^{\mathcal{I}}_{ab} + c^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}K}A^{\mathcal{J}}f^{\mathcal{K}}_{ab} & (\breve{f} = \mathcal{D}f + [A, f]) \end{cases} \tag{2.19}$$

usando una rappresentazione matriciale $A = T_{\mathcal{I}}A^{\mathcal{I}}$ l'azione si può scrivere

$$I = I_G + \alpha Tr(Ff^{a_1a_2} - \frac{1}{2D(D-1)}f_{ab}f^{ab}v^{a_1}v^{a_2})v^{a_3}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} \tag{2.20}$$

e le equazioni del moto spaziotemporali

$$\delta_{\omega,v}I = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = \alpha Tr(F^{ac}F_{cb} + \frac{1}{4}\eta^a{}_b F_{cd}F^{cd}) \tag{2.21}$$

$$\delta_{A,f}I = 0 \quad\Rightarrow\quad D_a f^{ab\mathcal{I}} = 0 \tag{2.22}$$

Nota: evidentemente il group manifold approach non è conveniente finchè si lavora nell'ambito della gravità, e in pratica è meglio restare sullo spaziotempo. Noi abbiamo usato il gruppo G per far vedere come si lavora con coordinate aggiuntive che, come vedremo, non si possono eliminare facilmente quando si lavora nel superspazio (teorie di supergravità); nel seguito invece penseremo i campi per lo più come puramente spaziotemporali.

2.3 L'accoppiamento con $k-$forme

Un altro tipo di generalizzazione si può fare se si suppone di lavorare con $k-$forme ($k > 1$) A di peso k e 0-forme $f = f_{a_1\cdots a_{k+1}}$ di peso -1 soggette alla trasformazione $U(1)$

$$A \longrightarrow A + da, \quad f \longrightarrow f; \tag{2.23}$$

[4] Le $c^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}K}$ sono le costanti di struttura di H_{YM} comprensive della costante di accoppiamento e di peso -1: $c^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}K} \sim ec^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}K}$.

l'azione (2.20) diventa

$$\begin{aligned} I &= I_G + \alpha_D \int \mathcal{L}_k, \quad \alpha_D \equiv \tfrac{(D-2)!}{(D-k-1)!}\alpha \\ \mathcal{L}_k &= (F f^{a_1\cdots a_{k+1}} - \tfrac{(D-k-1)!}{2D!} f_{b_1\cdots b_{k+1}} f^{b_1\cdots b_{k+1}} v^{a_1}\cdots v^{a_{k+1}})\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} \end{aligned} \tag{2.24}$$

ovvero

$$I \propto \int (R_S + \alpha \frac{1}{2} F_{a_1\cdots a_{k+1}} F^{a_1\cdots a_{k+1}})\eta \tag{2.25}$$

e le equazioni del moto danno

$$\mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = \alpha(-\frac{k+1}{2} F^{c_1\cdots c_k a} F_{c_1\cdots c_k b} + \frac{1}{4}\eta^a{}_b F_{c_1\cdots c_{k+1}} F^{c_1\cdots c_{k+1}}) \tag{2.26}$$

$$\mathcal{D}_{a_1} F^{a_1\cdots a_{k+1}} = 0 \tag{2.27}$$

Si noti che in seguito alle equazioni del moto $k-$forme A e $(D-k-2)$-forme B sono identificati dalla mappa di Hodge sui rispettivi campi di forza, $G =^* F$. La dimostrazione è la seguente:

$$\mathrm{div} F = (-1)^{D-1}\, {}^*d^*F = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad dG = 0 \tag{2.28}$$

e dunque esiste (localmente) una $(D-k-2)$-forma B tale che $G = dB$ sia il suo campo di forza. In conclusione al massimo esistono $k-$forme con $k = [D-2]/2$ e la dimensione più piccola in cui esistono 2-forme è 6 (in $D = 4, 5$ le 2-forme sono associate rispettivamente alle 0-forme e alle normali 1-forme). Vale la seguente tabella:

Associazioni $k-$forme − $(D-k-2)-$forme

D = 3	0 - 1				
D = 4	0 - 2	1 - 1			
D = 5	0 - 3	1 - 2			
D = 6	0 - 4	1 - 3	2 - 2		
D = 7	0 - 5	1 - 4	2 - 3		
D = 8	0 - 6	1 - 5	2 - 4	3 - 3	
D = 9	0 - 7	1 - 6	2 - 5	3 - 4	
D = 10	0 - 8	1 - 7	2 - 6	3 - 5	4 - 4
D = 11	0 - 9	1 - 8	2 - 7	3 - 6	4 - 5

Nota: le $k-$forme presentano caratteristiche peculiari in alcune dimensioni particolari $(D = 2, 6, 10, \cdots)$ in cui è possibile imporre la condizione di autodualità. Una $k-$forma T si dice autoduale se [5]

$$T_{a_1\cdots a_k} = \alpha\varepsilon_{a_1\cdots a_D}T^{a_{k+1}\cdots a_D},\ \ \alpha \in \Re \tag{2.29}$$

iterando si ottiene la relazione di consistenza

$$\begin{aligned} T^{a_1\cdots a_k} &= \alpha^2\varepsilon^{a_1\cdots a_k b_1\cdots b_k}\varepsilon_{b_1\cdots b_k c_1\cdots c_k}T^{c_1\cdots c_k} \\ &= \alpha^2(-1)^{k\cdot k}(-1)^{D-1}k!k!T^{a_1\cdots a_k} \\ \Rightarrow \qquad & \alpha = \frac{\sqrt{(-1)^{k+1}}}{k!} \end{aligned} \tag{2.30}$$

da cui le preannunciate condizioni $D = 2 \bmod 4$ (per la realtà della radice quadrata). La condizione di autodualità è Lorentz-invariante e quindi se è possibile imporla la rappresentazione del gruppo di Lorentz

$$T^{a_1\cdots a_k} \longrightarrow \Lambda^{a_1}{}_{b_1}\cdots\Lambda^{a_k}{}_{b_k}T^{b_1\cdots b_k} \tag{2.31}$$

è riducibile (e il campo T non è "fondamentale"). Nella pratica la condizione di autodualità è essenziale per la supergravità in sei dimensioni che contiene una 2-forma con curvatura autoduale

$$F = dB, \quad F_{abc} = \frac{1}{3!}\varepsilon_{abcdef}F^{def}. \tag{2.32}$$

2.4 Gradi di libertà fisici e campi ausiliari

In questo paragrafo puntualizziamo alcune caratteristiche delle equazioni incontrate finora:

$$\text{Equazioni gravitazionali: } T^a_{bc} = 0, \quad \mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = \mathcal{T}^a{}_b; \tag{2.33}$$

$$\text{Equazioni delle } k-\text{forme: } f_{a_1\cdots a_{k+1}} = F_{a_1\cdots a_{k+1}}, \quad \mathcal{D}_{a_1}f^{a_1\cdots a_{k+1}} = 0. \tag{2.34}$$

Il numero di gradi di libertà di un campo con più indici è il numero di componenti che non vengono fissati dalle scelte di gauge (gradi off-shell) e dalle equazioni del moto (gradi on-shell). Consideriamo per esempio il settore gravitazionale (v, ω) e in particolare la connessione ω; essa è completamente determinata in termini del gravitone dall'equazione della torsione:

$$T_{abc} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_{abc} = \Omega_{[ab]c} - \frac{1}{2}\Omega_{cab},\ \Omega_{abc} \equiv v^{\tilde b}_b v^{\tilde c}_c\partial_{[\tilde b}v_{\tilde c]a} \tag{2.35}$$

[5] Si intende $D = 2k$.

si dice allora che ω non ha gradi di libertà fisici o che è un campo ausiliario. Si noti che nel formalismo del secondo ordine la (2.35) è sempre implementata tanto che tutta la teoria della gravitazione si può sviluppare senza mai parlare della connessione: l'unica variabile è il gravitone ovvero la metrica $g_{\tilde{a}\tilde{b}}$[6]. Ci interessa quindi determinare il numero di componenti libere del gravitone v^a; esso è definito a meno di trasformazioni di gauge $SO(1, D-1)$ tramite le quali è possibile eliminare $D(D-1)/2$ componenti, riducendosi a $D(D+1)/2$ gradi di libertà (sono quelli del tensore metrico); a questo punto l'invarianza per diffeomorfismi permette di eliminare altre D componenti: si dice quindi che i gradi di libertà del gravitone sono

$$\deg(v) = \frac{D(D-1)}{2} \quad \text{(off-shell)} \tag{2.36}$$

(schematicamente il ragionamento (vedi [3] pag. 293) è il seguente:

$$\begin{array}{lll} D^2 gradi & \frac{D(D+1)}{2} gradi & \dfrac{D(D-1)}{2} gradi \\ v^a_{\tilde{a}} & \to g_{\tilde{a}\tilde{b}} = \eta_{ab} v^a_{\tilde{a}} v^b_{\tilde{b}} & \to g_{\tilde{a}'\tilde{b}'} = g_{\tilde{a}\tilde{b}} \dfrac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} \dfrac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} \end{array} \tag{2.37}$$

viene scelto un riferimento particolare $x^{a'}$ per esempio imponendo la gauge armonica $g^{\tilde{a}'\tilde{b}'}\Gamma^{\tilde{c}'}_{\tilde{a}'\tilde{b}'} = 0$).

A questo punto, però, bisogna tener conto che il gravitone soddisfa le equazioni di Einstein: questo riduce ulteriormente i gradi di libertà effettivi di un altro termine D e quindi

$$\deg(v) = D(D-3)/2 \quad \text{(on-shell)} \tag{2.38}$$

(si considerano le equazioni di Einstein linearizzate, nel vuoto e si osserva che con cambi di coordinate armonici $\Box x' = 0$ si possono eliminare D termini, come fatto esplicitamente in [3] per $D = 4$).[7] Si noti in particolare che in tre dimensioni il gravitone non possiede gradi di libertà fisici; questo si può comprendere se si sfrutta l'equivalenza tra il tensore

[6] Ciò nonostante noi abbiamo preferito prendere come ente fondamentale la base $v^a{}_{\tilde{a}}$ e non la metrica $g_{\tilde{a}\tilde{b}}$ in vista dell'estensione al superspazio, su cui non esiste una "supermetrica" ma c'è una "superbase".

[7] Il ragionamento non vale in $D = 2$ in cui le equazioni di Einstein sono sostituite dall'identità $\mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S \equiv 0$. Per provare l'identità conviene usare una base in cui $v^a_{\tilde{b}} = e^{\phi}\eta^a_b$ (ϕ è l'unico grado di libertà off-shell del gravitone) ovvero $g_{\tilde{a}\tilde{b}} = e^{2\phi}\eta_{ab}$; si trova allora

$$\mathcal{R}_{\tilde{a}\tilde{b}} \equiv -\eta^{cd}\partial_{\tilde{c}}\partial_{\tilde{d}}\phi\eta_{ab} \;\Rightarrow\; \mathcal{R}_{\tilde{a}\tilde{b}} - \frac{1}{2}g_{\tilde{a}\tilde{b}}R_S \equiv 0.$$

di Ricci e il tensore di Riemann[8]: le equazioni di Einstein determinano completamente il tensore di Riemann e quindi tutte le derivate del gravitone (noto il campo gravitazionale con le sue derivate in un punto è noto ovunque).[9]

Passiamo ora al settore materiale costituito dalle $k-$forme che soddisfano, nella gauge di Lorentz, e in assenza di gravità e altri campi

$$\partial_{a_1} A^{a_1 \cdots a_k} = 0, \quad \Box A^{a_1 \cdots a_k} = 0. \tag{2.40}$$

Le condizioni di gauge (2.40a) eliminano $\binom{D-1}{k-1}$ gradi di libertà: si ottiene quindi[10]

$$\deg(A) = \binom{D-1}{k} \text{ (off-shell)} \tag{2.41}$$

Mantenendo la gauge e sfruttando le equazioni del moto (2.40b) si possono eliminare altri $\binom{D-2}{k-1}$ gradi di libertà (si veda sempre [3] per $D = 4$ e $k = 1$) riducendosi ai seguenti gradi fisici[11]:

$$\deg(A) = \binom{D-2}{k} \text{ (on-shell)} \tag{2.42}$$

Il campo f si comporta come la connessione ω, nel senso che viene eliminato nel formalismo del secondo ordine; si dice che f ha 0 gradi di libertà on-shell. Si noti che sia f che ω soddisfano equazioni algebriche e non differenziali.

Nota: la formula (2.42) non ha senso per $k = D - 1$; in tal caso A non possiede gradi di libertà; infatti

$$F_{a_1 \cdots a_D} = D \partial_{[a_1} A_{a_2 \cdots a_D]} = \phi \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} \tag{2.43}$$

[8] In tre dimensioni, e solo in tre, vale la relazione ([3] pag. 144)

$$R^{ab}_{cd} = 4 \delta^{[a}_{[c} \mathcal{R}^{b]}_{d]} - \delta^{[a}_{[c} \delta^{b]}_{d]} \mathcal{R}^{e}_{e} \tag{2.39}$$

.

[9] Normalmente invece le equazioni di Einstein individuano solo le derivate temporali e quindi è necessaria la conoscenza del campo gravitazionale in tutti i punti dello spazio per dedurre la sua evoluzione temporale.

[10] Si ricordi la formula

$$\binom{D}{k} = \binom{D-1}{k} + \binom{D-1}{k-1}.$$

[11] Non si dimentichi che nei casi in cui è possibile imporre la condizione di autodualità i gradi di libertà vanno dimezzati; per esempio una 2-forma B in 6-dimensioni ha tre e non sei gradi di libertà effettivi.

è equivalente ad uno scalare che non è fisico in quanto l'equazione del moto (2.27) impone

$$\partial_a \phi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \phi = cost \tag{2.44}$$

(da un altro punto di vista A non è fisico poichè tutte le sue derivate sono note essendo $F_{a_1 \cdots a_D} \propto \varepsilon_{a_1 \cdots a_D}$ fissato.).

2.5 L'accoppiamento con un campo scalare

In questo paragrafo daremo qualche indicazione su come si può accoppiare un campo scalare ad una teoria gravitazionale (eventualmente accoppiata anche con un gruppo di Yang-Mills).

L'approccio più semplice è quello di prendere come azione del campo scalare l'azione (2.24) per $k = 0$: si ottiene così l'azione di Goldstone in campo gravitazionale

$$I = I_G + \frac{\beta}{D-1} \int (d\sigma \Sigma^{a_1} - \frac{1}{2D} \Sigma_a \Sigma^a v^{a_1}) v^{a_2} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} \tag{2.45}$$

$$(I \propto \int (R_S + \frac{\beta}{2} \Sigma_a \Sigma^a) \eta) \tag{2.46}$$

da cui le equazioni spaziotemporali

$$\begin{cases} \mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2} \eta^a{}_b R_S = -\frac{\beta}{2} (\Sigma^a \Sigma_b - \frac{1}{2} \eta^a{}_b \Sigma^c \Sigma_c), & T^a_{bc} = 0 \\ \mathcal{D}_a \Sigma^a = 0, & \Sigma_a = D_a \sigma. \end{cases} \tag{2.47}$$

Si noti che tale azione, sebbene non sia più gauge invariante, possiede l'invarianza di scala globale

$$\sigma \longrightarrow \sigma + c, \qquad \Sigma \longrightarrow \Sigma, \qquad c = cost; \tag{2.48}$$

è possibile aggiungere ad I un potenziale invariante di peso -2 (in grado di dare un termine accettabile del tipo $V(\sigma) v^{a_1} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D}$) se è presente un gruppo di Yang-Mills con costante di accoppiamento e di peso -1 che scala come

$$e \longrightarrow e^{+\frac{c}{2}} e; \tag{2.49}$$

basta infatti prendere

$$V(\sigma) = e^2 e^{-\sigma}; \tag{2.50}$$

La consistenza della definizione $F = dA + eAA$ impone che i campi di gauge scalino in maniera opposta a e:

$$A \longrightarrow e^{-\frac{c}{2}}A \qquad \text{(idem per F)}; \tag{2.51}$$

si ottiene allora l'azione invariante (nel formalismo del secondo ordine)

$$I = \int (R_S + \alpha e^{\sigma} Tr \frac{1}{2} F_{aa'} F^{aa'} + \beta(\frac{1}{2}\Sigma_a \Sigma^a - V))\eta \tag{2.52}$$

con equazioni del moto

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^a{}_b - \tfrac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = \;& \alpha e^{\sigma} Tr(F^{ac}F_{cb} + \tfrac{1}{4}F_{cd}F^{cd}\eta^a{}_b) \\ & -\tfrac{\beta}{2}(\Sigma^a\Sigma_b - \eta^a{}_b(\tfrac{1}{2}\Sigma_c\Sigma^c + V)) \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$D_a(e^{\sigma} F^{ab\mathcal{I}}) = 0 \tag{2.54}$$

$$\beta(\mathcal{D}_a\Sigma^a + \frac{\partial}{\partial\sigma}V) = \alpha e^{\sigma} Tr \frac{1}{2} F_{aa'}F^{aa'} \tag{2.55}$$

L'interesse di tale teoria sarà evidente nel paragrafo (2.11); per ora osserviamo solo che grazie all' invarianza di scala del potenziale (2.50) ($\frac{\partial}{\partial\sigma}V = -V$) la (2.55) si può riscrivere

$$V = \mathcal{D}_a\Sigma^a - \frac{\alpha}{2\beta} e^{\sigma} Tr F_{cd}F^{cd} \tag{2.56}$$

e quindi, sostituendo in (2.53), con qualche conto standard

$$\mathcal{R}^a{}_b = \alpha e^{\sigma} F^{ac}F_{cb} - \beta(\frac{1}{2}\Sigma_c\Sigma^c + \frac{1}{D-2}\mathcal{D}_c\Sigma^c)\eta^a{}_b. \tag{2.57}$$

Questa formula è particolarmente interessante poichè tutti i termini in $\eta^a{}_b$ spariscono nel vuoto ($\sigma = cost$); vedremo nel paragrafo (2.11) che ciò permette di cercare soluzioni compattificate su uno spaziotempo di Minkowsky. Osserviamo infine che R_S contiene un termine in $D_a\Sigma^a = \Box\sigma$:

$$R_S = -\beta \frac{D}{D-2}\Box\sigma + \cdots. \tag{2.58}$$

Nota: l'introduzione di campi scalari comporta delle complicazioni se non c'è l'invarianza di scala $\sigma \longrightarrow \sigma + c$ in quanto l'azione (2.52) può avere come coefficienti arbitrarie funzioni di σ :

$$I = \int (f_1(\sigma)R_S + f_2(\sigma) Tr \frac{1}{2} F_{aa'}F^{aa'} + \frac{1}{2}\Sigma_a\Sigma^a - \bar{e}^2 f_3(\sigma))\eta. \tag{2.59}$$

Complicazioni molto più gravi sorgono se esiste una costante colle dimensioni di una lunghezza; ci limitiamo a dare qualche cenno sul problema. Si consideri come esempio l'azione quadridimensionale non invariante di scala

$$I(\omega, v, \sigma) = \int R^{ab} v^c v^d \varepsilon_{abcd} + a\sigma R^{ab} R^{cd} \varepsilon_{abcd}, \quad a \text{ di peso } 2. \tag{2.60}$$

La presenza del termine quadratico nelle curvature (che senza il campo scalare sarebbe una derivata totale, $R^{ab}R^{cd}\varepsilon_{abcd} = d(\omega^{ab}R^{cd} - \omega^{af}\omega_f{}^b\omega^{cd})\varepsilon_{abcd}$) rende l' equazione della torsione non più algebrica ma differenziale:

$$\delta_\omega I: \quad (T^c v^d + ad\sigma R^{cd})\varepsilon_{abcd} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^c_{ab} + \frac{4}{9} a \partial_f \sigma R^{fc}{}_{ab} = 0 \tag{2.61}$$

$$\delta_v I: \quad R^{ab} v^c \varepsilon_{abcd} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = 0 \tag{2.62}$$

$$\delta_\sigma I: \quad aR^{ab}R^{cd}\varepsilon_{abcd} = 0 \quad \Rightarrow \quad R^{ab}_{[ab}R^{cd}_{cd]} = 0. \tag{2.63}$$

L'equazione (2.61) è del tipo

$$(dv + \omega v)^c_{ab} + \frac{4}{9}\partial_f \sigma (d\omega + \omega\omega)^{fc}{}_{ab} = 0 \tag{2.64}$$

e quindi è differenziale in ω e non algebrica; per risolverla si deve sviluppare in ordini del parametro a

$$\omega = \omega^{(0)} + a^1\omega^{(1)} + a^2\omega^{(2)} + \cdots \tag{2.65}$$

Inserendo lo sviluppo nelle (2.63),(2.63) si ottengono equazioni differenziali di ordine arbitrario (e si perde la località !). Non insistiamo però su questo argomento che esula dai nostri scopi (si veda [21] capitolo VI.9).

2.6 L'accoppiamento con più campi scalari

Per estendere la teoria a n campi scalari si deve introdurre il concetto di varietà scalare. L'idea è quella di pensare i campi σ^i come coordinate di una varietà riemanniana K, detta varietà scalare. Indichiamo con P^i una base di 1-forme di K e con $Q^i{}_j$ la connessione metrica[12]

$$P^i = P^i_{\jmath} d\sigma^{\jmath}, \quad DP^i = dP^i + Q^i{}_j P^j = 0; \tag{2.66}$$

[12] Usando la base coordinata e la metrica $g_{\tilde{\imath}\tilde{\jmath}} = \delta_{ij}P^i_{\tilde{\imath}}P^j_{\tilde{\jmath}}$ la connessione metrica $\Gamma^{\tilde{\imath}}{}_{\tilde{\jmath}} = \Gamma^{\tilde{\imath}}_{\tilde{\jmath}\tilde{k}} d\sigma^k$ è data dalla formula di Christoffel.

si prende come azione dei campi scalari la generalizzazione della (2.45)

$$I(\omega, v, \sigma, \Sigma) = I_G + \frac{2\beta}{D-1}\int (P^i\Sigma_i^{a_1} - \frac{1}{2D}\Sigma_i^a\Sigma_a^i v^{a_1})v^{a_2}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} \tag{2.67}$$

ovvero, usando il formalismo del secondo ordine ($\delta_\Sigma I = 0 \Rightarrow \Sigma_a^i = P_{\jmath}^i\partial_a\sigma^j \equiv P_{\jmath}^i\Sigma_a^{\jmath}$)

$$I(v,\sigma) \propto \int (R_S + \frac{\beta}{2}\Sigma_a^i\Sigma_i^a)\eta \tag{2.68}$$

oppure

$$I \propto \int (R_S + \frac{\beta}{2}g_{\tilde{i}\tilde{j}}\partial_a\sigma^i\partial^a\sigma^j)\eta \tag{2.69}$$

con equazioni

$$\begin{cases} \delta_{\omega,v}I: \quad \mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_bR_S = -\beta(\Sigma^a\Sigma_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b\Sigma^c\Sigma_c) \\ \delta_{\Sigma,\sigma}I: \quad D_a\Sigma^{ai} = 0 \quad (\partial_a\partial^a\sigma^{\imath} + \Gamma^{\imath}{}_{\jmath\tilde{k}}\partial_a\sigma^{\jmath}\sigma^{\tilde{k}} = 0). \end{cases} \tag{2.70}$$

È possibile estendere l'azione (2.69) aggiungendo un potenziale W di peso -2 con le seguenti proprietà:[13]

$$\begin{aligned} &1)\ \exists\ \sigma_0^j : \tfrac{\partial}{\partial\sigma^i}W|_{\sigma_0} = 0; \\ &2)\ \tfrac{\partial}{\partial\sigma^i}\tfrac{\partial}{\partial\sigma^j}W|_{\sigma_0} = m_{ij}^2 \text{ matrice definita positiva.} \end{aligned} \tag{2.71}$$

La configurazione di minimo $\sigma = \sigma_0$ si dice stato di vuoto della teoria; ha interesse studiare soluzioni vicine allo stato di vuoto, cioè sviluppare

$$W(\sigma) = W(\sigma_0) + 0 + \frac{1}{2}m_{ij}^2(\sigma^i - \sigma_0^i)(\sigma^j - \sigma_0^j) + \dots \tag{2.72}$$

Le equazioni del moto dedotte da

$$I = \int R_S\eta + \beta(\frac{1}{2}g_{\imath\jmath}\Sigma^{\jmath a}\Sigma_a^{\jmath} - W)\eta \tag{2.73}$$

sono

$$D_a\partial^a\sigma^i + g^{\tilde{i}\tilde{j}}\partial_{\tilde{j}}W = 0 \ \Rightarrow\ \Box_{cov}(\sigma-\sigma_0)_i + m_{jk}^2(\sigma-\sigma_0)^k = 0 \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^a{}_b - \tfrac{1}{2}\eta^a{}_bR_S &= \beta\mathcal{T}^a{}_b(\Sigma) - \tfrac{\beta}{2}W\eta^a{}_b \Rightarrow \qquad \text{a } \sigma \equiv \sigma_0, \\ \mathcal{R}^a{}_b - \tfrac{1}{2}\eta^a{}_bR_S &= -\tfrac{\beta}{2}W_0\eta^a{}_b \end{aligned} \tag{2.75}$$

[13]Non soddisfatte dal potenziale (2.50).

È sempre possibile diagonalizzare la matrice simmetrica m^2_{ij} con una trasformazione ortogonale: si ottengono così delle equazioni di Klein-Gordon del tipo

$$(\Box_{cov} + m_i^2)\phi_i = 0 + \cdots, \quad \phi = (\sigma - \sigma_0) \tag{2.76}$$

L'equazione (2.75) descrive invece uno spazio con costante cosmologica [14]

$$\Lambda = \frac{\beta}{2} W(\sigma_0). \tag{2.77}$$

Si può quindi interpretare la gravità di De Sitter sviluppata nel capitolo 1 come lo stato di vuoto di una gravità di Poincarè accoppiata con campi scalari.

Come esempio concreto consideriamo la teoria più semplice possibile, con varietà scalare piatta $g_{ij} = \delta_{ij}$ e potenziale

$$W(\sigma) = V(|\sigma - \sigma_0|^2), \quad |\sigma - \sigma_0|^2 \equiv \sum_i (\sigma^i - \sigma_0^i)^2 \tag{2.78}$$

(si noti l'invarianza per $(\sigma, \sigma_0) \longrightarrow (\Lambda\sigma, \Lambda\sigma_0)$, $(\sigma, \sigma_0) \longrightarrow (\sigma + a, \sigma_0 + a)$); risulta allora

$$m^2_{ij} = \frac{\partial}{\partial\sigma^i}\frac{\partial}{\partial\sigma^j} W|_{\sigma=\sigma_0} = 2V'(0)\delta_{ij} = m^2\delta_{ij} \tag{2.79}$$

e quindi si hanno n particelle tutte con massa $m = \sqrt{2V'(0)}$ che si muovono in uno spazio con costante cosmologica $\Lambda = \frac{\beta}{2}V(0)$. Si può osservare che in tal caso la varietà scalare coincide con lo spazio affine euclideo $K = ISO(n)/SO(n)$ e che il potenziale è $ISO(n)$-invariante.

È possibile estendere la trattazione anche a varietà omogenee $K = G/H$ generiche e a potenziali $G-$invarianti; per fare un esempio concreto consideriamo[15]

$$K = SO(n, m)/SO(n) \times SO(m).$$

Per ricavare esplicitamente P e Q si usa la rappresentazione matriciale di G[16]

$$G(\varepsilon) = e^{\frac{1}{2}\varepsilon_{IJ}T^{IJ}} \tag{2.80}$$

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}, \varepsilon_{rs} = -\varepsilon_{sr}, \varepsilon_{ir} = +\varepsilon_{ri} \tag{2.81}$$

$$\eta_{IJ} = (\delta_{ij},\ -\delta_{rs}), \quad I = 1, \cdots, n+m, \tag{2.82}$$

$$i = 1, \cdots, m,\ r = 1, \ldots, n \tag{2.83}$$

[14] Si confronti con la (1.173).

[15] Si noti che dim K = dim $SO(n,m)$ − dim $SO(n)$ − dim $SO(m) = nm$.

[16] Si confronti con la (1.78).

e la parametrizzazione di K

$$L(\sigma^i{}_r) = \exp\begin{pmatrix} & b \\ b^T & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\sigma\sigma^T} & \sigma \\ \sigma^T & \sqrt{1+\sigma^T\sigma} \end{pmatrix} \tag{2.84}$$

$$\sigma(b) = b\frac{\sinh|b|}{|b|}, \quad \sigma \equiv (\sigma^i{}_r) \quad \text{matrice } m \times n; \tag{2.85}$$

indichiamo con

$$\begin{array}{ll} G = (\Lambda^I{}_J) & \text{le matrici di } G \\ H = (\Lambda^{I'}{}_{J'}) & \text{le matrici di } H \\ L = (\Lambda^I{}_{I'}) & \text{i rappresentativi di } K \\ \bar{L} = (\Lambda^{I'}{}_I) & \text{le inverse delle } L. \end{array} \tag{2.86}$$

Come si è visto nel paragrafo (1.8) per studiare la geometria di K si considera l'1-forma

$$V^{I'}{}_{J'} = L^{I'}{}_K dL^K{}_{J'} = (\frac{1}{2}T_{ij}Q^{ij} + \frac{1}{2}T_{rs}Q^{rs} + \frac{1}{2}(T_{ir}+T_{ri})P^{ir})^{I'}{}_{J'} \tag{2.87}$$

da cui si ricavano base e connessione

$$\begin{array}{ll} P^i{}_r \equiv V^i{}_r = & (\sqrt{1+\sigma\sigma^T}d\sigma - \sigma\frac{d\sigma^T\sigma+\sigma^T d\sigma}{2\sqrt{1+\sigma^T\sigma}})^i{}_r \\ Q^i{}_j \equiv V^i{}_j = & (\frac{d\sigma\sigma^T+\sigma d\sigma^T}{2})^i{}_j \\ Q^r{}_s \equiv V^r{}_s = & (\frac{d\sigma^T\sigma+\sigma^T d\sigma}{2})^r{}_s \end{array} \tag{2.88}$$

L'equazione di Maurer-Cartan $dV + VV = 0$ dà informazioni su torsione e curvatura

$$\begin{array}{l} dP^i{}_r + Q^i{}_j P^j{}_r + P^i{}_s Q^s{}_r = 0 \\ dQ^i{}_j + Q^i{}_k Q^k{}_j + P^i{}_r P_j{}^r = 0 \\ dQ^r{}_s + Q^r{}_t Q^t{}_r + P_i{}^r P^i{}_s = 0 \\ \qquad \Updownarrow \\ DP^i{}_r = 0 \\ R^i{}_j = -P^i{}_r P_j{}^r \\ R^r{}_s = -P_i{}^r P^i{}_s \end{array} \tag{2.89}$$

da P e Q si ricavano la metrica, i vettori di Killing e i compensatori colle tecniche del paragrafo (1.9). Vogliamo ora studiare le leggi di $G-$trasformazione, cioè l'equazione (1.113) usando le convenzioni (2.86). Si ottengono le relazioni

$$\begin{array}{ll} \Lambda^I{}_{I'} \longrightarrow \Lambda^I{}_K \Lambda^K{}_{L'} \bar{\Lambda}^{L'}{}_{I'} & (L \longrightarrow GL\bar{H}) \\ \Lambda^{I'}{}_I \longrightarrow \Lambda^{I'}{}_{L'} \Lambda^{L'}{}_L \bar{\Lambda}^L{}_I & (\bar{L} \longrightarrow H\bar{L}\bar{G}) \\ V^{I'}{}_{J'} \longrightarrow \Lambda^{I'}{}_{L'} V^{L'}{}_{M'} \bar{\Lambda}^{M'}{}_{J'} + \Lambda^{I'}{}_{K'} d\bar{\Lambda}^{K'}{}_{J'} & \end{array} \tag{2.90}$$

cioè

$$\begin{array}{l} Q^i{}_j \rightarrow \Lambda^i{}_k Q^k{}_l \bar{\Lambda}^l{}_j + \Lambda^i{}_k d\bar{\Lambda}^k{}_j \\ Q^r{}_s \rightarrow \Lambda^r{}_t Q^t{}_u \bar{\Lambda}^u{}_s + \Lambda^r{}_t d\bar{\Lambda}^t{}_s \\ P^i{}_r \rightarrow \Lambda^i{}_j P^j{}_s \bar{\Lambda}^s{}_r \end{array} \tag{2.91}$$

Sfruttando le leggi (2.90) si possono costruire oggetti $G-$invarianti, come per esempio

$$\tilde{V}(\sigma) = (\alpha \Lambda^I{}_r \Lambda^J{}_r + \beta \Lambda^I{}_i \Lambda^J{}_i)\eta_{IJ} \tag{2.92}$$

tuttavia non è possibile costruire potenziali per motivi di peso: non si possono ottenere funzioni di peso -2, a meno di non avere a disposizione una costante dimensionale di peso -1: in tal caso basta porre per esempio

$$V(\sigma) = e^2 \tilde{V}(\sigma) \tag{2.93}$$

Si può ottenere la costante e se c'è un gruppo di Yang-Mills, cioè se oltre alle $G-$trasformazioni globali c'è anche un gruppo di trasformazioni locali S; in tal caso e è interpretata come la costante di accoppiamento della teoria di gauge.

2.7 Teorie di gauge

Per quanto si è detto in precedenza il nostro scopo è quello di rendere locale un sottogruppo S di isometrie di G; in tal modo si può accoppiare alla teoria un potenziale e un multipletto di campi vettoriali a valori nella rappresentazione aggiunta di S. Nel seguito continuiamo a considerare l'esempio di $G = SO(n,m)$; tuttavia molto di quanto è detto ha validità generale.

Consideriamo il comportamento della 1-forma $\bar{L}dL$ per S-trasformazioni locali $L \longrightarrow SLH_S^{-1}$ (gli elementi di S sono indicati con $S = \Lambda^I{}_J$)

$$\begin{aligned} L^{-1}dL \rightarrow \quad & H_S L^{-1} S^{-1} (dSLH_S^{-1} + SdLH_S^{-1} + SLdH_S^{-1}) = \\ & H_S L^{-1} S^{-1} dSLH_S^{-1} + H_S L^{-1} dLH_S^{-1} + H_S dH_S^{-1} \end{aligned} \tag{2.94}$$

Se si vuole avere una buona legge di trasformazione bisogna introdurre dei campi vettoriali a valori in S' con trasformazione $A \longrightarrow SA\bar{S} + Sd\bar{S}$

$$\begin{aligned} L^{-1}(d+A)L \rightarrow \quad & H_S L^{-1} S^{-1} (d + SAS^{-1} + SdS^{-1}) SLH_S^{-1} = \\ & H_S L^{-1}(d+A)LH_S^{-1} + H_S dH_S^{-1} \end{aligned} \tag{2.95}$$

(per $G-$trasformazioni globali invece dev'essere $A \rightarrow GA\bar{G}$ per avere la solita (1.113)). In tal modo P e Q diventano dipendenti dai campi A

$$\bar{L}(d+A)L = \frac{1}{2}T_{ij}Q(A)^{ij} + \frac{1}{2}T_{rs}Q(A)^{rs} + \frac{1}{2}(T_{ir} + T_{ri})P(A)^{ir} \tag{2.96}$$

e per S-trasformazioni locali la legge di trasformazione è la stessa che per G-trasformazioni globali

$$\begin{array}{l} Q(A)^i{}_j \to \Lambda^i{}_k Q(A)^k{}_l \bar{\Lambda}^l{}_j + \Lambda^i{}_k d\bar{\Lambda}^k{}_j \\ Q(A)^r{}_s \to \Lambda^r{}_t Q(A)^t{}_u \bar{\Lambda}^u{}_s + \Lambda^r{}_t d\bar{\Lambda}^t{}_s \\ P(A)^i{}_r \to \Lambda^i{}_j P(A)^j{}_s \bar{\Lambda}^s{}_r. \end{array} \tag{2.97}$$

Ciò assicura che le $S-$trasformazioni siano isometrie locali della metrica

$$g(A) = P^{ir} \otimes P^{ir}. \tag{2.98}$$

Supponiamo ora che S abbia dimensione $N = n + m$ e che I sia un indice nella rappresentazione aggiunta di S:

$$\nabla X^I \equiv dX^I + A^I{}_K X^K, \quad A^I{}_K \equiv c^I_{JK} A^J; \tag{2.99}$$

poichè S' è sottoalgebra di G', che ha generatori T_{IJ} $\eta-$ antisimmetrici, anche i generatori $(C_J)^I{}_K \equiv c^I_{JK}$ di S' sono tali e risulta

$$(\eta C_I)^T = -(\eta C_I) \quad \Longleftrightarrow \quad c_{KIL} = c_{[KIL]}. \tag{2.100}$$

In particolare la (2.100) è soddisfatta se η è la metrica di Killing di S; ciò pone dei vincoli sui possibili S; per esempio scelte possibili sono (usiamo convenzioni in cui la metrica di Killing[17] di $SO(1,2)$ ha segnatura $+--$, quella di $SO(3)$ $+++$ e quella di $SO(1,3)$ $+++---$.)

$$\begin{array}{lll} n = 1, m = 2, & = +--, & S = SO(2,1) \\ n = 2, & = ++-\cdots-, & S = SO(1,2) \times H_{m-1} \\ n = 3, & = +++-\cdots-, & S = SO(1,3) \times H_{m-3} \text{ o } SO(3) \times H_m \end{array} \tag{2.101}$$

con H_l gruppo compatto di dimensione l e metrica di Killing $--\cdots--$. Se S si spezza in fattori le costanti di accoppiamento possono essere diverse (la loro presenza è sottointesa nei generatori:[18]

$$A = C_{I_1} A^{I_1} + C_{I_2} A^{I_2} \tag{2.102}$$

va pensata come

$$A = e_1 C_{I_1} A^{I_1} + e_2 C_{I_2} A^{I_2} \tag{2.103}$$

[17] Eventualmente moltiplicata per -1.

[18] I_1 indici del primo fattore, I_2 indice del secondo fattore.

con e_1 ed e_2 costanti di accoppiamento di peso -1 (i campi vettoriali, al solito, hanno peso +1)). L'equazione di Maurer-Cartan si scrive (per $A' = \bar{L}(d+A)L = \bar{L}AL + \bar{L}dL$)

$$dA' + A'A' = F' = \bar{L}FL, \quad F = dA + AA \tag{2.104}$$

ovvero, definite le "costanti di struttura boosted" o $C-$funzioni[19]

$$c^{I'}_{J'K'}(\sigma) = \Lambda^{I'}{}_I c^I_{JK} \Lambda^J{}_{J'} \Lambda^K{}_{K'} \tag{2.106}$$

si ha

$$dA'^{I'}{}_{J'} + A'^{I'}{}_{K'} A'^{K'}{}_{J'} = c^{I'}_{K'J'} F^{K'}. \tag{2.107}$$

Più esplicitamente la geometria della varietà scalare è data da [20]

$$\begin{cases} DP^i{}_r &= c^i_{K'r} F^{K'} \\ R^i{}_j &= -P^i{}_r P_j{}^r + c^i_{K'j} F^{K'} \\ R^r{}_s &= -P_i{}^r P^i{}_s + c^r_{K's} F^{K'} \end{cases} \tag{2.108}$$

Le $C-$funzioni possiedono varie proprietà in seguito alle identità di Jacobi sulle costanti c^I_{JK}; in particolare sono covariantemente costanti

$$\nabla' c^{I'}_{J'K'} = (\nabla c^I_{JK})' = 0. \tag{2.109}$$

La (2.109) si può riscrivere spezzando gli indici $I' = (i, r)$ e la connessione $A'^{I'}{}_{J'} = (Q^i{}_j, Q^r{}_s, P^r{}_r)$ nella forma

$$Dc^i_{jk} = -P^i{}_r c^r_{jk} + c^i_{rk} P_j{}^r + c^i_{jr} P_k{}^r \tag{2.110}$$

(le formule per Dc^r_{jk}, Dc^i_{rk}, ... sono simili) e quindi le derivate di $C-$funzioni sono $C-$funzioni.

Notiamo infine che in forma finita la (2.109) corrisponde alla proprietà di invarianza

$$c^I_{JK} = \Lambda^I_L c^L_{MN} \bar{\Lambda}^M_J \bar{\Lambda}^N_K \tag{2.111}$$

che in sostanza è l'azione della rappresentazione aggiunta sui generatori C_I[21]:

$$SC_J\bar{S} = C_K \Lambda^K{}_J; \tag{2.112}$$

---

[19] La definizione (2.106) da un punto di vista matriciale equivale alla posizione

$$\mathcal{C}_{J'} \Lambda^{J'}{}_J = \bar{L} C_J L, \quad (\mathcal{C}_{J'})^{I'}{}_{K'} \equiv c^{I'}_{J'K'}; \tag{2.105}$$

dunque si può scrivere $F' = \mathcal{C}_{I'} F^{I'}, F^{I'} = \Lambda^{I'}{}_I F^I$.

[20] Usiamo $A'^{I'}{}_{J'} = (Q^i{}_j(A), Q^r{}_s(A), P^i{}_r(A))$.

[21] Si confronti con la (1.41).

la (2.111) comporta

$$c^{I'}_{J'K'} \longrightarrow \Lambda^{I'}_{L'} c^{L'}_{M'N'} \Lambda^{M'}_{J'} \Lambda^{N'}_{K'} \tag{2.113}$$

e quindi oggetti del tipo

$$V(\sigma) = \alpha c^{ijk} c_{ijk} + \beta c^{ijr} c_{ijr} + \gamma c^{irs} c_{irs} + \delta c^{rst} c_{rst} \tag{2.114}$$

sono $S-$invarianti e hanno peso -2: dunque con essi si possono costruire dei potenziali e la teoria si può dedurre dall'azione invariante

$$I(v, \sigma, A) = \int (R_S + \beta(\frac{1}{2}\Sigma^{ir}_a \Sigma^a_{ir} - V) + \frac{\alpha}{2}\eta_{IJ} F^I_{ab} F^{Jab})\eta \tag{2.115}$$

$(\Sigma^{ir}_a \equiv (\bar{L}(\partial_a + A_a)L)^{ir}$. Tuttavia l'azione (2.115) non è soddisfacente poichè la metrica η_{IJ} non è definita positiva come avviene nei termini cinetici ordinari (ciò può dare luogo a "tachioni",cioè a particelle di massa immaginaria con equazioni (nel vuoto) del tipo $(\Box + m_I^2)A^I = 0,\ m_I^2 < 0)$; si può correggere questo difetto osservando che esiste una metrica cinetica vettoriale $a_{IJ}(\sigma)$,cioè un tensore simmetrico definito positivo

$$a_{IJ} = \eta_{IK}\eta_{JL}(\Lambda^K_r \Lambda^L_r + \Lambda^K_i \Lambda^L_i); \tag{2.116}$$

si può quindi usare a_{IJ} in luogo di η_{IJ} mantenendo le invarianze.

Nota 1: le teorie con campi scalari e campi di gauge si indicano genericamente col nome di $\sigma-$model non lineari; l'interesse di tali teorie è che, utilizzando potenziali opportuni, è possibile trovare soluzioni di vuoto in cui alcune delle simmetrie locali sono rotte spontaneamente. Ciò, tramite il fenomeno di Higgs, permette di dare massa ad alcuni dei campi vettoriali, ottenendo così in pratica le particelle del modello standard, se si effettuano opportunamente:

1. la scelta di M (tipicamente $M = G/H$);
2. la scelta di S (isometrie locali);
3. la scelta del potenziale (fenomeno di Higgs);
4. la scelta dei valori delle costanti della teoria.

Chiaramente c'è un alto grado di arbitrarietà, di modo che si possono ottenere teorie molto generali ma molto poco "fondamentali" (una teoria fondamentale dovrebbe dare tutto, o quasi tutto, in maniera univoca, senza scelte arbitrarie o "ad hoc"); uno dei grandi vantaggi delle teorie di supergravità, è proprio il fatto che la supersimmetria impone dei vincoli molto forti che in certi casi permettono di ricavare univocamente i punti

1,2,3,4, che diventano in sostanza degli "output" della teoria, piuttosto che degli "input" messi a mano: la consistenza interna fissa tutte (o quasi tutte) le arbitrarietà.

Nota 2: quanto è stato fatto nel paragrafo precedente per campi scalari reali si può rifare per campi complessi e campi quaternonici prendendo come varietà scalare

$$K = SU(n) \times U(1)/SU(n-1) \quad (\dim K = 2nm)$$

oppure

$$K = Sp(n,m)/Sp(n) \times Sp(m) \quad (\dim K = 4nm)$$

Preferiamo però non introdurre in questa sede la geometria complessa e quaternionica e dedicarci invece, come promesso nell'introduzione, al problema delle teorie con più di quattro dimensioni.

2.8 Gravità in dimensione grande

Evidentemente teorie della gravità (accoppiata o meno) in più di quattro dimensioni hanno senso fisico solo quando esiste un meccanismo che permette di eliminare le dimensioni extra: tale meccanismo è noto come compattificazione. Per illustrare questo punto si consideri una varietà a $D = 4 + n$ dimensioni con coordinate $\hat{w}^a = (w^x, u^r)$ e base intrinseca[22]

$$v^a_{\tilde{a}}(\hat{w}) = \begin{pmatrix} v^x_{\tilde{x}}(w) & \\ & v^r_{\tilde{r}}(u) \end{pmatrix}; \tag{2.117}$$

la (2.117) comporta che la connessione metrica e la metrica di M siano del tipo

$$\omega^a{}_b(\hat{w}) = \begin{pmatrix} \omega^x{}_{y\tilde{z}}(w)dw^z & \\ & \omega^r{}_{s\tilde{t}}(u)du^t \end{pmatrix}, \tag{2.118}$$

$$g_{\tilde{a}\tilde{b}}(\hat{w}) = \begin{pmatrix} g_{\tilde{x}\tilde{y}}(w) & \\ & g_{\tilde{r}\tilde{s}}(u) \end{pmatrix}; \tag{2.119}$$

varietà di questo tipo sono il prodotto diretto di uno spaziotempo quadridimensionale M_4 e una varietà interna M_n $n-$dimensionale,

$$M_D = M_4 \times M_n. \tag{2.120}$$

[22] In questo paragrafo usiamo le seguenti convenzioni:

$$\begin{array}{ll} \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} = \text{ indici curvi di } M_D, & a, b, c \text{ indici piatti} \\ \tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t} = \text{ indici curvi di } M_n, & r, s, t \text{ indici piatti ;} \\ \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} = \text{ indici curvi di } M_4, & x, y, z \text{ indici piatti.} \end{array}$$

Si dice che una teoria gravitazionale $D-$dimensionale ammette compattificazione se le sue equazioni del moto ammettono soluzioni di vuoto con M_4 di Minkowsky o di (Anti) De Sitter e M_n compatta (tipicamente M_n è una varietà omogenea G/H). Se definiamo come raggio di M_n una lunghezza dell'ordine di $(Volume(M_n))^{\frac{1}{n}}$ è chiaro che pensando di mandare r a zero (compattificazione) le coordinate "interne" u diventano ininfluenti e restano solo le solite quattro coordinate fisiche w. In maniera equivalente si può dire che il raggio di compattificazione resta finito ma siamo interessati solo a scale molto maggiori di r. Il valore "naturale" di r è $r=1$; questo vuol dire, passando dalle unità naturali al SI, $r=1.6\times10^{-35}m$ (lunghezza di Planck): tale lunghezza è molto più piccola di ogni scala su cui si possa lavorare sperimentalmente per cui effettivamente le dimensioni extra in pratica spariscono (si dice che si compattifica sulla scala di Planck). Naturalmente però la presenza originaria delle dimensioni extra ha varie conseguenze sullo spazio fisico, che (almeno in linea di principio) possono essere verificate sperimentalmente. Tale meccanismo in generale è abbastanza complicato e sarà accennato nel paragrafo (2.12); qui ci accontentiamo di illustrare cosa accade nella riduzione dimensionale $D+1\to D$ (compattificazione sul circolo $U(1)$; il caso $D+1=5\to4$ è la famosa teoria di Kaluza-Klein degli anni '20).

2.9 Compattificazione sul circolo $U(1)$

La teoria $(D+1)-$dimensionale in generale conterrà un gravitone v^a, dei campi scalari σ^i, dei gluoni $A^{\mathcal{I}}$ e delle $k-$forme materiali B, più dei campi ausiliari che si possono ottenere da questi e che quindi non interessano. Il gravitone si può ridurre a un gravitone $D-$dimensionale v^x accoppiato con un campo vettoriale A e uno scalare σ; infatti si può scrivere[23]

$$v_a^{\tilde{a}}=\begin{pmatrix}\phi^{1/2}v_x^{\tilde{x}} & -\phi^{1/2}A_x\\ 0 & \phi^{-1}\end{pmatrix},\quad v_{\tilde{a}}^{a}=\begin{pmatrix}\phi^{-1/2}v_{\tilde{x}}^{x} & A_{\tilde{x}}\phi\\ 0 & \phi\end{pmatrix}\tag{2.122}$$

(i termini $v_{\tilde{r}}^{x}$ si possono eliminare con una $SO(1,D)-$rotazione) e il conto dei gradi di libertà torna:

$$\begin{aligned}\deg(v_{\tilde{a}}^{a})=\tfrac{(D+1)(D-2)}{2} &= \deg(v_{\tilde{x}}^{x})+\deg(A_{\tilde{a}})+\deg(\phi)\\ &= \tfrac{D(D-3)}{2}+(D-2)+1\end{aligned}\tag{2.123}$$

I campi scalari $(D+1)-$dimensionali diventano campi scalari $D-$dimensionali, ma per il resto non cambia nulla: la geometria della varietà scalare è la stessa. Per questo motivo

[23] Si noti che nel vuoto $\phi=cost, A=0$ il gravitone assume la forma

$$v_{\tilde{a}}^{a}\sim\begin{pmatrix}v_{\tilde{x}}^{x} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\tag{2.121}$$

nel seguito li trascureremo. La riduzione dei campi vettoriali invece genera degli scalari aggiuntivi, non preesistenti in $D+1$ dimensioni, e quindi importanti:

$$A^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}}_{\tilde{x}} dw^x + \sigma^{\mathcal{I}} du \tag{2.124}$$

In generale le $k-$forme generano delle $(k-1)-$forme aggiuntive:

$$B = \frac{1}{k!} B_{\tilde{x}_1\cdots\tilde{x}_k} dw^{x_1}\cdots dw^{x_k} + \frac{1}{(k-1)!} C_{x_1\cdots x_{k-1}} dw^{a_1}\cdots dw^{a_{k-1}} du. \tag{2.125}$$

Effettuate le decomposizioni (2.122), (2.124), (2.125) il metodo più semplice per eliminare la coordinata non fisica v è supporre che i campi fisici non dipendano da essa (compattificazione banale); ne segue che anche i campi ausiliari non dipendono da u e che lo stesso vale per la lagrangiana totale[24]; dunque

$$I = \int \mathcal{L}(\hat{w}) d^{D+1}\hat{w} = \int \mathcal{L}(w) d^D w du = 2\pi r \int \mathcal{L}(w) d^D w. \tag{2.127}$$

La riduzione esplicita della lagrangiana sfrutta la formula[25]

$$\mathcal{R}^a_a = \omega_{abc}\omega^{bca} + \omega_b{}^a{}_a \omega^{bc}{}_c - \frac{2}{\hat{\epsilon}} \partial_{\tilde{a}} (\hat{\epsilon} v^{\tilde{a}}_a \omega^{ac}{}_c); \tag{2.128}$$

ricavando ω da v tramite la (2.35) e sfruttando $\hat{\epsilon} = \det v^a_{\tilde{a}} = \phi^{-D/2+1} \det v^x_{\tilde{x}}$ $(= \phi^{-1}\epsilon$ se $D=4)$ risulta, dopo un conto non brevissimo,

$$\begin{aligned} I \ &= 2\pi r \textstyle\int d^D w \epsilon[(R_S + \phi^3 F_{xy}F^{xy} - \frac{3}{2}\phi^{-2}\Phi_x\Phi^x) + \alpha\phi^{-1} Tr(\frac{1}{2}F_{xy}F^{xy} + \\ &\Sigma_x\Sigma^x) + \tfrac{\beta}{2}\phi^{-1}(G_{x_1\cdots x_{k+1}}G^{x_1\cdots x_{k+1}} + (k+1)H_{x_1\cdots x_k}H^{x_1\cdots x_k}) \end{aligned} \tag{2.129}$$

e quindi, ridefinendo $\phi \to e^\phi$,

$$\begin{aligned} I \ &= 2\pi r \textstyle\int d^D w \epsilon[(R_S + e^{3\phi} F_{xy}F^{xy} - \frac{3}{2}\Phi_x\Phi^x) + \alpha e^{-\phi} Tr(\frac{1}{2}F_{xy}F^{xy} + \\ &\Sigma_x\Sigma^x) + \tfrac{\beta}{2}e^{-\phi}(G_{x_1\cdots x_{k+1}}G^{x_1\cdots x_{k+1}} + (k+1)H_{x_1\cdots x_k}H^{x_1\cdots x_k}). \end{aligned} \tag{2.130}$$

Si noti che tale azione possiede l'invarianza di scala $\phi \to \phi + c$, $A \to e^{\frac{3}{2}c}A$, $(A^{\mathcal{I}}, \sigma^{\mathcal{I}}, B, C) \to e^{\frac{c}{2}}(A^{\mathcal{I}}, \sigma^{\mathcal{I}}, B, C)$, $e \to e^{-\frac{c}{2}}e$. Dalla (2.130) si ottengono le equazioni del moto della teoria

[24] Esplicitamente

$$I(\hat{v},\hat{A},\hat{B}) = \int d^{D+1}w\hat{\epsilon}(\hat{R}_S + \frac{\alpha}{2}\hat{F}^{\mathcal{I}}_{ab}\hat{F}^{ab}_{\mathcal{I}} + \beta\frac{1}{2}\hat{H}_{a_1\cdots a_{k+1}}\hat{H}^{a_1\cdots a_{k+1}}) \tag{2.126}$$

[25] Ricavata in [42].

effettiva $D-$dimensionale.

Una cosa importantissima da studiare è come sono viste le invarianze della teoria $(D+1)-$dimensionale dal punto di vista $D-$dimensionale; la $SO(1,D)-$invarianza, in seguito alla scelta (2.122), si rompe in una $SO(1,D-1)-$invarianza, mentre l'invarianza per diffeomorfismi

$$\begin{array}{l} \ell_\xi T^{\tilde{a}} = \xi^{\tilde{b}}\partial_{\tilde{b}}T^{\tilde{a}} - \xi^{\tilde{a}}_{,\tilde{b}}T^{\tilde{b}} \\ \ell_\xi T_{\tilde{a}} = \xi^{\tilde{b}}\partial_{\tilde{b}}T_{\tilde{a}} + T_{\tilde{b}}\xi^{\tilde{b}}_{,\tilde{a}} \end{array} \tag{2.131}$$

per $T^{\tilde{a}} = T^{\tilde{a}}(w)$, $T_{\tilde{a}} = T_{\tilde{a}}(w)$, $\xi^{\tilde{a}} = \xi^{\tilde{a}}(w)$ si spezza in

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \ell_{\xi^{\tilde{x}}\partial_{\tilde{x}}}(T_{\tilde{x}}, T_{\tilde{r}}) = (\ell_\xi T_{\tilde{x}}, \xi^{\tilde{x}}\partial_{\tilde{x}}T_{\tilde{r}}) \\ \ell_{\xi^{\tilde{x}}\partial_{\tilde{x}}}(T^{\tilde{x}}, T^{\tilde{r}}) = (\ell_\xi T^{\tilde{x}}, \xi^{\tilde{x}}\partial_{\tilde{x}}T^{\tilde{r}}) \end{array} \right. \tag{2.132}$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \ell_{\xi^{\tilde{r}}\partial_{\tilde{r}}}(T_{\tilde{x}}, T_{\tilde{r}}) = (T_{\tilde{r}}\xi^{\tilde{r}}_{,\tilde{x}}, 0) \\ \ell_{\xi^{\tilde{r}}\partial_{\tilde{r}}}(T^{\tilde{x}}, T^{\tilde{r}}) = (0, -\xi^{\tilde{r}}_{,\tilde{x}}T^{\tilde{x}}) \end{array} \right. \tag{2.133}$$

In particolare diffeomorfismi $(D+1)-$dimensionali del tipo (2) (che sono isometrie nel vuoto) corrispondono a trasformazioni di gauge sul campo $D-$dimensionale A[26]:

$$\begin{array}{lll} \ell_{(2)}v^r_{\tilde{x}} = v^r_{\tilde{s}}\xi^{\tilde{s}}_{,\tilde{x}} & \Longleftrightarrow & \ell_{(2)}(A_{\tilde{x}}\phi) = \phi\xi_{,\tilde{x}} \\ & \Longleftrightarrow & \ell_{(2)}A_{\tilde{x}} = \partial_{\tilde{x}}\xi = \delta_{gauge}A_{\tilde{x}}. \end{array} \tag{2.134}$$

Questa in sostanza è l'idea originaria di Kaluza e Klein, che per primi introdussero questo meccanismo di compattificazione già negli anni '20: partendo da una teoria 5-dimensionale puramente gravitazionale è possibile spiegare l'elettromagnetismo 4-dimensionale. Estendendo questa idea si è cercato di unificare nella metrica $(4+n)$-dimensionale tutte le interazioni della natura: infatti compattificando su varietà $n-$dimensionali opportune (in pratica per $n=7$) è possibile estrarre dal gravitone (dalla metrica) anche campi vettoriali non abeliani (in particolare i gluoni di $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$) e le simmetrie di gauge in quattro dimensioni si spiegano come conseguenze della invarianza per diffeomorfismi in $4+n$ dimensioni. In tal modo si compie il processo di unificazione e si riduce tutta la Fisica ad una teoria puramente geometrica. Questa era anche l'idea portante della supergravità in 11-dimensioni, di cui parleremo meglio nel capitolo 7: la supersimmetria comporta la presenza di un gravitino e di una 3-forma A; quest'ultima

[26] L'idea non è poi così diversa da quella su cui poggia il group manifold approach secondo il quale le simmetrie di gauge sono spiegate da particolari diffeomorfismi sul gruppo vincolato; anche nel caso di teorie di Kaluza-Klein si può vedere la condizione di non fisicità delle coordinate u come l'annullarsi delle componenti u delle curvature dei campi.

dà luogo ad un meccanismo di compattificazione spontanea in 4+7 dimensioni; scegliendo opportunamente la varietà compatta 7-dimensionale è possibile ottenere i campi di gauge delle particelle elementari (più altri bosoni) dal gravitone e i fermioni dal gravitino; in tal modo si riesce a spiegare tutto. Questo bellissimo programma è però illusorio in seguito a due gravi problemi che qui semplicemente enunciamo[27]:

1. la compattificazione genera una costante cosmologica elevatissima;
2. è impossibile spiegare la chiralità: i gruppi di gauge che provengono dalle isometrie di una metrica in $4+n$ dimensioni ammettono solo rappresentazioni reali.

Il meccanismo di compattificazione è comunque essenziale; infatti i problemi 1) e 2) si possono evitare in dimensioni diverse da 11. Nel prossimo paragrafo lo illustreremo per il caso $D=6$, in cui si compattifica sulla sfera $SO(3)/SO(2)$; nel capitolo 8 lo accenneremo nel caso $D=10$, in cui la varietà su cui si compattifica non è di tipo G/H, ma è un Calabi-Yau tridimensionale; in quest'ultimo caso però si deve pagare un prezzo: le simmetrie di gauge devono essere preesistenti anche in 10 dimensioni e non sono più deducibili dalle isometrie, negando così in sostanza l'idea base di KK.

Diamo ora un paio di esempi molto elementari (ma molto importanti) di teorie compattificate da $4+n \to 4$ dimensioni.

2.10 Compattificazione in undici dimensioni

Un modo rapido per avere informazioni sulla teoria 4-dimensionale è cercare direttamente soluzioni di vuoto delle equazioni D-dimensionali; supponiamo per esempio di avere una teoria con una 3-forma A; le equazioni del moto sono[28]

$$\mathcal{R}^a_b - \frac{1}{2}\eta^a_b \mathcal{R}^a_a = -\frac{\alpha}{2}(4F^{cdea}F_{cdeb} - \frac{1}{2}\eta^a_b F^{cdef}F_{cdef}) \tag{2.135}$$

$$\mathcal{D}_a F^{abcd} = 0 \qquad (\alpha > 0) \tag{2.136}$$

Cerchiamo una soluzione di vuoto compattificata. Ciò significa che cerchiamo soluzioni in cui lo spazio $D-$dimensionale si spezza in uno spazio quadridimensionale di Minkowsky o di Anti De Sitter, $M = SO(1,3,\bar{e})/SO(1,3)$, e in uno spazio $n-$dimensionale compatto $K = G/H$; in particolare il gravitone e la metrica si scrivono nella forma (2.117), (2.119), mentre per F tentiamo l'ansatz, che assicura l'invarianza per traslazioni e trasformazioni di Lorentz 4-dimensionali

$$F_{abcd} = 0 \text{ tranne che per } F_{xyzw} = e\varepsilon_{xyzw} \tag{2.137}$$

[27] La teoria 11-dimensionale ha problemi anche a livello quantistico, ma non ce ne occupiamo in questa sede.

[28] Vedremo che le equazioni del moto della supergravità in 11 dimensioni sono simili a queste.

In tal modo la (2.136) è identicamente soddisfatta, mentre la (2.135) che riscriviamo, sfruttando trucchi standard

$$\mathcal{R}^a_b = -\frac{\alpha}{2}((3+1)F^{c_1\cdots c_3 a}F_{c_1\cdots c_3 b} - \frac{3}{D-2}\eta^a_b F^{c_1\cdots c_4}F_{c_1\cdots c_4}) \tag{2.138}$$

si scompone in

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{xy} = \alpha 4! e^2(1-\frac{3}{D-2})\eta_{xy} = 16\alpha e^2\eta_{xy} \\ \mathcal{R}_{xr} = 0 \\ \mathcal{R}_{rs} = -\alpha(\frac{3}{D-2}4! e^2)\eta_{rs} = -8\alpha e^2 \eta_{rs} \end{cases} \tag{2.139}$$

La (2.139a) conferma il nostro ansatz per M_4, mentre la (2.139c) ci dice che K è uno spazio di Einstein; nel caso $n=7$ (che interessa per la supergravità 11-dimensionale) tutti i possibili spazi K sono stati classificati:

$$\begin{array}{l} 1)\ K = SO(8)/SO(7) \\ 2)\ K = SO(7)/G_2 \\ 3)\ K = SU(4)\times U(1)/SU(3)\times U(1) \\ 4)\ K = SO(6)\times SO(3)\times U(1)/SO(5)\times U(1)\times U(1) \\ 5)\ K = Sp(4)\times SU(2)\times U(1)/SU(2)\times SU(2)\times U(1) \\ 6)\ K = SU(2)\times SU(2)\times SU(2)\times U(1)/U(1)\times U(1)\times U(1) \\ 7)\ K = SU(3)\times SU(2)\times U(1)/SU(2)\times U(1)\times U(1) \end{array} \tag{2.140}$$

Tali spazi sono tutti compatti (si parla di compattificazione spontanea)e hanno tutti curvatura positiva: dev'essere allora $\bar{e}^2 < 0$ e quindi lo spazio quadridimensionale è di Anti De Sitter. Osserviamo, prima di concludere, che le scelte (2.140) (soluzioni di Freund-Rubin) non sono uniche: sono possibili anche altre soluzioni, tra le quali

1. soluzioni di Englert in cui $F_{r_1\cdots r_7} \neq 0$;
2. soluzioni "warped" in cui $g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{xy}(v) & \\ & a(v)g_{rs}(u) \end{pmatrix}$;
3. soluzioni "stretched" (vedi [21] capitolo V.9).

2.11 Compattificazione sulla sfera

Illustriamo ora un altro esempio di compattificazione; la varietà compatta più semplice possibile dopo il circolo $U(1)$ è la sfera $K = SO(3)/SO(2)$: dunque la compattificazione più semplice avviene riducendo sulla sfera da $D \to D-2$. Per studiare la geometria della sfera si può usare il metodo generale usato nel paragrafo (1.9) per $SO(1, D-1, \bar{e})/SO(1, D-1)$

(basta cambiare qualche segno per avere la vera sfera $SO(n+1)/SO(n)$) oppure più semplicemente considerare la parametrizzazione di $SO(3)$ [29]

$$L(\theta,\phi) = e^{\phi T_{12}} e^{\theta T_{23}} \tag{2.141}$$

da cui si estraggono base e connessione

$$L^{-1}dL = \frac{1}{2}T_{ij}\omega^{ij} + T_{i3}v^i = J_{12}\omega^{12} + P_i v^i \tag{2.142}$$

Basta infatti sfruttare l'azione della rappresentazione aggiunta per $H = e^{\theta T_{23}}$

$$\begin{aligned} H^{-1}T_{12}H &= \cos\theta T_{12} - \sin\theta T_{31} \\ H^{-1}T_{23}H &= T_{23} \\ H^{-1}T_{31}H &= \sin\theta T_{12} + \cos\theta T_{31} \end{aligned} \tag{2.143}$$

per avere

$$\begin{aligned} & L^{-1}dL = (\cos\theta T_{12} - \sin\theta T_{31})d\phi + T_{23}d\theta = \omega T_{12} + v^a T_{a3} \\ & \Rightarrow \omega = \cos\theta d\phi, \quad v^1 = \sin\theta d\phi, \quad v^2 = d\theta. \end{aligned} \tag{2.144}$$

Come detto in (1.9) la sfera è uno spazio di Einstein[30]:

$$\mathcal{R}_{st} = (d\omega^r{}_s)_{rt} = (-\varepsilon^r{}_s \sin\theta d\theta d\phi)_{rt} = (v^1 v^2)_{rt}\varepsilon^r{}_s = \eta_{st}. \tag{2.145}$$

Un metodo alternativo, ancora più semplice, è quello di partire direttamente dall'espressione della sfera in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \sin\theta\cos\phi \\ y = \sin\theta\sin\phi \\ z = \cos\theta \end{cases} \tag{2.146}$$

da queste si ricava subito la metrica

$$\begin{aligned} g &= dx\otimes dx + dy\otimes dy + dz\otimes dz \\ &= \sin^2\theta d\phi\otimes d\phi + d\theta\otimes d\theta \\ &= v^1\otimes v^1 + v^2\otimes v^2 \end{aligned} \tag{2.147}$$

[29]
$$T_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{23} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{31} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[30] In generale una sfera di raggio a ha tensore di Ricci $\mathcal{R}_{rs} = a^{-2}\eta_{rs}$ (a è una costante dimensionale di peso 1).

e quindi i 2-bein (2.144). La connessione metrica si ricava dalla definizione

$$\mathcal{D}v = 0 \Rightarrow \omega^r{}_s = \varepsilon^r{}_s \cos\theta d\phi \tag{2.148}$$

e si riottiene la (2.144). Si noti che $\varepsilon^i{}_j$ è covariantemente costante rispetto alla connessione metrica (o si fa esplicitamente il conto o si osserva che $\varepsilon^i{}_j$ è un tensore $SO(2)-$invariante), cioè

$$\mathcal{D}_t \varepsilon^r{}_s = 0. \tag{2.149}$$

La compattificazione sulla sfera è possibile in teorie $(D+2)-$dimensionali del tipo (2.52). Verifichiamolo esplicitamente. cercando soluzioni di vuoto di tipo "$Minkowsky \times sfera\ S^2$":

$$v^a = (dw^x, v^r),\ \sigma \equiv \sigma_0,\ A = A_r(u)v^r \quad \Rightarrow \tag{2.150}$$

$$\omega^a{}_b = (0, \omega^r{}_s),\ \Sigma = 0,\ F = \frac{1}{2}F_{rs}v^r v^s. \tag{2.151}$$

Tali soluzioni sono possibili in quanto il tensore di Ricci (2.57) nelle coordinate spaziotemporali e nelle coordinate miste è identicamente nullo se valgono le (2.150)

$$\mathcal{R}_{xy} = 0, \quad \mathcal{R}_{rs} = 0 \tag{2.152}$$

e l'unica equazione da soddisfare è quella sulle coordinate sferiche

$$\mathcal{R}_{rs} = \alpha e^{\sigma} F_r{}^t F_{ts}. \tag{2.153}$$

A differenza del caso precedente si deve assumere che il campo elettromagnetico [31] sia non banale nelle dimensioni "sferiche" [32]; è immediato verificare che la scelta[33]

$$A = e^{-1}(1 - cos\theta)d\phi \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{1}{2}a^{-2}e^{-1}\varepsilon_{rs}\tilde{v}^r\tilde{v}^s \tag{2.154}$$

è una soluzione delle equazioni di Yang-Mills (2.54) che rispetta le invarianze di peso e di scala e dà

$$F^{rt}F_{ts} = -a^{-4}e^{-2}\eta^r{}_s. \tag{2.155}$$

Dunque l'equazione di Einstein sulla sfera (2.153) dà

$$a^{-2}\eta^r{}_s = -\alpha a^{-4}e^{-2}\eta^r{}_s e^{\sigma_0} \ \Rightarrow\ e^2 = -\alpha a^{-2}e^{\sigma_0} \tag{2.156}$$

[31] Cerchiamo soluzioni in cui tutti i campi $A^{\mathcal{I}}$ sono nulli tranne uno con curvatura $F = dA$.

[32] Ciò è indispensabile per potere avere $\mathcal{R}_{rs} = a^{-2}\eta_{rs} \neq 0$.

[33] Usiamo la base $\tilde{v}^r = av^r$ per rispettare le dimensioni fisiche ($\tilde{v}$ ha peso 1 mentre v è adimensionale).

mentre l'equazione del campo scalare (2.55) porge

$$-\beta e^2 e^{-\sigma_0} = \alpha e^{\sigma_0} e^{-2} a^{-4} \;\Rightarrow\; e^4 = -\frac{\alpha}{\beta} e^{2\sigma_0} a^{-4}; \tag{2.157}$$

c'è compatibilità tra le due sse

$$\alpha = -\frac{1}{\beta}. \tag{2.158}$$

Nelle teorie di supergravità la scelta delle costanti non è affatto "ad hoc" : esse sono fissate indipendentemente da condizioni di invarianza e se capita che siano proprio tali da verificare le (2.158) si parla di nuovo di compattificazione spontanea. Questo fenomeno avviene in varie teorie fra cui la supergravità 6-dimensionale accoppiata con un multipletto tensore (ma si può ragionare in maniere simile anche nelle supergravità in $D = 7, 8, 9, 10$, che hanno lo stesso contenuto di campi bosonici); si noti che a differenza del caso precedente non ci sono problemi di costante cosmologica (si può anche provare che da fermioni chirali 6-dimensionali possono nascere fermioni chirali 4-dimensionali [44], evitando così pure il problema 2).

2.12 Cenni sui modi massivi

Nel paragrafo (2.9) abbiamo compattificato nell' ipotesi semplificativa che i campi della teoria non dipendessero dalle coordinate u ; tale assunzione evidentemente taglia molto del contenuto della teoria originaria $(4+n)-$ dimensionale: la teoria ridotta non è equivalente alla genitrice. Per non perdere informazioni si deve tener conto della dipendenza da u; se per semplicità ci limitiamo alla compattificazione su $U(1)$, u vive nell' intervallo $[0, 2\pi r]$, è possibile effettuare uno sviluppo di Fourier [34]

$$\Phi(w, u) = \sum_{n \in Z} \Phi_n(w) Y_n(u), \quad Y_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{-inu/r} \tag{2.159}$$

Le funzioni Y_n sono le armoniche di Fourier e sono autofunzioni dell' operatore $\Box_u$; soddisfano inoltre le condizioni di ortonormalità e completezza

$$\int_0^{2\pi r} Y_n^* Y_m du = \delta_{nm}, \quad \sum_n Y_n^*(u) Y_n(u') = \delta(u - u') \tag{2.160}$$

dunque le equazioni del moto $(D+1)-$dimensionali, del tipo (a livello linearizzato)

$$\Box \Phi = 0 \qquad (\Box = \Box_w + \Box_u = \partial_a \partial^a - \partial_u^2) \tag{2.161}$$

[34] I campi Φ possono avere degli indici sottointesi.

si scrivono

$$(\Box_w + m_n^2)\Phi_n = 0, \quad m_n^2 \equiv \frac{n^2}{r^2}; \tag{2.162}$$

lo sviluppo di Fourier genera infinite particelle di masse m_n, più una particella senza massa, corrispondente a $n = 0$, detta 0-modo di Kaluza-Klein. La compattificazione banale sviluppata nel paragrafo scorso corrisponde a trascurare tutti i modi massivi e a tenere solo gli 0-modi; la teoria completa invece possiede una lagrangiana

$$\mathcal{L}_{TOT}(\Phi_n, \partial_p \Phi_n) = \int_{U(1)} du \mathcal{L}(\sum \Phi_n Y_n, \sum \partial_x \Phi_n Y_n, \sum \frac{-in}{r}\Phi_n Y_n). \tag{2.163}$$

Per esempio nel caso elettromagnetico si ha (nel vuoto gravitazionale $g_{ef} = \eta_{ef}$)

$$I = \int \frac{\alpha}{2}(F_{xy}F^{xy} + 2F_{xr}F^{xr})d^4w \tag{2.164}$$

con[35]

$$\begin{aligned} F_{xr}F^{xr} &= (\partial_x A_r - \partial_r A_x)(\partial^x A^r - \partial^r A^x) \\ &= \textstyle\sum_{nm}(\partial_x \phi_n + \frac{in}{r}A_x)(-\partial^x \phi_m - \frac{im}{r}A^x)Y_n Y_m \end{aligned} \tag{2.165}$$

sfruttando l'invarianza di gauge $A \longrightarrow A + df$, che si può riscrivere

$$\delta A_{x(n)} = \partial_x f_{(n)}, \quad \delta\phi_{(n)} = -\frac{in}{r} f_{(n)} \tag{2.166}$$

si può scegliere la gauge $\phi_n = 0$ (con $f_{(n)} = \frac{r}{in}\phi_{(n)}$, $n \neq 0$) ottenendo

$$\begin{aligned} I_{n\neq 0} &= \textstyle\int \frac{\alpha}{2}\sum_n (F_{xy(n)}F^{xy}_{(n)} + 2\frac{n^2}{r^2}A_{x(n)}A^x_{(n)})d^D x \\ &= \textstyle\int \alpha \sum_{k>0}(F^+_{xy(k)}F^{xy}_{(k)} + m_k^2 A^+_{x(k)}A^x_{(k)}) \end{aligned} \tag{2.167}$$

con equazioni del moto

$$\partial_x A^x = 0, \qquad (\Box_w + m_n^2)A_x = 0 \tag{2.168}$$

che descrivono un insieme infinito di bosoni carichi di spin 1 e masse multiple della scala di compattificazione, $m_n = \frac{n}{r}$. Con tecniche simili si può ricavare anche l'azione gravitazionale completa (vedi [21] pag. 1173) e, a livello linearizzato, oltre agli 0-modi si trova una torre di gravitoni carichi massivi di massa $m_n = n/r$; poichè m_1 è dell'ordine della massa di Planck tutte queste particelle sono inosservabili e nel limite di bassissime

[35] Usiamo $A = (A_x, A_r) = (A_x, \phi)$.

energie sono del tutto trascurabili; perciò l'unica parte che conta dell'azione è quella relativa agli 0-modi, detta azione effettiva

$$I_{EFF} = I_{n=0} = \int_{M_4} \int_{M_n} \mathcal{L}(\Phi_0, \partial_x \Phi_0) \tag{2.169}$$

In tal modo si giustifica la possibilità di trascurare la dipendenza da u.

Nota: è possibile estendere i risultati precedenti al caso più generale in cui K è una varietà compatta $K = G/H$ generica (eventualmente $K = G$). Il ragionamento si complica notevolmente da un punto di vista formale, ma da un punto di vista concettuale è lo stesso: semplicente si sostituiscono le armoniche di Fourier con H-armoniche $Y_n(u)(n$ indice multiplo) autofunzioni dell'operatore di massa

$$-\Box_u Y_n = M^2_{nm} Y_m; \tag{2.170}$$

M^2_{nm} è una matrice che, diagonalizzata, dà lo spettro di massa delle particelle della teoria; evidentemente determinare le armoniche Y_n e soprattutto diagonalizzare M_{nm} è un problema non banale, che preferiamo non approfondire ulteriormente (si veda[21]).

Capitolo 3

SPINORI

3.1 Introduzione

In questo capitolo ci occuperemo di teorie contenenti spinori; viene quindi data tutta una serie di indispensabili informazioni tecniche sulle rappresentazioni del gruppo metrico (proprietà delle matrici Γ; proprietà degli spinori; identità di Fierz). L'utilità di queste tecniche sarà chiara nei prossimi capitoli, in cui cominceremo finalmente a parlare di supergravità.

3.2 Alcuni preliminari

Per quanto si è visto nei capitoli precedenti si può assumere il seguente principio fondamentale:

ogni teoria fisica da noi considerata dev'essere descritta da equazioni (e quindi da un'azione[1] *) Lorentz-invarianti: i campi (p-forme) della teoria devono avere proprietà di trasformazione ben definite e dev'essere*

$$I(A', B', C', \ldots) = I(A, B, C, \ldots) \quad (\delta_L I = 0). \tag{3.1}$$

Ogni teoria contenente la gravità inoltre deve contenere dei campi v e ω con le seguenti leggi di trasformazione

$$\begin{cases} v'^a = \bar{\Lambda}^a{}_b v^b, & \delta v^a = -\varepsilon^a{}_b v^b \\ \omega'^a{}_b = \bar{\Lambda}^a{}_c \omega^c{}_d \Lambda^d{}_b + \bar{\Lambda}^a{}_c d\Lambda^c_b, & \delta\omega^a{}_b = \mathcal{D}\varepsilon^a{}_b. \end{cases} \tag{3.2}$$

[1] Esistono comunque equazioni del moto Lorentz-invarianti non deducibili da un'azione spaziotemporale Lorentz-invariante; tipicamente ciò accade per la condizione di autodualità $F_{a_1\cdots a_k} = \frac{1}{k!}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} F^{a_{k+1}\cdots a_D}$ che non può essere dedotta dall'unica azione invariante contenente F, $I \propto \int F_{a_1\cdots a_k} F^{a_1\cdots a_k}$. Torneremo sul problema nel paragrafo (6.9).

È importantissimo il caso in cui il gruppo di Lorentz agisce linearmente sui campi (come per esempio nella (3.2a); la (3.2b) fornisce invece un'azione non lineare, $\omega \to \omega' \not\Rightarrow \omega_1 + \omega_2 \to \omega_1' + \omega_2'$); il problema di determinare tutte le possibili rappresentazioni lineari del gruppo di Lorentz equivale a quello di determinare tutti i possibili tipi di campi con cui si può costruire una teoria Lorentz-invariante. Dedicheremo i prossimi paragrafi alla soluzione di questo problema (troveremo anzi in generale le rappresentazioni del gruppo metrico $SO(P, D-P)$).

3.3 Rappresentazioni lineari del gruppo metrico

Cominciamo ricordando che una rappresentazione lineare di un gruppo H sullo spazio vettoriale (complesso) Z è un omomorfismo

$$\begin{aligned} &H \to H(Z) \subset GL(Z) \\ &a \longrightarrow \Lambda_Z \\ &\Lambda_Z(e) = \mathbb{1}, \quad \Lambda_Z(a)\Lambda_Z(b) = \Lambda_Z(ab) \end{aligned} \tag{3.3}$$

dove Λ_Z è una trasformazione lineare (matrice invertibile) su Z; se H è un gruppo di Lie a $\dim H$ parametri, data una rappresentazione lineare $H(Z)$ si costruisce l'algebra di Lie della rappresentazione, $H'(Z)$, considerando le trasformazioni infinitesime:

$$H(Z) = 1 + \varepsilon H'(Z). \tag{3.4}$$

Nella pratica si costruisce prima una rappresentazione dell'algebra di Lie ed esponenziando si ricava quindi la rappresentazione del gruppo, o meglio del rivestimento universale $\tilde{H}$ di H:

$$\tilde{H}(Z) = \exp(H'(Z)) \tag{3.5}$$

A questo punto applichiamo quanto detto al gruppo metrico. Nella rappresentazione definente H è fatto da matrici reali Λ soddisfacenti

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{3.6}$$

e dunque l'algebra di Lie H' è fatta da matrici S soddisfacenti

$$S^T \eta + \eta S = 0 \tag{3.7}$$

scegliendo $(S_{ab})^c{}_d = 2\eta^c_{[a}\eta_{b]d}$ si hanno le regole di commutazione;[2]

$$[S^{ab}, S_{cd}] = -4\eta^{[a}{}_{[c}S_{d]}{}^{b]}. \tag{3.8}$$

[2] Già note dal capitolo 1.

Si noti che H è caratterizzato da $D(D-1)/2$ parametri e che si può scrivere

$$\Lambda(\varepsilon) = \exp(\frac{1}{2} S_{aa'} \varepsilon^{aa'}) \tag{3.9}$$

Per avere delle rappresentazioni di H' in Z si devono determinare delle matrici $\Sigma_{ab} \in End(Z)$ soddisfacenti le (3.8). Supponiamo che in $End(Z)$ esistano D matrici Γ_a soddisfacenti

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\eta_{ab}; \tag{3.10}$$

allora basta definire

$$\Sigma_{ab} = \frac{[\Gamma_a, \Gamma_b]}{4} \tag{3.11}$$

per avere quanto voluto.

Uno spazio Z che ospiti le matrici (3.10) si dice di Clifford; ogni spazio di Clifford contiene allora una rappresentazione del gruppo metrico che si dice spinoriale (di Dirac per $H = SO(1, D-1)$), ottenuta per esponenziazione:

$$\Lambda_Z(\varepsilon) = \exp(\frac{1}{2} \Sigma_{aa'} \varepsilon^{aa'}) \tag{3.12}$$

Le matrici Λ formano un gruppo, il rivestimento universale $\tilde{H}$ di $SO(P, D-P)$, detto $Spin(P, D-P)$; in particolare com'è noto risulta

$$Spin(3,0) = SU(2), \quad Spin(1,3) = SL(2, C). \tag{3.13}$$

Altre notizie sul gruppo spinoriale sono date nella bibliografia [12]; qui ci accontiamo di dare una formula di importanza fondamentale che instaura un omomorfismo tra una "rotazione vettoriale" $\Lambda^a{}_b$ e una coppia di "rotazioni spinoriali" $\pm\Lambda_Z$ [3]:

$$\Lambda_Z \Gamma_a \bar{\Lambda}_Z = \Gamma_b \Lambda^b{}_a. \tag{3.14}$$

La dimostrazione avviene con tecnica standard ponendo

$$X_a(t) \equiv e^{\frac{1}{2}\Sigma_{aa'}\varepsilon^{aa'}t} \Gamma_a e^{-\frac{1}{2}\Sigma_{aa'}\varepsilon^{aa'}t} \tag{3.15}$$

e considerando l'equazione differenziale[4]

$$\begin{aligned} \dot{X}_c &= e^{\frac{1}{2}\Sigma_{aa'}\varepsilon^{aa'}t} \tfrac{1}{2}[\Sigma_{ab}, \Gamma_c]\varepsilon^{ab} e^{-\frac{1}{2}\Sigma_{aa'}\varepsilon^{aa'}t} \\ &= X_a \varepsilon^a{}_c \quad \Longrightarrow X_c(t) = X_b \Lambda^b{}_c(t\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.16}$$

[3] Ciò implica che la rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz è una rappresentazione per raggi (proiettiva).

[4] Nella dimostrazione si usano le regole di commutazione $[\Gamma_{ab}, \Gamma_c] = 4\Gamma_{[a}\eta_{b]c}$.

e per $t = 1$ si ha quanto voluto. La (3.14) è importante perchè si si può scrivere anche nella forma

$$\Gamma^{\alpha}_{b\delta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\Gamma^{\beta}_{a\gamma}\bar{\Lambda}^{a}{}_{b}\bar{\Lambda}^{\gamma}{}_{\delta} \tag{3.17}$$

si dice allora che le matrici Γ sono $SO(P, D-P)-$singoletti o oggetti $SO(P, D-P)-$invarianti; a livello differenziale la (3.17) equivale alla condizione di essere covariantemente costante:

$$\mathcal{D}\Gamma^{a}_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.18}$$

Ci interessa ora la costruzione esplicita dello spazio spinoriale.

3.4 Spazi di Clifford

Sia η_{ab} la matrice metrica di $SO(P, D-P)$; si dicono matrici Γ_a in D dimensioni D matrici complesse soddisfacenti le (3.10); si noti che le (3.10) implicano

$$\Gamma_a\Gamma_b = -\Gamma_b\Gamma_a \quad (a \neq b), \quad \Gamma_a^2 = +1 \text{ o } -1. \tag{3.19}$$

Le matrici Γ^a si possono pensare come rappresentative di operatori lineari in uno spazio vettoriale complesso $C(P, D-P)$,detto spazio di Clifford. L'algebra degli operatori (matrici) sullo spazio $C(P, D-P)$ si dice algebra di Clifford e le matrici Γ_a si dicono suoi generatori in quanto ogni operatore può essere ottenuto come un polinomio nelle Γ_a ; in pratica, in seguito alle proprietà (3.10) l'algebra di Clifford $C(P, D-P)$ si può ottenere considerando combinazioni lineari a coefficienti complessi del tipo

$$\sum \alpha_{(k)}\Gamma_{(k)} = \alpha \mathbb{1} + \alpha_{a_1}\Gamma^{a_1} + \alpha_{a_1a_2}\Gamma^{a_1a_2} + \cdots + \alpha_{a_1\cdots a_D}\Gamma^{a_1\cdots a_D} \tag{3.20}$$

avendo definito[5]

$$\Gamma_{(k)} \equiv \Gamma_{a_1\cdots a_k} \equiv \Gamma_{[a_1}\cdots\Gamma_{a_k]} \tag{3.21}$$

Dunque $C(P, D-P)$ si può pensare come uno spazio vettoriale di dimensione complessa 2^D. Quanto si è detto in realtà vale solo in dimensione $D = 2\bar{D}$ pari (proveremo nel prossimo paragrafo che in $D' = 2\bar{D}+1$ dispari $\dim C(P, D-P) = 2^{D'-1}$), in cui si può definire la matrice [6]

$$\Gamma^{(D+1)} = \Gamma_{(D+1)} = \xi_D\Gamma_0\cdots\Gamma_{D-1}, \quad \xi_D = \sqrt{(-1)^{D-P}(-1)^{\frac{D(D-1)}{2}}} \tag{3.22}$$

[5]Le $\Gamma_{(k)}$ hanno $\begin{pmatrix} D \\ k \end{pmatrix}$componenti distinte; si noti inoltre che vale $\sum_{k=0}^{D}\begin{pmatrix} D \\ k \end{pmatrix} = 2^D$.

[6]Per $SO(1, D-1)$ $\xi_D = i$ in dimensione $D = 4, 8, \ldots$ e $\xi_D = 1$ in $D = 2, 6, 10, \ldots$.

ciò assicura sia $\Gamma^2_{(D+1)} = 1$; inoltre $\Gamma_{(D+1)}$ anticommuta con le Γ_a , commuta con le Γ_{ab} e in generale soddisfa

$$\begin{aligned} &\Gamma_{(D+1)}\Gamma_{(k)} = +\Gamma_{(k)}\Gamma_{(D+1)} \ (\text{k pari}) \ , \\ &\Gamma_{(D+1)}\Gamma_{(k)} = -\Gamma_{(k)}\Gamma_{(D+1)} \ (\text{k dispari}). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dalle proprietà (3.10) si può ricavare la seguente formula, tratta da [21] cap. II.7.

$$\begin{aligned} &\Gamma^{a_1\cdots a_n c_1\cdots c_q}\Gamma_{c_1\cdots c_q b_1\cdots b_n} = \textstyle\sum_{k=0}^{\min(n,m)} c_k(q,n,m)\eta^{[a_1\cdots a_k}_{[b_1\cdots b_k}\Gamma^{a_{k+1}\cdots a_n]}{}_{b_{k+1}\cdots b_m]}, \\ &c_k(q,n,m) = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}(-1)^{\frac{k(k-(-1)^{n-1})}{2}}\binom{n}{k}\binom{m}{k}q!k!\binom{D-n-m+k}{q}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

La (3.24) può sembrare piuttosto oscura; nella pratica poi si usano sempre dei suoi casi particolari. Ne riportiamo alcuni.[7]

$$\begin{aligned} &\Gamma_a\Gamma^a = D \\ &\Gamma_{ab}\Gamma^{ab} = -D(D-1) \\ &\Gamma_{(k)}\Gamma_{(k)} = (-1)^{\bar{k}}k!\binom{D}{k} \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} &\Gamma_a\Gamma^{ab} = (D-1)\Gamma^b \\ &\Gamma_a\Gamma^{abc} = (D-2)\Gamma^{bc} \\ &\Gamma_a\Gamma^{ab_1\cdots b_k} = (D-k)\Gamma^{b_1\cdots b_k} \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} &\Gamma_a\Gamma^c\Gamma^a = -(D-2)\Gamma^c \\ &\Gamma_a\Gamma_{(k)}\Gamma^a = (-1)^k(D-2k)\Gamma_{(k)} \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} &\Gamma_{ab}\Gamma^c\Gamma^{ab} = -[(D-2)^2 - D]\Gamma^c \\ &\Gamma_{ab}\Gamma_{(k)}\Gamma^{ab} = -[(D-2k)^2 - D]\Gamma_{(k)} \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} &\Gamma^a\Gamma_{b_1\cdots b_k} = \Gamma^a{}_{b_1\cdots b_k} + k\eta^a{}_{[b_1}\Gamma_{b_2\cdots b_k]} \\ &\Gamma_{b_1\cdots b_k}\Gamma^a = \Gamma^a_{b_1\cdots b_k} + k\Gamma_{[b_1\cdots b_{k-1}}\eta^a_{b_k]} \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\Gamma^{ac_1\cdots c_q}\Gamma_{c_1\cdots c_q} = (-1)^{\bar{q}}q!\binom{D-1}{q}\Gamma^d \tag{3.30}$$

Dalle (3.29) si possono ricavare i commutatori $[\Gamma^{ab}, \Gamma_{cd}]$ e $[\Gamma_{ab}, \Gamma_c]$ sfruttando

$$\Gamma^{ab}\Gamma_{cd} = \Gamma^{ab}{}_{cd} - 4\eta^{[a}{}_{[c}\Gamma^{b]}{}_{d]} - \eta^{ab}_{cd}. \tag{3.31}$$

[7] Usiamo le abbreviazioni $\bar{k}$ = parte intera di $\frac{k}{2}$, $\tilde{k} = \overline{k+1}$; dunque

$$(-1)^{\bar{k}} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}, \quad (-1)^{\tilde{k}} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

3.5 Spazi di Dirac

In questo paragrafo vogliamo costruire esplicitamente lo spazio di Clifford nel caso del gruppo di Lorentz $SO(1, D-1)$ (ma lo stesso metodo è facilmente adattabile a ogni segnatura). È facile verificare che in due dimensioni le matrici[8]

$$\Gamma_0 = \sigma_2, \quad \Gamma_1 = i\sigma_3 \tag{3.33}$$

soddisfano le proprietà (3.10) e che la matrice Γ_3 si può scrivere

$$\Gamma_3 = i\Gamma_0\Gamma_1 = -\sigma_1. \tag{3.34}$$

Il nostro scopo è quello di costruire le matrici Γ_a in ogni dimensione a partire dal caso $D = 2$. Se D è pari è possibile ricavare le Γ_a dal caso $(D-2)-$dimensionale sfruttando il prodotto tensore colle matrici di Pauli:[9]

$$\Gamma^a = \Gamma^a|_{D-2} \otimes \sigma_1, \quad \Gamma_{D-2} = \mathbb{1}|_{D-2} \otimes i\sigma_3, \quad \Gamma_{D-1} = \mathbb{1}|_{D-2} \otimes i\sigma_2. \tag{3.35}$$

Lo spazio che le ospita ha la desiderata dimensione $2^{\bar{D}}$. Nel caso invece di dimensione dispari $D' = 2\bar{D} + 1$ si sfrutta lo spazio costruito precedentemente e si pone

$$\Gamma_{(D'-1)} = i\Gamma_{(D+1)} \tag{3.36}$$

in modo che valgano ancora le (3.19). Conseguenze delle definizioni (3.22) e (3.36) sono le seguenti formule di dualizzazione[10]:

$$\Gamma_{a_1 \cdots a_{D-p}} \propto \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} \Gamma_{(D+1)} \Gamma^{a_{D-p+1} \cdots a_D} \quad D \text{ pari.} \tag{3.38}$$

[8] Le σ_x sono le matrici di Pauli che, come è ben noto, soddisfano

$$\sigma_x \sigma_y = i \sum_{z=1}^{3} \varepsilon_{xyz} \sigma_z \ \Rightarrow \{\sigma_x, \sigma_y\} = 2\delta_{xy}, \quad [\sigma_x, \sigma_y] = 2i \sum_{z=1}^{3} \varepsilon_{xyz} \sigma_z \tag{3.32}$$

[9] Basta ricordare le proprietà

$$A \otimes A' = \begin{pmatrix} AA'_{11} & AA'_{12} \\ AA'_{21} & AA'_{22} \end{pmatrix}, \quad (A \otimes A')(B \otimes B') = (AB) \otimes (A'B')$$

.

[10] In particolare la proprietà di dualizzazione in dimensione dispari dice che lo spazio degli operatori su $C(P, D-P)$ è formato dalle combinazioni lineari del tipo

$$\sum \alpha_{(k)} \Gamma_{(k)} = \alpha \mathbb{1} + \alpha_{a_1} \Gamma^{a_1} + \alpha_{a_1 a_2} \Gamma^{a_1 a_2} + \cdots + \alpha_{a_1 \cdots a_{\bar{D}}} \Gamma^{a_1 \cdots a_{\bar{D}}} \tag{3.37}$$

e quindi ha $2^{D'-1}$ e non $2^{D'}$ dimensioni (le $\Gamma_{(k)}$ con più di $\bar{D}$ indici si possono ottenere come combinazioni lineari delle $\Gamma_{(D-k)}$ che hanno meno di $\bar{D}$ indici).

$$\Gamma_{a_1\cdots a_{D'-p}} \propto \varepsilon_{a_1\cdots a_D}\Gamma^{a_{D'-p+1}\cdots a_{D'}} \qquad D' = D+1 \text{ dispari.} \tag{3.39}$$

Per provarle basta usare il trucco

$$\begin{aligned} &\Gamma_0\cdots\Gamma_{(D-1)} = \tfrac{1}{D!}\Gamma_{a_1\cdots a_D}\varepsilon^{a_1\cdots a_D} \\ &(\Gamma_{a_1\cdots a_d} = (-1)^{D-1}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}\Gamma_0\cdots\Gamma_{(D-1)}); \end{aligned} \tag{3.40}$$

in seguito alle (3.22), (3.36) vale allora la proprietà

$$\Gamma_{a_1\cdots a_D} = \varepsilon_{a_1\cdots a_D}\zeta_D \tag{3.41}$$

con

$$\begin{aligned} &\zeta_D = i\Gamma_{(D+1)} \quad (D=4,8), \qquad &&\zeta_D = \mathbb{1} \quad (D=5,9), \\ &\zeta_D = -\Gamma_{(D+1)} \quad (D=2,6,10), &&\zeta_D = i\mathbb{1} \quad (D=3,7,11). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Usando la (3.24) si prova allora

$$\Gamma_{a_1\cdots a_n c_1\cdots c_{D-n}}\Gamma^{c_1\cdots c_{D-n}} = (-1)^{\overline{D-n}}(D-n)!\Gamma_{a_1\cdots a_n} \tag{3.43}$$

cioè

$$\Gamma_{a_1\cdots a_n} = \frac{(-1)^{\overline{D-n}}}{(D-n)!}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}\zeta_D\Gamma^{a_{n+1}\cdots a_D} \tag{3.44}$$

che corrisponde alle (3.38), (3.39). Studiamo ora alcune altre proprietà delle Γ_a.

È immediato verificare dalla forma esplicita delle matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

le seguenti proprietà:

$$\sigma_i^+ = \sigma_i, \quad Tr\sigma_i = 0. \tag{3.46}$$

Queste si trasportano in modo ovvio alle Γ 2-dimensionali

$$\Gamma_0^+ = \Gamma_0, \quad \Gamma_{a\neq 0}^+ = -\Gamma_a, \quad \Gamma_{(D+1)}^+ = \Gamma_{(D+1)} \tag{3.47}$$

$$Tr\Gamma_a = 0, \quad Tr\Gamma_{(D+1)} = 0 \tag{3.48}$$

ma grazie alle proprietà del prodotto tensore[11] valgono pure in generale.

Posto

$$A \equiv \Gamma_0 \qquad (\text{per } SO(P, D-P) \ A \propto \Gamma_0 \cdots \Gamma_{P-1}) \tag{3.49}$$

le proprietà di hermiticità si scrivono

$$\Gamma_a^+ = A\Gamma_a A^{-1} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{(k)}^+ = (-1)^{\bar{k}} A\Gamma_{(k)} A^{-1} \tag{3.50}$$

Risulta quindi

$$\Gamma_{ab}^+ = -A\Gamma_{ab} A^{-1} \tag{3.51}$$

ovvero, per $\Lambda = e^{\frac{1}{4}\Gamma_{ab}\varepsilon^{ab}}$,

$$\Lambda_Z^+ A \Lambda_Z = A \quad (\Lambda_Z^{-1} = A^{-1}\Lambda_Z^+ A). \tag{3.52}$$

La condizione (3.52) dice che le rappresentazioni del gruppo di Lorentz Λ_Z e Λ_Z^{-1+} sono equivalenti (cioè collegati da una matrice A fissata) e assicura che il prodotto scalare

$$\bar{\psi}\chi \equiv \psi^+ A\chi \tag{3.53}$$

sia Lorentz-invariante e che le correnti $\bar{\psi}\Gamma_{(k)}\chi$ siano Lorentz-tensori:

$$\bar{\psi}\Gamma_{a_1\cdots a_k}\psi \longrightarrow \bar{\psi}\Gamma_{b_1\cdots b_k}\psi\Lambda^{b_1}a_1 \cdots \Lambda^{b_k}{}_{a_k} \tag{3.54}$$

Studiamo ora le proprietà di realtà di tali correnti: per spinori soddisfacenti $\psi^\alpha\psi^\beta = \psi^\beta\psi^\alpha$, $(\psi^\alpha\psi^\beta)^* = -\psi^{\beta *}\psi^{\alpha *}$ risulta[12]

$$(\bar{\psi}\Gamma_{(k)}\psi)^* = (-1)^{\bar{k}+1}\bar{\psi}\Gamma_{(k)}\psi; \tag{3.55}$$

per spinori soddisfacenti $\lambda^\alpha\lambda^\beta = -\lambda^\beta\lambda^\alpha$, $(\lambda^\alpha\lambda^\beta)^* = (\lambda^{\beta *}\lambda^{\alpha *})$

$$(\bar{\lambda}\Gamma_{(k)}\lambda)^* = (-1)^{\bar{k}}\bar{\lambda}\Gamma_{(k)}\lambda \tag{3.56}$$

e in generale le proprietà di realtà cambiano a seconda delle proprietà di commutazione-anticommutazione degli spinori.

Studiamo ora le proprietà di traccia. Vogliamo provare che

$$Tr\Gamma_{(k)} = 0, \quad \forall k > 0. \tag{3.57}$$

[11] $(A \otimes B)^+ = A^+ \otimes B^+, \quad Tr(A \otimes B) = TrATrB.$

[12] Per $k = 0, 1, 2, \ldots \quad (-1)^{\bar{k}} = + + - - + + - - \cdots, \quad (-1)^{\tilde{k}} = + - - + + - - \cdots.$

Cominciamo a dimostrarlo nel caso D pari. Il ragionamento

$$\begin{aligned} Tr\Gamma_{a_1\cdots a_k} &= Tr(\Gamma_{[a_1}\cdots\Gamma_{a_k]}) = Tr(\Gamma_{[a_k}\Gamma_{a_1}\cdots\Gamma_{a_{k-1})} \\ &= (-1)^{k-1}Tr\Gamma_{a_1\cdots a_k} \end{aligned} \tag{3.58}$$

dice che la traccia è nulla se k è pari; il ragionamento

$$\begin{aligned} Tr\Gamma_{a_1\cdots a_k} &= Tr(\Gamma_{a_1\cdots a_k}\Gamma_{(D+1)}\Gamma_{(D+1)}) == Tr(\Gamma_{(D+1)}\Gamma_{a_1\cdots a_k}\Gamma_{(D+1)}) \\ &= (-1)^k Tr\Gamma_{a_1\cdots a_k} \end{aligned} \tag{3.59}$$

invece dice che la traccia è nulla se k è dispari. Quindi k è nullo in ogni caso e come corollario

$$Tr\Gamma_{(D+1)} \propto Tr\Gamma_{a_1\cdots a_D} = 0, \quad Tr(\Gamma_{(k)}\Gamma_{(D+1)}) \propto \Gamma_{(D-k)} = 0 \tag{3.60}$$

La formula (3.57) evidentemente vale anche se $D' = D+1$ è dispari, visto che le matrici Γ^a in D' dimensioni non sono altro che le Γ^a in D dimensioni con aggiunta la $\Gamma_{(D+1)}$.

3.6 Spazi di Majorana

Si può provare in generale che in dimensione pari esistono delle matrici $C_\pm$ dette di coniugazione di carica soddisfacenti[13]

$$C_\pm\Gamma_a C_\pm^{-1} = \pm\Gamma_a^T \tag{3.61}$$

(vedi per esempio [15] che costruisce una base in cui $C = \Gamma_0\cdots\Gamma_{\bar{D}-1}$). Le matrici $C_\pm$ evidentemente soddisfano $C_+ \propto C_-\Gamma_{(D+1)}$ e quindi basta scegliere arbitrariamente una delle due per ottenere l'altra; in dimensione dispari D' invece esiste o solo C_- o solo C_+ a seconda che sia $C\Gamma_{D'-1}C^{-1} = +\Gamma_{D'-1}^T$ o $C\Gamma_{D'-1}C^{-1} = -\Gamma_{D'-1}^T$ (C_- e C_+ applicate a $\Gamma_{D'-1} = i\Gamma_{(D+1)}$ danno lo stesso risultato):

$$C_\pm\Gamma_{D'-1}C_\pm^{-1} = (-1)^{\bar{D}}\Gamma_{D'-1}^T \tag{3.62}$$

e quindi in $D' = 5, 9$ c'è C_+, in $D = 3, 7, 11$ c'è C_-.

A seconda del loro comportamente rispetto alla coniugazione di carica le matrici $\Gamma_{(k)}$ si dividono in $C-$simmetriche e $C-$antisimmetriche:

$$(\Gamma_{(k)}C)^T = \Gamma_{(k)}C, \qquad (\Gamma_{(k)}C)^T = -\Gamma_{(k)}C \tag{3.63}$$

Le proprietà di simmetria e di realtà di C dipendono dalle convenzioni adottate e dalla dimensione. Se seguiamo [21], che prende matrici C sempre reali otteniamo la tabella seguente.

---

[13] È immediato verificare che le (3.61) comportano $C_+\Gamma_{(p)}C_+^{-1} = (-1)^{\bar{p}}\Gamma_{(p)}^T$, $C_-\Gamma_{(p)}C_-^{-1} = (-1)^{p+\bar{p}}\Gamma_{(p)}^T$; dunque per $p = D \quad \Rightarrow \quad C_\pm\Gamma_{(D+1)}C_\pm = (-1)^{\bar{D}}\Gamma_{(D+1)}^T$.

Proprietà di $C-$simmetria delle matrici $\Gamma_{(k)}$: si intende sempre $C = C^*$, $\quad C = C^{-1T}$.

Dim	Proprietà di C	Matrici C-simmetriche	C-antisimmetriche
2	$C = C_-, C = -C^T$	Γ_a	$1, \Gamma_3, \Gamma_3\Gamma_a$
3	$C = C_-, C = -C^T$	Γ_a	1
4	$C = C_-, C = -C^T$	Γ_a, Γ_{ab}	$1, \Gamma_5, \Gamma_5\Gamma_a$
5	$C = C_+, C = -C^T$	Γ_{ab}	$1, \Gamma_a$
6	$C = C_-, C = +C^T$	$1, \Gamma_{abc}, \Gamma_7\Gamma_{ab}$	$\Gamma_a, \Gamma_{ab}, \Gamma_7\Gamma_a, \Gamma_7$
7	$C = C_-, C = +C^T$	$1, \Gamma_{abc}$	Γ_a, Γ_{ab}
8	$C = C_+, C = +C^T$	$1, \Gamma_a, \Gamma_{abcd}, \Gamma_9\Gamma_{abc}, \Gamma_9$	$\Gamma_{ab}, \Gamma_{abc}, \Gamma_9\Gamma_{ab}, \Gamma_9\Gamma_a$
9	$C = C_+, C = +C^T$	$1, \Gamma_a, \Gamma_{abcd}$	$\Gamma_{ab}, \Gamma_{abc}$
10	$C = C_-, C = -C^T$	$\Gamma_a, \Gamma_{ab}, \Gamma_{abcde}, \Gamma_{11}\Gamma_{abcd}, \Gamma_{11}\Gamma_a, \Gamma_{11}$	$1, \Gamma_{abc}, \Gamma_{abcd}, \Gamma_{11}\Gamma_{abc}, \Gamma_{11}\Gamma_{ab}$
11	$C = C_-, C = -C^T$	$\Gamma_a, \Gamma_{ab}, \Gamma_{abcde}$	$1, \Gamma_{abc}, \Gamma_{abcd}$

Per determinare la simmetria-antisimmetria delle matrici Γ_a si sono usate le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{ll} D = 2,3,4,10,11 : C = C_-, C = -C^T & \Rightarrow (C\Gamma_{(k)})^T = -(-1)^{\tilde{k}} C\Gamma_{(k)} \\ D = 5 : C = C_+, C = -C^T & \Rightarrow (C\Gamma_{(k)})^T = -(-1)^{\bar{k}} C\Gamma_{(k)} \\ D = 6,7 : C = C_-, C = C^T & \Rightarrow (C\Gamma_{(k)})^T = +(-1)^{\tilde{k}} C\Gamma_{(k)} \\ D = 8,9 : C = C_+, C = C^T & \Rightarrow (C\Gamma_{(k)})^T = +(-1)^{\bar{k}} C\Gamma_{(k)} \end{array} \tag{3.64}$$

Una caratteristica fondamentale di C è la Lorentz-invarianza:

$$C^{-1}\Gamma_{ab}^T C = -\Gamma_{ab} \;\Rightarrow\; \Sigma_{ab}^T C + C\Sigma_{ab} = 0 \;\Rightarrow\; \Lambda_Z^T C \Lambda_Z = C; \tag{3.65}$$

la condizione (3.65) che si può anche riscrivere

$$\Lambda_Z^{-1T} = C\Lambda_Z C^{-1} \tag{3.66}$$

equivale a dire che le rappresentazioni del gruppo di Lorentz Λ_Z e Λ_Z^{-1T} sono equivalenti.

Una conseguenza di (3.66) è che, posto $B = C^{-1T}A^T$, risulta

$$B\Lambda^* B^{-1} = \Lambda \quad (\bar{\Lambda} B \Lambda^* = B) \tag{3.67}$$

e quindi anche le rappresentazioni Λ e Λ^* sono equivalenti. Si dice in tal caso che la rappresentazione è autoconiugata e più precisamente reale o pseudoreale a seconda che sia possibile o meno imporre la condizione di realtà

$$\psi^C = C^{-1T}\bar{\psi}^T = C^{-1T}A^T\psi^* = B\psi^* = \psi \tag{3.68}$$

(ψ^C si dice spinore coniugato e trasforma come $\psi : (\Lambda\psi)^C = \Lambda\psi^C$).

Si può allora definire lo spazio degli spinori di Majorana

$$S_M = \{\psi : \psi = \psi^C \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\psi} = \psi^T C.\} \tag{3.69}$$

S_M non esiste in ogni dimensione: infatti la (3.68) implica la relazione di consistenza

$$\begin{aligned} &(\psi^C)^C = C^{-1T} A^T (C^{-1T} A^T \psi^*)^* = C^{-1T} A^T C^{-1+} A^+ \psi = \psi \\ &\Rightarrow C^{-1T} \Gamma_0^T C^{-1+} \Gamma_0^+ = 1 \end{aligned} \tag{3.70}$$

che non è verificata in $D = 5, 6, 7$ (usare la tabella precedente). In queste dimensioni quindi la rappresentazione spinoriale è pseudoreale, e non si può dimezzare la dimensione di S_M tramite la (3.68); è comunque possibile definire coppie di spinori $\psi_i = (\psi_1, \psi_2)$ soddisfacenti la condizione

$$\bar{\psi}_j = \psi^{Ti} \varepsilon_{ij} \qquad (\bar{\psi}_1 = -\psi^{2T} C, \ \bar{\psi}_2 = +\psi^{1T} C). \tag{3.71}$$

A volte si dice che ψ è Majorana-simplettico. Si noti che gli indici i si alzano ed abbassano con $\varepsilon^{ij} = (\varepsilon_{ij})^{-1}$:

$$\psi^i = \psi_j \varepsilon^{ji}, \quad \psi_i = \psi^j \varepsilon_{ji}. \tag{3.72}$$

La condizione (3.71) equivale a rimpiazzare lo spazio complesso originario con uno spazio reale di dimensione doppia; usando spinori complessi

$$\Psi = \psi_1 + i\psi_2, \ \Phi = \phi_1 + i\phi_2 \tag{3.73}$$

risulta immediatamente[14]

$$\bar{\Psi} \Gamma_{(k)} \Phi = \bar{\psi} \Gamma_{(k)} \phi + i \bar{\psi} \times \Gamma_{(k)} \phi. \tag{3.74}$$

Le proprietà di $C-$simmetria delle matrici $\Gamma_{(k)}$ sono importantissime quando si usano spinori di Majorana: infatti se $\Gamma_{(k)}$ è $C-$simmetrica e gli spinori commutano si ha

$$\bar{\psi} \Gamma_{(k)} \phi = \psi^T C \Gamma_{(k)} \phi = \phi^T (C \Gamma_{(k)})^T \psi = \bar{\phi} \Gamma_{(k)} \psi. \tag{3.75}$$

Nei casi $D = 5, 6, 7$ invece

$$\psi^{Ti} C \Gamma_{(k)} \phi^j \varepsilon_{ij} = -\phi^{Tj} (C \Gamma_{(k)})^T \psi^i \varepsilon_{ji} = -\bar{\phi}_i \Gamma_{(k)} \psi^i \tag{3.76}$$

$$\psi^{Ti} C \Gamma_{(k)} \phi^j \delta_{ij} = +\phi^{Tj} (C \Gamma_{(k)})^T \psi^i \delta_{ij} = \bar{\phi}^i \Gamma_{(k)} \psi^i \tag{3.77}$$

cioè

$$\bar{\psi} \Gamma_{(k)} \phi = -\bar{\phi} \Gamma_{(k)} \psi, \quad \bar{\psi} \times \Gamma_{(k)} \phi = +\bar{\phi} \times \Gamma_{(k)} \psi. \tag{3.78}$$

Per matrici $C-$antisimmetriche o spinori anticommutanti cambia un segno.

[14] Usiamo le abbreviazioni $\bar{\psi}\Gamma_{(k)}\phi = \bar{\psi}_i \Gamma_{(k)} \phi^i = -\bar{\psi}^i \Gamma_{(k)} \phi_i = \psi^{jT} C \varepsilon_{ji} \Gamma_{(k)} \phi^i$, $\quad \bar{\psi} \times \Gamma_{(k)} \phi = \bar{\psi}^i \Gamma_{(k)} \phi^i = \bar{\psi}_i \Gamma_{(k)} \phi_i = \psi^{iT} C \delta_{ij} \Gamma_{(k)} \phi^j$.

3.7 Spazi di Weyl

In dimensione pari è possibile scomporre Z in due sottospazi Z_+ e Z_- ognuno dei quali ospita una rappresentazione di $SO(1, D-1)$. Gli elementi di Z_+ e Z_- si dicono spinori di Weyl rispettivamente left e right. Precisamente

$$Z_\pm = \{\psi : \Gamma_{(D+1)}\psi = \pm\psi\} \tag{3.79}$$

(a seconda degli autori si trova anche la convenzione opposta).
Le trasformazioni spinoriali preservano la chiralità:

$$\bar{\Lambda}\Gamma_{(D+1)}\Lambda = \Gamma_{(D+1)} \quad \Longleftrightarrow \quad \Sigma_{ab}\Gamma_{(D+1)} - \Gamma_{(D+1)}\Sigma_{ab} = 0. \tag{3.80}$$

In generale non solo le matrici Γ_{ab} ma tutte le $\Gamma_{(k)}$ con k pari preservano la chiralità; invece la chiralità di $\bar{\psi}$ è opposta a quella di ψ :

$$\Gamma_{(D+1)}\psi = \psi \quad \Longrightarrow \quad \bar{\psi}\Gamma_{(D+1)} = -\bar{\psi} \tag{3.81}$$

e quindi se ψ è chirale tutte le correnti pari sono nulle:

$$\bar{\psi}\Gamma_{(k)}\psi = 0, \quad k = 0, 2, 4, 6, \dots \tag{3.82}$$

Per gli spinori di Weyl (o chirali) conviene usare la base in cui

$$\Gamma_{(D+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \psi_+ = \begin{pmatrix} \Xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta \end{pmatrix}; \tag{3.83}$$

poichè valgono

$$\{\Gamma_{(D+1)}, \Gamma_a\} = 0 \text{ e } \quad [\Gamma_{(D+1)}, \Gamma_{ab}] = 0 \tag{3.84}$$

si può scrivere

$$\Gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\Gamma}_a^+ \\ \hat{\Gamma}_a^- & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\Gamma_{ab}}{2} = \Sigma_{ab}^+ + \Sigma_{ab}^- = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{ab}^+ & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}_{ab}^- \end{pmatrix}. \tag{3.85}$$

Le matrici di coniugazione di carica C invece si spezzano in maniera differente a seconda della dimensione [15]:

$$\begin{aligned} D = 2, 6, 10, \dots :\; C\Gamma_{(D+1)}C^{-1} = -\Gamma_{(D+1)} \quad &\to C = \begin{pmatrix} & \hat{C}_+ \\ \hat{C}_- & \end{pmatrix} \\ D = 4, 8, 12, \dots :\; C\Gamma_{(D+1)}C^{-1} = +\Gamma_{(D+1)} \quad &\to C = \begin{pmatrix} \hat{C}_+ & \\ & \hat{C}_- \end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{3.87}$$

[15] Si usa il fatto che nella base chirale

$$C\Gamma_{(D+1)}C^{-1} = -\Gamma^T_{(D+1)} = -\Gamma_{(D+1)}. \tag{3.86}$$

come conseguenza risulta

$$\begin{aligned} D = 2, 6, 10, \ldots : \quad & B\Gamma_{(D+1)}B^{-1} = -\Gamma_{(D+1)} \quad \to B = \begin{pmatrix} B_+ & \\ & B_- \end{pmatrix} \\ D = 4, 8, 12, \ldots : \quad & B\Gamma_{(D+1)}B^{-1} = +\Gamma_{(D+1)} \quad \to B = \begin{pmatrix} & B_+ \\ B_- & \end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{3.88}$$

ciò incide sulle relazioni di equivalenza tra le varie rappresentazioni; in particolare per

$$\Sigma^{\pm}_{ab} = \frac{1 \pm \Gamma_{(D+1)}}{2} \frac{\Gamma_{ab}}{2} \tag{3.89}$$

si ha

$$B\Sigma^{\pm}_{ab}B^{-1} = \Sigma^{\mp *}_{ab} \tag{3.90}$$

con il segno più in $D = 2, 6, 10, \ldots$ (la rappresentazione chirale è reale o autoconiugata) e il segno meno in $D = 4, 8, 12, \ldots$ (la rappresentazione chirale è complessa ed equivalente alla antichirale).

Esistono dimensioni particolari in cui la condizione di Weyl è compatibile con quella di Majorana:

$$\bar{\psi} = \overline{\Gamma_{(D+1)}\psi} = \psi^T \Gamma^T_{(D+1)} C \quad \text{e} \quad \bar{\psi} = -\bar{\psi}\Gamma_{(D+1)} = -\psi^T C \Gamma_{(D+1)} \tag{3.91}$$

sono soddisfatte contemporaneamente solo se

$$C\Gamma_{(D+1)}C^{-1} = (-1)^{\bar{D}}\Gamma_{(D+1)} = -\Gamma_{(D+1)}. \tag{3.92}$$

In tal caso si parla di spinori di Majorana-Weyl: essi esistono solo in $D = 2, 10$ (in generale $D = 2 \mod 8$). In dimensione 6 (mod 8) invece ci sono coppie di Majorana-Weyl simplettici:

$$\bar{\psi}_i = \psi^{Tj} C \varepsilon_{ji}, \qquad \Gamma_{(D+1)}\psi_i = \psi_i. \tag{3.93}$$

3.8 Il formalismo degli indici

In questo paragrafo riscriviamo le relazioni trovate nei paragrafi precedenti (usando un formalismo matriciale) servendoci della notazione degli indici.

In tutta generalità, fissata una base in uno spazio complesso Z, si hanno le seguenti identificazioni:

- i vettori di Z sono associati a $n-$uple ψ^α;

- le 1-forme dello spazio duale Z^* sono associate a $n-$uple ψ_α;
- i vettori dello spazio complesso coniugato $\bar{Z}$ sono associati a $n-$uple ψ^{α^*};
- le 1-forme dello spazio duale coniugato $\bar{Z}^*$ sono associate a $n-$uple ψ_{α^*};
- gli operatori lineari da $Z \to Z$ sono associati a matrici $\Lambda^\alpha{}_\beta$
- gli operatori da $\bar{Z} \to \bar{Z}$ sono associati alle matrici complesse coniugate $\Lambda^{\alpha^*}{}_{\beta^*}$;
- vi sono poi tensori che collegano i vari spazi (con indici misti).

A noi interessa il caso in cui Z è lo spazio di Dirac; esistono allora i seguenti tensori Lorentz-invarianti:

1. la matrice A:

$$\Lambda^+ A \Lambda = A, \quad \Lambda_{\alpha^*}{}^{\beta^*} A_{\beta^*\gamma} \Lambda^\gamma{}_\delta = A_{\alpha^*\delta}. \tag{3.94}$$

   Come conseguenza della (3.94) $A_{\alpha^*\beta}$ e la sua inversa $A^{\alpha\beta^*}$ permettono di alzare e abbassare gli indici X^α e X_{α^*} (si instaura un isomorfismo tra Z e $\bar{Z}^*$);

2. la matrice C:

$$\Lambda^T C \Lambda = C, \quad \Lambda_\alpha{}^\beta C_{\beta\gamma} \Lambda^\gamma{}_\delta = C_{\alpha\delta}. \tag{3.95}$$

   Come conseguenza $C_{\alpha\beta}$ e l'inversa $C^{\alpha\beta}$ permettono di alzare e abbassare gli indici X^α, X_α (si instaura un isomorfismo tra Z e Z^*);

3. la matrice $B = C^{-1T} A^T$ ($B^\alpha{}_{\beta^*} = C^{\gamma\alpha} A_{\gamma\beta^*}$):

$$\bar{\Lambda} B \Lambda^* = B, \quad \bar{\Lambda}^\alpha{}_\beta B^\beta{}_{\gamma^*} \Lambda^{\gamma^*}{}_{\delta^*} = B^\alpha{}_{\delta^*}. \tag{3.96}$$

   Come conseguenza $B^\alpha{}_{\beta^*}$ e la sua inversa $B^{\alpha^*}{}_\beta$ permettono di alzare e abbassare gli indici X^α e X^{α^*} (si instaura un isomorfismo tra Z e $\bar{Z}$).

La situazione si semplifica notevolmente se si può imporre la condizione di Majorana in quanto spariscono gli indici coniugati α^*:

$$\psi = B\psi^* \quad \Longleftrightarrow \quad \psi^\alpha = B^\alpha{}_{\beta^*} \psi^{\beta^*} \tag{3.97}$$

e se si sceglie opportunamente la base si può avere $B = \mathbb{1}$ cioè $\psi^{\alpha^*} = \psi^\alpha$ ($Z = S_M$ è uno spazio reale).

Viceversa la situazione si complica se si usano spinori di Weyl. In tal caso esistono due spazi complessi Z_+ e Z_- e i vettori chirali e antichirali vanno distinti usando indici α e $\dot\alpha$:

$$\Xi = (\Xi^\alpha), \quad \Theta = (\Theta^{\dot\alpha}); \tag{3.98}$$

le matrici Γ_a e Γ_{ab} si spezzano in

$$\begin{array}{ll} \hat\Gamma_a^+ = (\Gamma_a)^\alpha{}_{\dot\beta}, & \hat\Gamma_a^- = (\Gamma_a)^{\dot\alpha}{}_\beta \\ \Sigma_{ab}^+ = (\Sigma_{ab})^\alpha{}_\beta, & \Sigma_{ab}^- = (\Sigma_{ab})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{array} \tag{3.99}$$

mentre B e C si scrivono

$$\begin{array}{lllll} D = 2,6,10 & \hat C_+ = C_{\alpha\dot\beta}, & \hat C_- = C_{\dot\alpha\beta}, & \hat B_+ = B^\alpha{}_{\beta^*}, & \hat B_- = B^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta^*} \\ D = 4,8,12 & \hat C_+ = C_{\alpha\beta}, & \hat C_- = C_{\dot\alpha\dot\beta}, & \hat B_+ = B^\alpha{}_{\dot\beta^*}, & \hat B_- = B^{\dot\alpha}{}_{\beta^*}. \end{array} \tag{3.100}$$

Dunque

1. in dimensione $D = 2, 6, 10$ gli indici $X^{\dot\alpha}$ sono equivalenti agli indici X_α: per esempio le matrici Γ si possono riscrivere

$$\begin{array}{l} (\Gamma_a)_{\alpha\beta} = C_{\alpha\dot\beta}(\Gamma_a)^{\dot\beta}{}_\beta \\ (\Gamma_a)^{\alpha\beta} = (\Gamma_a)^\alpha{}_{\dot\beta} C^{\dot\beta\beta} \\ (\Gamma_{ab})_\alpha{}^\beta = C_{\alpha\dot\beta}(\Gamma_{ab})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} C^{\dot\alpha\beta} \end{array} \tag{3.101}$$

(in dimensione $D = 2, 10$ si può anche imporre la condizione di Majorana è spariscono gli indici con la *).

2. in dimensione $D = 4, 8, \ldots$ gli indici $X^{\dot\alpha}$ sono equivalenti agli indici X^{α^*}; in particolare la rappresentazione antichirale è la complessa coniugata della rappresentazione chirale, come si è visto in (3.90):

$$B^{\alpha^*}{}_{\dot\beta}\Lambda^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}B^\alpha{}_{\beta^*} = \Lambda^{\alpha^*}{}_{\beta^*} = (\Lambda^\alpha{}_\beta)^*. \tag{3.102}$$

Usando il formalismo degli indici è semplice provare alcune utili identità; ci limitiamo a dare un esempio in dieci dimensioni ma si può procedere nello stesso modo in generale. Vogliamo provare la formula

$$\Gamma^{ab}\psi\bar\psi\Gamma_a\psi = -\psi\bar\psi\Gamma^b\psi. \tag{3.103}$$

Per farlo la scriviamo nella forma

$$\Gamma^{ab\epsilon}_\alpha\Gamma_{a\beta\gamma}\psi^\alpha\psi^\beta\psi^\gamma = -\Gamma^b_{\alpha\beta}\delta^\epsilon_\gamma\psi^\alpha\psi^\beta\psi^\gamma \tag{3.104}$$

ovvero

$$\Gamma^{ab\epsilon}_{(\alpha}\Gamma_{a\beta\gamma)} = -\Gamma^{b}_{(\alpha\beta}\delta^{\epsilon}_{\gamma)}. \tag{3.105}$$

Per provare l' identità basta osservare che la forma del secondo membro è fornita da considerazioni di invarianza; l'unica incognita è il coefficiente moltiplicativo che si può determinare contaendo qualche indice. In pratica si scrive

$$\Gamma^{ab\epsilon}_{(\alpha}\Gamma_{a\beta\gamma)} = \alpha\Gamma^{b}_{(\alpha\beta}\delta^{\epsilon}_{\gamma)} \tag{3.106}$$

e contraendo ϵ e β si ottiene

$$-2\cdot(10-1)\Gamma^{b}_{\alpha\gamma} = \alpha(2+16)\Gamma^{b}_{\alpha\gamma} \Rightarrow \alpha = -1. \tag{3.107}$$

3.9 Teorie estese

In questo paragrafo vogliamo fare alcune annotazioni sulle teorie estese, cioè con più spinori.

Supponiamo per esempio di lavorare in tre dimensioni con N spinori λ^i; il gruppo di simmetria più naturale che si possa associare all'indice "i" è $SO(N)$, in quanto il cambio

$$\lambda^{i'} = \Lambda^{i'}{}_{j}\lambda^{j}, \quad \Lambda \in SO(N) \tag{3.108}$$

preserva la proprietà di Majorana degli spinori tridimensionali ($\psi^i = \psi^{iC} \Rightarrow \psi^{i'} = \psi^{i'C}$); lo stesso vale in nove e undici dimensioni.

In $D = 4$ (o $D = 8$) è più naturale usare spinori di Weyl, che costituiscono una rappresentazione irriducibile complessa di $SO(1, D-1)$; in tal caso sull'indice "i" agisce $U(N) \sim SU(N) \times U(1)$

$$\lambda^{i'} = \Lambda^{i'}{}_{j}\lambda^{j}, \quad \Lambda \in SU(N) \times U(1). \tag{3.109}$$

In cinque e sette dimensioni si usano spinori di Majorana-simplettici (3.71); per preservare tale condizione sull'indice "i" deve agire $Usp(N)$, N pari:

$$\lambda^{i'} = \Lambda^{i'}{}_{j}\lambda^{j}, \quad \Lambda \in Usp(N). \tag{3.110}$$

In sei dimensioni ci sono spinori di Majorana-Weyl simplettici e il gruppo di simmetria si spezza in due a seconda che $\lambda^k \equiv \lambda^{k\alpha}$ sia chirale o $\lambda^{\dot{k}} \equiv \lambda^{k\dot{\alpha}}$ sia antichirale:

$$\begin{aligned} \lambda^{k'} &= \Lambda^{k'}{}_{l}\lambda^{l}, \quad \Lambda \in Usp(N_+) \\ \lambda^{\dot{k}'} &= \Lambda^{\dot{k}'}{}_{\dot{l}}\lambda^{\dot{l}}, \quad \dot{\Lambda} \in Usp(N_-). \end{aligned} \tag{3.111}$$

(ciò non avviene in $D = 4, 8$ dimensioni in cui la rappresentazione di Weyl non è autoconiugata); una cosa simile avviene in $D = 2, 10$ ma ora i gruppi di simmetria sono semplicemente $SO(N_+)$ e $SO(N_-)$ per rispettare la condizione di Majorana (e non è più necessario che N_+ e N_- siano pari):

$$\begin{array}{ll} \lambda^{k'} = \Lambda^{k'}{}_l \lambda^l, & \Lambda \in SO(N_+) \\ \lambda^{\dot{k}'} = \dot{\Lambda}^{\dot{k}'}{}_{\dot{l}} \lambda^{\dot{l}}, & \dot{\Lambda} \in SO(N_-). \end{array} \tag{3.112}$$

In generale indichiamo il gruppo di simmetria della teoria estesa con $Aut(D, N)$ (gruppo degli automorfismi):

$$Aut(D, N) \equiv \begin{cases} SO(N_+) \times SO(N_-) & D = 2, 10 \\ SO(N) & D = 3, 11 \\ SU(N) \times U(1) & D = 4, 8 \\ Usp(N) & D = 5, 7 \\ Usp(N_+) \times Usp(N_-) & D = 6 \end{cases} . \tag{3.113}$$

3.10 Identità di Fierz

Concludiamo la parte tecnica di questo capitolo colla dimostrazione di alcune identità che ci saranno molto utili nel seguito. Sia S_D lo spazio spinoriale irriducibile associato a $SO(1, D-1)$, costituito da spinori di Majorana, di Weyl,di Majorana-Weyl o di Dirac a seconda della dimensione D; la dimensione (reale) di S_D è la seguente:

$$D = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \Rightarrow \Delta = 1, 2, 4, 8, 8, 16, 16, 16, 16, 32 \tag{3.114}$$

Con una coppia di spinori di S_D si può costruire lo spazio S_D^2 a Δ^2 dimensioni formato dalle matrici

$$S_D^2 = \{\chi\bar{\psi} : \chi, \psi \in S_D\} \tag{3.115}$$

Poichè ogni matrice nell'algebra di Clifford si può scrivere come combinazione lineare a coefficienti complessi delle $\Gamma_{(k)}$,anche per le matrici di S_D^2 si potrà scrivere

$$\chi\bar{\psi} = \sum \alpha_{(k)} \Gamma_{(k)} \tag{3.116}$$

I coefficienti $\alpha_{(k)}$ si determinano proiettando sulle $\Gamma_{(k)}$ e sfruttando la formula di ortogonalità [16]

$$Tr(\Gamma^{a_1 \cdots a_k} \Gamma_{b_1 \cdots b_k}) = (-1)^{\bar{k}} k! 2^{\bar{D}} \eta^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_k}, \quad Tr(\Gamma_{(k)} \Gamma_{(l)}) = 0 \text{ se } k \neq 0 \tag{3.117}$$

[16] si ricava dalla (3.24) sfruttando le (3.57).

Si ha

$$Tr(\chi\bar{\psi}\Gamma_{(k)}) = \sum \alpha_{(l)} Tr(\Gamma_{(l)}\Gamma_{(k)}) = (-1)^{\bar{k}} k! 2^{\bar{D}} \alpha_{(k)} \tag{3.118}$$

e quindi

$$\alpha_{(k)} = \frac{(-1)^{\bar{k}}}{k! 2^{\bar{D}}} \bar{\psi}\Gamma_{(k)}\chi \tag{3.119}$$

In dimensione dispari una base di S_D^2 è formata dalle matrici $\Gamma_{(k)}$, $k \leq \bar{D}$ e si possono fare i seguenti sviluppi:

$$D = 3: \quad \chi\bar{\psi} = \tfrac{1}{2}\bar{\chi}\psi + \tfrac{1}{2}\bar{\chi}\Gamma_a\psi\Gamma^a \tag{3.120}$$

$$D = 5: \quad \chi\bar{\psi} = \tfrac{1}{4}\bar{\chi}\psi + \tfrac{1}{4}\bar{\chi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \tfrac{1}{8}\bar{\chi}\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab} \tag{3.121}$$

$$D = 7: \quad \chi\bar{\psi} = \tfrac{1}{8}\bar{\chi}\psi + \tfrac{1}{8}\bar{\chi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \tfrac{1}{16}\bar{\chi}\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab} - \tfrac{1}{48}\bar{\chi}\Gamma_{abc}\psi\Gamma^{abc} \tag{3.122}$$

$$\begin{aligned} D = 9: \quad \chi\bar{\psi} = {} & \tfrac{1}{16}\bar{\chi}\psi + \tfrac{1}{16}\bar{\chi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \tfrac{1}{32}\bar{\chi}\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab} \\ & - \tfrac{1}{96}\bar{\chi}\Gamma_{abc}\psi\Gamma^{abc} + \tfrac{1}{16\cdot 4!}\bar{\chi}\Gamma_{abcd}\psi\Gamma^{abcd} \end{aligned} \tag{3.123}$$

$$\begin{aligned} D = 11: \quad \chi\bar{\psi} = {} & \tfrac{1}{32}\bar{\chi} + \tfrac{1}{32}\bar{\Gamma}_a\psi\Gamma^a - \tfrac{1}{64}\bar{\chi}\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab} - \tfrac{1}{192}\bar{\chi}\Gamma_{abc}\psi\Gamma^{abc} \\ & - \tfrac{1}{32\cdot 4!}\bar{\chi}\Gamma_{abcd}\psi\Gamma^{abcd} + \tfrac{1}{32\cdot 5!}\bar{\chi}\Gamma_{abcde}\psi\Gamma^{abcde} \end{aligned} \tag{3.124}$$

Se si lavora in dimensione pari e con spinori di Weyl si devono distinguere due casi: 1) $\bar{D} = D/2$ è dispari $(D = 2, 6, 10)$; in tal caso si può scrivere

$$\begin{aligned} \chi\bar{\psi} = \textstyle\sum_{k\ dispari < \bar{D}} \quad & (\alpha_{(k)}\bar{\psi}\Gamma_{(k)}\chi\Gamma_{(k)} + \alpha'_{(k)}\bar{\psi}\Gamma_{(k)}\Gamma_{(D+1)}\chi\Gamma_{(k)}\Gamma_{(D+1)}) \\ & + \alpha_{(\bar{D})}\bar{\psi}\Gamma_{a_1\cdots a_{\bar{D}}}\chi\Gamma^{a_1\cdots a_{\bar{D}}} \end{aligned} \tag{3.125}$$

Proiettando sulle $\Gamma_{(k)}$ e usando la formula

$$Tr(\Gamma_{(k)}\Gamma_{(D+1)}\Gamma_{(k')}\Gamma_{(D+1)}) = -Tr(\Gamma_{(k)}\Gamma_{(k')}) \quad \text{(k dispari)} \tag{3.126}$$

si trova

$$\alpha'_{(k)} = -\alpha_{(k)} \tag{3.127}$$

da cui

$$\chi\bar{\psi} = \sum_k 2\frac{(-1)^k}{k! 2^{\bar{D}}}\bar{\psi}\Gamma_{(k)}\chi\Gamma_{(k)}\frac{1 - \Gamma_{(D+1)}}{2} + \frac{(-1)^{\bar{\bar{D}}}}{\bar{D}! 2^{\bar{D}}}\bar{\psi}\Gamma_{a_1\cdots a_{\bar{D}}}\chi\Gamma^{a_1\cdots a_{\bar{D}}}. \tag{3.128}$$

In concreto

$$D = 2 : \psi\bar{\chi} = (\tfrac{1}{2}\bar{\chi}\Gamma_a\psi\Gamma^a)\tfrac{1-\Gamma_{(D+1)}}{2} \tag{3.129}$$

$$D = 6 : \psi\bar{\chi} = (\tfrac{1}{4}\bar{\chi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \tfrac{1}{48}\bar{\chi}\Gamma_{abc}\psi\Gamma^{abc})\tfrac{1-\Gamma_{(D+1)}}{2} \tag{3.130}$$

$$\begin{aligned} D = 10 : \psi\bar{\chi} &= (\tfrac{1}{16}\bar{\chi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \tfrac{1}{96}\bar{\chi}\Gamma_{abc}\psi\Gamma^{abc} + \\ &\tfrac{1}{32\cdot 5!}\bar{\chi}\Gamma_{abcde}\psi\Gamma^{abcde})\tfrac{1-\Gamma_{(D+1)}}{2} \end{aligned} \tag{3.131}$$

2) $\bar{D} = D/2$ è pari $(D = 4, 8)$; in tal caso si può sviluppare

$$\chi\bar{\psi} = \sum_{k\ dispari<\bar{D}} (2\frac{(-1)^{\bar{k}}}{k!2^{\bar{D}}}\bar{\psi}\Gamma_{(k)}\chi\Gamma_{(k)})\frac{1-\Gamma_{(D+1)}}{2} \tag{3.132}$$

In concreto

$$D = 4 \qquad \chi\bar{\psi} = \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma_a\chi\Gamma^a\tfrac{1-\Gamma_{(D+1)}}{2} \tag{3.133}$$

$$D = 8 \quad \chi\bar{\psi} = (\tfrac{1}{8}\bar{\psi}\Gamma_a\chi\Gamma^a - \tfrac{1}{48}\bar{\psi}\Gamma_{abc}\chi\Gamma^{abc})\tfrac{1-\Gamma_{(D+1)}}{2} \tag{3.134}$$

In dimensione $D = 4, 8$ si può usare anche la notazione di Majorana; in tal caso si deve sviluppare su tutte le $\Gamma_{(k)}$ e si ottiene

$$D = 4 : \quad \psi\bar{\chi} = \tfrac{1}{4}\bar{\chi}\psi + \tfrac{1}{4}\bar{\chi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \tfrac{1}{8}\bar{\chi}\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab} - \tfrac{1}{4}\bar{\chi}\Gamma_5\Gamma_a\psi\Gamma_5\Gamma^a + \tfrac{1}{4}\bar{\chi}\Gamma_5\psi\Gamma_5 \tag{3.135}$$

$$\begin{aligned} D = 8 : \quad \psi\bar{\chi} &= \tfrac{1}{8}(\bar{\chi} + \bar{\chi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \tfrac{1}{2}\bar{\chi}\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab} - \tfrac{1}{6}\bar{\chi}\Gamma_{abc}\psi\Gamma^{abc} \\ &+\tfrac{1}{4!}\bar{\chi}\Gamma_{abcd}\psi\Gamma^{abcd} + \tfrac{1}{6}\bar{\chi}\Gamma_9\Gamma_{abc}\psi\Gamma_9\Gamma^{abc} - \tfrac{1}{2}\bar{\chi}\Gamma_9\Gamma_{ab}\psi\Gamma_9\Gamma^{ab} \\ &-\bar{\chi}\Gamma_9\Gamma_a\psi\Gamma_9\Gamma^a + \bar{\chi}\Gamma_9\psi\Gamma_9). \end{aligned} \tag{3.136}$$

Il caso in cui $\psi = \chi$ è importantissimo e le formule che si ottengono meritano di essere raccolte nella seguente tabella.

Dimensione	Identità di Fierz fondamentale
2	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a$
3	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a$
4 Weyl	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a$
4 Maj.	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{4}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \frac{1}{8}\bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab}$
5	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{4}\bar{\psi}\psi + \frac{1}{4}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \frac{1}{8}\bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab}$
6	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{4}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \frac{1}{48}\bar{\psi}\Gamma_{abc}\psi\Gamma^{abc}$
7	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{8}\bar{\psi}\psi + \frac{1}{8}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \frac{1}{16}\bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab} - \frac{1}{48}\bar{\psi}\Gamma_{abc}\psi\Gamma^{abc}$
8 Weyl	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{8}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \frac{1}{48}\bar{\psi}\Gamma_{abc}\psi\Gamma^{abc}$
8 Maj.	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{16}\bar{\psi}\psi + \frac{1}{16}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a + \frac{1}{16\cdot 4!}\bar{\psi}\Gamma_{abcd}\psi\Gamma^{abcd} + \frac{1}{16\cdot 3!}\bar{\psi}\Gamma_9\Gamma_{abc}\psi\Gamma^{abc} + \frac{1}{16}\bar{\psi}\Gamma_9\psi\Gamma_9$
9	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{16}(\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a + \frac{1}{4!}\bar{\psi}\Gamma_{abcd}\psi\Gamma^{abcd})$
10	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{16}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \frac{1}{32\cdot 5!}\bar{\psi}\Gamma_{abcde}\psi\Gamma^{abcd}$
11	$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{32}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \frac{1}{64}\bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab} + \frac{1}{32\cdot 5!}\bar{\psi}\Gamma_{abcde}\psi\Gamma^{abcde}$

Usando la tabella vogliamo ora provare un'importante identità (detta ciclica) che vale in $D = 3, 4, 6, 10$. La dimostrazione avviene nello stesso modo in tutti i casi per cui ci limitiamo a farla in D = 10. Si ha

$$\Gamma_a \psi \bar{\psi} \Gamma^a \psi = \Gamma_a \left(\frac{1}{16} \bar{\psi} \Gamma_a \psi \Gamma^a + \frac{1}{32 \cdot 5!} \bar{\psi} \Gamma_{abcde} \psi \Gamma^{abcde} \right) \Gamma^a \psi = -\frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma_a \psi \Gamma^a \tag{3.137}$$

e quindi

$$\bar{\psi} \Gamma_a \psi \Gamma^a \psi = 0 \tag{3.138}$$

Nota: se si esplicitano gli indici la (3.138) assume la forma

$$\psi^\alpha \psi^\beta \psi^\gamma \Gamma_{a(\alpha\beta} \Gamma^a_{\gamma)\delta} = 0$$

ovvero

$$\Gamma_{a(\alpha\beta} \Gamma^a_{\gamma)\delta} = 0. \tag{3.139}$$

3.11 Azioni spinoriali

Nei paragrafi precedenti siamo riusciti a ottenere le rappresentazioni fondamentali del gruppo di Lorentz (tutte le altre rappresentazioni si possono costruire a partire da queste con le tecniche spiegate nell'appendice B); l'idea da cui siamo partiti è che i campi fondamentali della fisica (o, se si vuole, le particelle elementari) sono a valori in rappresentazioni irriducibili e sono descritti da azioni invarianti. In questo paragrafo vogliamo costruire esplicitamente tali azioni.

3.11.1 Azione di Dirac

È evidente che l'azione più semplice possibile contenente uno o più spinori irriducibili anticommutanti λ[17] è l'azione di Dirac[18]

$$I(\omega, v, \lambda) = I_G(\omega, v) + \alpha \int \bar{\lambda} i \Gamma^{a_1} D\lambda v^{a_2} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} \tag{3.140}$$

Se si assegna peso -1/2 a λ ed m è un parametro colle dimensioni di una massa (peso -1) si può scrivere anche

$$I = I_G + \alpha \int \bar{\lambda} i \Gamma^{a_1} D\lambda v^{a_2} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} - m \bar{\lambda} \lambda v^{a_1} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} \tag{3.141}$$

[17] Sugli spinori λ (la presenza di un eventuale indice "i" è sottointesa) si presuppone una qualche condizione di realtà; la necessità che i λ anticommutino è evidente: se fosse $\lambda^\alpha \lambda^\beta = \lambda^\beta \lambda^\alpha$ l'azione $\int \lambda^\alpha i (C\Gamma^a)_{\alpha\beta} D_a \lambda^\beta = -\int D_a \lambda^\alpha i (C\Gamma^a)_{\alpha\beta} \lambda^\beta = -\int \lambda^\beta i (C\Gamma^a)_{\beta\alpha} D_a \lambda^\alpha$ sarebbe identicamente nulla (il ragionamento con qualche modifica vale in tutte le dimensioni).

[18] Il fattore i serve ad assicurare l'autoaggiuntezza: $\int (\bar{\lambda} i \Gamma_{(a)} \mathcal{D} \lambda)^* = -\int \mathcal{D} \bar{\lambda} i \Gamma_{(a)} \lambda = -\int d(\bar{\lambda} i \Gamma_{(a)} \lambda) + \int \bar{\lambda} i \Gamma_{(a)} \mathcal{D} \lambda$

tuttavia tale estensione non è possibile in tutte le dimensioni (e in particolare $m\bar{\lambda}\lambda$ è sempre nullo se si usano spinori chirali). Per questo considereremo l'azione di Dirac sempre senza massa.

Dalla (3.140) si ricavano le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{aligned} \delta_\omega I: \quad & (D-2)\delta\omega^{a_1a_2}T^{a_3}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}+ \\ & \alpha\bar{\lambda}\tfrac{1}{4}\delta\omega^{ab}\Gamma_{ab}\lambda v^{a_2}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}=0 \end{aligned} \tag{3.142}$$

$$\begin{aligned} \delta_v I: \quad & (D-2)R^{a_1a_2}\delta v^{a_3}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}+ \\ & \alpha(D-1)\bar{\lambda}i\Gamma^{a_1}\mathcal{D}\lambda\delta v^{a_1}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}=0 \end{aligned} \tag{3.143}$$

$$\delta_\lambda I: \quad 2i\Gamma^{a_1}\mathcal{D}\lambda v^{a_2}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}=0 \tag{3.144}$$

La prima dà luogo ad una torsione non nulla:

$$T^a_{bc}=T^a_{bc}(\lambda); \tag{3.145}$$

la seconda è la solita equazione di Einstein con tensore energia-impulso

$$\mathcal{R}^a{}_b-\frac{1}{2}\eta^a{}_bR_S=\mathcal{T}^a{}_b(\lambda); \tag{3.146}$$

la terza è l'equazione di Dirac

$$i\Gamma^a\mathcal{D}_a\lambda=0. \tag{3.147}$$

Discutiamo ora il numero di gradi di libertà fisici associati a λ; per quanto si è detto nel paragrafo (3.10) off-shell essi sono Δ; implementando (3.147) questi si riducono alla metà. Lo mostriamo considerando il caso piatto $\omega=0, v=dx$; la (3.147) in termini di onde piane $\lambda=\lambda_0e^{ip\cdot x}$ (grazie alla Lorentz-invarianza si può sempre ridurre $p^a=(k,0,\cdots,0,k)$) si scrive

$$\Gamma^ap_a\lambda=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (\Gamma_0-\Gamma_{D-1})\lambda=0; \tag{3.148}$$

se D è pari, usando la forma esplicita delle matrici Γ_a (3.35) si ha

$$\begin{aligned} &\Gamma_0=\gamma_0\otimes\sigma_1=\begin{pmatrix} & \gamma_0\\ \gamma_0 & \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{D-1}=\mathbb{1}\otimes i\sigma_2=\begin{pmatrix} & \mathbb{1}\\ -\mathbb{1} & \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} & \gamma_0-1\\ \gamma_0+1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.149}$$

Per come è stato costruito, γ_0 si può mettere nella forma[19]

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}|_{D-4} & \\ & -\mathbb{1}|_{D-4} \end{pmatrix} \tag{3.150}$$

e quindi l'equazione agli autovalori (3.24) eliminata $\Delta/2$ gradi di libertà.

Se D' è dispari la (3.149) si scrive[20]

$$\begin{pmatrix} i & \gamma_0 \\ \gamma_0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.151}$$

e di nuovo il numero di soluzioni viene dimezzato (si ottiene due volte l' equazione $\lambda_1 = i\gamma_0\lambda_2$).

In conclusione

$$\deg(\lambda) = (D = 2 \ldots 11) = (1, 1, 2, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 16). \tag{3.152}$$

3.11.2 Azione di Rarita-Schwinger

Consideriamo ora la rappresentazione spinoriale-vettoriale irriducibile

$$\psi = (\psi_a^\alpha), \qquad \Gamma^a \psi_a = 0 \tag{3.153}$$

La più semplice azione costruibile col gravitino ψ è [21]

$$I(\omega, v, \psi) = I_G(\omega, v) + \alpha \int \bar{\psi} i \Gamma^{a_1 a_2 a_3} D\psi v^{a_4} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} \tag{3.154}$$

Anche in questo caso non prendiamo in considerazione termini di massa. Dalla (3.154) si ottengono le equazioni del moto

$$\begin{aligned}
\delta_\omega I : \quad & (D-2)\delta\omega^{a_1 a_2} T^{a_3} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} \\
& + \alpha \bar{\psi} i \Gamma^{a_1 a_2 a_3} \tfrac{1}{4} \delta\omega^{ab} \Gamma_{ab} \psi v^{a_4} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0 && (3.155) \\
\delta_v I : \quad & (D-2) R^{a_1 a_2} \delta v^{a_3} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} \\
& + \alpha (D-3) \bar{\psi} i \Gamma^{a_1 a_2 a_3} \mathcal{D}\psi \delta v^{a_4} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0 && (3.156) \\
\delta_{\bar{\psi}} I : \quad & 2i\alpha \Gamma^{a_1 a_2 a_3} \mathcal{D}\psi v^{a_4} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0 && (3.157)
\end{aligned}$$

[19] Il ragionamento funziona per $D > 2$: per $D = 2$ la (3.149) è identicamente soddisfatta per spinori di Majorana-Weyl.

[20] $\Gamma_{D'-1} = i\Gamma_{(D+1)}$ è del tipo $\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$ (si usa la base in cui $\Gamma_{(D+1)}$ è diagonale).

[21] Il fattore i assicura l'autoaggiuntezza $\int (\bar{\psi} i \Gamma^{abc} \mathcal{D}\psi)^* = + \int \mathcal{D}\bar{\psi} i \Gamma^{abc} \psi = - \int d(\bar{\psi} i \Gamma^{abc} \psi) + \int \bar{\psi} i \Gamma^{abc} \mathcal{D}\lambda$

Le prime due danno la torsione e il tensore energia-impulso

$$T^a_{bc} = T^a_{bc}(\psi) \tag{3.158}$$

$$\mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = \mathcal{T}^a{}_b(\psi) \tag{3.159}$$

La terza equazione è quella del gravitino o di Rarita-Schwinger

$$i\Gamma^{abc}\mathcal{D}_b\psi_c = 0 \tag{3.160}$$

Le condizioni di irriducibilità (3.153) fissano il numero di gradi di libertà off-shell a $\Delta(D-1)$; per determinare i gradi on-shell si lavora ancora nel caso piatto e si nota l'ulteriore invarianza di gauge per

$$\psi \longrightarrow \psi + d\lambda \quad \text{(solo nel caso piatto !)} \tag{3.161}$$

Ciò permette di eliminare 2Δ gradi di libertà con il ragionamento di trasversalità fatto anche per il campo elettromagnetico; un ragionamento simile a quello relativo all'equazione di Dirac permette poi di dimezzare tali gradi: in conclusione si trova[22]

$$\Delta_{FISICI} = \frac{\Delta(D-3)}{2} \tag{3.162}$$

Nota: le equazioni di Dirac e di Rarita-Schwinger si ricavano più semplicemente dalle azioni spaziotemporali

$$I = \int (R_S + \alpha' \bar{\lambda} i \Gamma^a \mathcal{D}_a \lambda)\eta \tag{3.163}$$

e

$$I = \int (R_S + \alpha' \bar{\psi}_a \Gamma^{abc} \mathcal{D}_b \psi_c)\eta \tag{3.164}$$

tuttavia abbiamo preferito ragionare in termini di forme per uniformità con la trattazione che svilupperemo in futuro nel superspazio.

[22]La (3.162) vale per $D \geq 3$: in $D = 2$ la (3.154) non si può neppure scrivere, come del resto avviene anche per l'azione di Einstein-Cartan che è una derivata totale: $R^{ab}\varepsilon_{ab} = d(\omega^{ab}\varepsilon_{ab})$.

Capitolo 4

SUPERGRUPPI E SUPERGRAVITÀ

4.1 Introduzione

Nel capitolo 1 si è visto come lo spaziotempo possa essere descritto da un gruppo vincolato G (si è trattato il caso $G = SO(1, D-1, \bar{e})$); in tal modo è stato possibile unificare le simmetrie di Lorentz e i diffeomorfismi spaziotemporali. In questo capitolo, invece, assumeremo che lo spaziotempo sia costruito su un supergruppo vincolato contenente il gruppo di De Sitter (di Poincarè): in tal modo oltre alle simmetrie precedenti esisteranno delle ulteriori "supertrasformazioni" di cui indagheremo le peculiarità e le implicazioni.

Le note riportate qui sotto sono un'estensione di quanto si può trovare in [21], capitolo II.1.

4.2 Supergruppi di matrici

Una supermatrice n/N è un oggetto del tipo

$$M^A_B = \begin{pmatrix} M^a_b & M^a_\beta \\ M^\alpha_b & M^\alpha_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \Sigma \\ \Pi & B \end{pmatrix}, \quad a = 1, \ldots, n, \quad \alpha = 1, \ldots, N. \tag{4.1}$$

con M^a_b, M^α_β numeri commutanti (bosonici) e M^a_β, M^α_b numeri anticommutanti (fermionici); somme e prodotti di supermatrici sono supermatrici, in seguito alle proprietà dei numeri di Grassmann. Indichiamo l' inversa (se esiste) con

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & \Sigma' \\ \Pi' & B' \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Si definiscono la supertraccia e il superdeterminante tramite

$$STrM = \quad TrA - TrB \tag{4.3}$$
$$S\det M = \quad \det A \det B' \tag{4.4}$$

inoltre si definiscono

$$M^T \quad = \begin{pmatrix} A^T & \Pi^T \\ -\Sigma^T & B^T \end{pmatrix} \tag{4.5}$$
$$M^+ \quad = \begin{pmatrix} A^+ & \Pi^+ \\ \Sigma^+ & B^+ \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Si verifica facilmente che valgono le solite proprietà. L'insieme delle supermatrici invertibili si indica con $GL(n/N)$ ed è il supergruppo fondamentale; tutti i supergruppi di supermatrici sono suoi opportuni sottogruppi: in particolare definiamo il supergruppo ortosimplettico complesso $Osp(2p/N, \mathcal{C})$ come l'insieme delle supermatrici soddisfacenti

$$\Lambda^T \hat{J} \Lambda = \hat{J} \tag{4.7}$$

con

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J|_{2p} & \\ & \mathbb{1}|_N \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i|_p & \\ & -i|_p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} & \mathbb{1}|_p \\ -\mathbb{1}|_p & \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

analogamente si definisce il supergruppo superunitario speciale $SU(p,p/N)$ formato dalle supermatrici soddisfacenti

$$\Lambda^+ \hat{H} \Lambda = \hat{H}, \quad S\det \Lambda = 1 \tag{4.9}$$

con

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H|_{2p} & \\ & -\mathbb{1}|_N \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \mathbb{1}|_p & \\ & -\mathbb{1}|p \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

L'intersezione tra $Osp(2p/N, \mathcal{C})$ e $SU(p,p/N)$ si indica semplicemente con $Osp(2p/N)$ e si dice gruppo ortosimplettico (reale).

La classificazione di Scheunert, Nahm e Rittemberg [13] dice che i supergruppi ortosimplettico e superunitario non sono così particolari come può sembrare: sostanzialmente non ci sono altri supergruppi semplici riduttivi a meno di qualche eccezione di scarso interesse fisico [1] (almeno per ora). È quindi di grande interesse lo studio di questi due supergruppi.

[1] Per una definizione precisa e per un'enumerazione completa si rimanda alla bibliografia [13],[21].

Come sempre è più semplice studiare l'algebra di Lie ad essi associata (superalgebra ortosimplettica o superunitaria); ciò si ottiene considerando trasformazioni infinitesime $\Lambda = 1 + \varepsilon$; si ha rispettivamente

$$\hat{J}\varepsilon\hat{J}^{-1} = -\varepsilon^T \tag{4.11}$$

$$\hat{H}\varepsilon\hat{H}^{-1} = -\varepsilon^+, \quad STr\varepsilon = 0 \tag{4.12}$$

posto

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} A & \Sigma \\ \Pi & B \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

le condizioni (4.11),(4.12) danno

$$JAJ^{-1} = -A^T \tag{4.14}$$
$$\Pi = \Sigma^T J \tag{4.15}$$
$$B = -B^T \tag{4.16}$$

$$HAH^{-1} = -A^+ \tag{4.17}$$
$$\Pi = \Sigma^+ H \tag{4.18}$$
$$B = -B^+ \tag{4.19}$$
$$TrA = TrB \tag{4.20}$$

Si capisce quindi come l'algebra ortosimplettica sia l'estensione supersimmetrica delle algebre simplettiche e ortogonali ((4.14) e 4.16) mentre l'algebra superunitaria estende le pseudounitarie e le unitarie ((4.17) e (4.19)). Vogliamo ora risolvere esplicitamente le equazioni precedenti in alcuni casi molto importanti per il seguito.

4.3 Alcuni supergruppi utili

Il gruppo ortosimplettico più semplice possibile è $Osp(2/N, C)$; prendiamo $J = C$ matrice di coniugazione di carica in 3 dimensioni; allora le condizioni (4.11) danno

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i}z^a\Gamma_a & \Sigma \\ \Sigma^T C & A \end{pmatrix}, \quad z^a \in \mathcal{C}, \Sigma \text{ matrice complessa } 2 \times N, \; A = -A^T. \tag{4.21}$$

Il gruppo $Osp(2/1, \mathcal{C})$ è utile per la supergravità in 3 dimensioni; invece per la supergravità in 5 dimensioni si usa $SU(2, 2/1)$ con $H = \Gamma_0$ prima matrice di Dirac in 5 dimensioni; le condizioni (4.12) danno per $SU(2, 2/N)$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}A_0 1 + \frac{1}{2i}x^a\Gamma_a + \frac{1}{4}x^{ab}\Gamma_{ab} & \Sigma \\ \bar{\Sigma} & iA \end{pmatrix}, \quad x^a, x^{ab} \in \Re,$$
$$\Sigma \text{ matrice complessa } 4 \times N, \; A = A^+, \; A_0 \equiv TrA. \tag{4.22}$$

Il gruppo più importante dal punto di vista fisico è però $Osp(4/N)$, su cui si costruisce la supergravità in 4 dimensioni $N-$estesa; si devono imporre simultaneamente le (4.11) e le (4.12) con $J = C$ coniugazione di carica e $H = \Gamma_0$ matrice di Dirac in $D = 4$; si ottiene così

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i}x^a\Gamma_a + \frac{1}{4}x^{ab}\Gamma_{ab} & \Sigma \\ \bar{\Sigma} = \Sigma^T C & A \end{pmatrix}, \quad x^a, x^{ab} \in \Re,\ A = -A^T,\ A = A^*. \tag{4.23}$$

Si noti che le superalgebre (4.22) e (4.23) sono reali, mentre la (4.21) è complessa. Per individuare completamente un'algebra è necessario determinare le relazioni di commutazione dei generatori e verificare che siano soddisfatte le identità di Jacobi: lo facciamo esplicitamente, per esemplificare, nel caso di $Osp(4/N)$. Nel paragrafo (4.5) le algebre di tutti i gruppi citati saranno derivate con un altro procedimento.

4.4 Superalgebre astratte e concrete

In generale una superalgebra (rigida) è costituita da dei generatori astratti T_a e T_α soddisfacenti delle regole di commutazione-anticommutazione del tipo

$$[T_a, T_b] = T_c c^c_{ab}, \quad [T_a, T_\alpha] = T_\beta c^\beta_{a\alpha}, \quad [T_\alpha, T_\beta] = T_c c^c_{\alpha\beta} \tag{4.24}$$

con $c^\Gamma_{\Delta\Theta}$ coefficienti (complessi) detti costanti di struttura della superalgebra[2], soddisfacenti le identità di Jacobi[3]

$$c^\Gamma_{[\Delta|\Theta|} c^\Theta_{\Delta'\Delta''\}} = 0. \tag{4.25}$$

Le superalgebre concrete sono trasformazioni lineari su superspazi vettoriali (un superspazio vettoriale è caratterizzato da una superbase astratta E_Γ e da supervettori $X = E_\Gamma X^\Gamma$ con X^a bosonici e X^α fermionici) e quindi sono rappresentabili con supermatrici; i supergruppi corrispondenti si ottengono per esponenziazione. In questo capitolo invece noi abbiamo risolto il problema inverso, più semplice, di trovare la superalgebra noto il supergruppo di matrici (ciò assicura automaticamente la validità delle identità di Jacobi). Come esempio proviamo le leggi di commutazione di $Osp(4/N)$, in cui i generatori sono costituiti dalle supermatrici

$$\frac{1}{2}J_{aa'}\varepsilon^{aa'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\varepsilon_{ab}\Gamma^{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

[2] Si noti che gli unici $c^\Gamma_{\Delta\Theta}$ non nulli sono $c^a_{bc} = -c^a_{cb}, c^\beta_{a\alpha} = -c^\beta_{\alpha a}, c^c_{\alpha\beta} = +c^c_{\beta\alpha}$.

[3] L'anticommutatore graduato cambia segno per scambi di indici bosonici e misti, non cambia per scambi fermionici; per esempio $[a\beta\gamma\} = \frac{1}{6}(a\beta\gamma - \gamma a\beta + \beta\gamma a + a\gamma\beta - \beta a\gamma + \gamma\beta a)$.

$$\frac{1}{2}Z_{ij}\varepsilon^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

$$P_a\varepsilon^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i}\varepsilon_a\Gamma^a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

$$Q_{\alpha i}\varepsilon^{\alpha i} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

È immediato verificare che valgono

$$\begin{aligned}
&[J^{ab}, J_{cd}] = -4\eta^{[a}{}_{[c}J_{d]}{}^{b]}, \quad [J_{ab}, P_c] = 2P_{[a}\eta_{b]c}, \quad [P_c, P_d] = -\ J_{ab} \\
&[Z^{ij}, Z_{kl}] = -\ 4\eta^{[i}{}_{[k}\eta_{l]}{}^{j]} \\
&[J_{ab}, Z_{ij}] = 0, \quad [P_a, Z_{ij}] = 0 \\
&[J_{ab}, Q_{\alpha i}] = Q_{\beta i}\Sigma^{\beta}_{ab\,\alpha} \quad [P_a, Q_{\alpha i}] = \ Q_{\beta i}\frac{\Gamma_a}{2i}{}^{\beta}{}_{\alpha} \\
&\{Q_{\alpha i}, Q_{\alpha j}\} = P_a(i\Gamma^a)_{\alpha\beta}\delta_{ij} -\ J_{ab}\Sigma^{ab}_{\alpha\beta}\delta_{ij} + Z_{ij}C_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

L'unico punto difficile si trova nella $\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\}$, in cui bisogna usare l'identità di Fierz $\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{4}\bar{\varepsilon}_1\Gamma^a\varepsilon_2\Gamma_a - \frac{1}{8}\bar{\varepsilon}_1\Gamma^{ab}\varepsilon_2\Gamma_{ab}$ da cui [4]

$$\begin{aligned}
[Q_{\alpha i}\varepsilon_1^{\alpha i}, Q_{\beta j}\varepsilon_2^{\beta j}] &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_1 & \\ & \bar{\varepsilon}_1\varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2\varepsilon_1 \end{pmatrix} \\
&= i\bar{\varepsilon}_1\Gamma^a\varepsilon_2 P_a - \tfrac{1}{2}\bar{\varepsilon}_1\Gamma^{ab}\varepsilon_2 J_{ab} + \bar{\varepsilon}_1^i\varepsilon_2^j Z_{ij}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Per capire l'importanza fisica del supergruppo $Osp(4/N)$ si consideri il riscalamento

$$(J, Z, P, Q) \longrightarrow \quad (J, \bar{e}^{-1}Z, \bar{e}^{-1}P, \bar{e}^{-1/2}Q); \tag{4.33}$$

[4] Conviene introdurre dei parametri ε^α (gli ε^α anticommutano tra loro e con i generatori fermionici) e usare l'utile proprietà

$$[T_\alpha\varepsilon_1^\alpha, T_\beta\varepsilon_2^\beta] = \{T_\alpha, T_\beta\}\varepsilon_1^\alpha\varepsilon_2^\beta. \tag{4.31}$$

le (4.30) diventano

$$
\begin{aligned}
&[J^{ab}, J_{cd}] = -4\eta^{[a}{}_{[c}J_{d]}{}^{b]}, \quad [J_{ab}, P_c] = 2P_{[a}\eta_{b]c}, \quad [P_c, P_d] = -\bar{e}^2 J_{ab} \\
&[Z^{ij}, Z_{kl}] = -\bar{e}4\eta^{[i}{}_{[k}\eta_{l]}{}^{j]} \\
&[J_{ab}, Z_{ij}] = 0, \quad [P_a, Z_{ij}] = 0 \\
&[J_{ab}, Q_{\alpha i}] = Q_{\beta i}\Sigma^{\beta}_{ab\alpha}, \quad [P_a, Q_{\alpha i}] = \bar{e}Q_{\beta i}\frac{\Gamma_a}{2i}{}^{\beta}{}_{\alpha} \\
&\{Q_{\alpha i}, Q_{\alpha j}\} = P_a(i\Gamma^a)_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \bar{e}J_{ab}\Sigma^{ab}_{\alpha\beta}\delta_{ij} + Z_{ij}C_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

e le prime tre relazioni ci dicono immediatamente che $Osp(4/N)$ è un' estensione supersimmetrica dell'algebra di De Sitter; dunque nel limite $\bar{e} \to 0$ (contrazione di Inonü-Wigner) si ottiene un'estensione supersimmetrica dell' algebra di Poincarè, che in forma abbreviata scriviamo

$$
\begin{aligned}
&[J, J] = J, \quad [J, P] = J, \quad [P, P] = 0 \\
&[Z, Z] = 0 \\
&[J, Z] = 0, \quad [P, Z] = 0 \\
&[J, Q] = Q, \quad [P, Q] = 0 \\
&[Z, Q] = 0 \\
&[Q, Q] = P + Z.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Si noti che le cariche Z diventano centrali, cioè commutano con tutto, e che inoltre le P e le Q commutano tra loro, a differenza che nel caso di De Sitter.

Nota: i coefficienti di commutazione cambiano a seconda delle convenzioni adottate; le nostre sono più vicine a quelle dei primi articoli sul group manifold approach (si veda per esempio [18]) che a quelle di [21]; in ogni caso le differenze si limitano a qualche segno e a qualche fattore 2.

4.5 Supergruppi nel group manifold approach

In questo paragrafo adotteremo un punto di vista astratto, secondo il quale un supergruppo è una supervarietà differenziabile: ciò significa che i punti di G sono individuati da supercoordinate bosoniche (commutanti) e fermioniche (anticommutanti) $x^\Gamma = (x^a, x^\alpha)$, e che le leggi di inversione e prodotto sono superdifferenziabili[5]. Se G è un supergruppo la superalgebra di Lie astratta G' ad esso associata è l'insieme dei supercampi vettoriali invarianti sinistri. Indichiamo con t_Γ una base di G' e con μ^Γ la base duale; i ragionamenti del capitolo 1 valgono ancora e si può scrivere l'equazione di Maurer-Cartan

$$d\mu^\Gamma + \frac{1}{2} c^\Gamma_{\Delta\Theta} \mu^\Delta \mu^\Theta = 0 \tag{4.36}$$

e le corrispondenti identità di Jacobi (4.25).

Come è noto per studiare concretamente un supergruppo serve una rappresentazione matriciale concreta della sua superalgebra $\mu = T_\Gamma \mu^\Gamma$; dalla (4.36) si possono allora ottenere i coefficienti di commutazione. Lo illustriamo in tre esempi significativi.

4.5.1 Il supergruppo Osp(4/N)

Tale supergruppo è già stato trattato nel paragrafo (4.3) e dunque dovremo riottenere i risultati (4.34) . Dalla (4.23) si ha [6]

$$\mu = \begin{pmatrix} v + \omega & \psi \\ \bar{\psi} & A \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

e quindi l'equazione di Maurer-Cartan $0 = d\mu + \mu\mu$ si scrive

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i}(dv^a + \omega^a{}_b v^b)\Gamma_a + (d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb} - \frac{1}{4} v^a v^b)\Gamma_{ab} + \psi\bar{\psi} & d\psi + \omega\psi + \psi A + v\psi \\ \overline{d\psi + \omega\psi + \psi A + v\psi} & dA + AA + \bar{\psi}\psi \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

Sfruttando l'identità di Fierz $\psi\bar{\psi} = \frac{1}{4}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a - \frac{1}{8}\bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab}$ otteniamo

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i}(\mathcal{D}v^a + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi)\Gamma_a) + \frac{1}{4}(R^{ab} - v^a v^b - \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi)\Gamma_{ab} & D\psi + v\psi \\ \overline{D\psi + v\psi} & F + \bar{\psi}\psi \end{pmatrix}; \tag{4.40}$$

per chiarificare il significato fisico del supergruppo effettuiamo il riscalamento

$$(\omega, A, v, \psi) \longrightarrow \quad (\omega, \bar{e}A, \bar{e}v, \bar{e}^{1/2}\psi); \tag{4.41}$$

[5] Non ci preoccupiamo di dare una definizione rigorosa del concetto di "superdifferenziabilità".

[6] Usiamo le abbreviazioni $v = \frac{1}{2i} v^a \Gamma_a$, $\omega = \frac{1}{4}\omega^{ab}\Gamma_{ab}$, $A = \frac{1}{2} A^{ij} S_{ij}$ che comportano

$$vv = -\frac{1}{4} v^a v^b \Gamma_{ab}, \quad \omega\omega = \frac{1}{4}(\omega^a{}_c \omega^{cb})\Gamma_{ab}, \quad \omega v + v\omega = \frac{1}{2i}(\omega^a{}_b v^b)\Gamma_a. \tag{4.37}$$

dunque le (4.40) si riscrivono

$$\begin{cases} 0 = R^{ab} - \bar{e}^2 v^a v^b - \frac{1}{2}\bar{e}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi \\ 0 = dA + \bar{e}AA + \bar{\psi}\psi \\ 0 = \mathcal{D}v^a + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ 0 = \mathcal{D}\psi + \bar{e}\psi A + \bar{e}v\psi; \end{cases} \tag{4.42}$$

si ritrova così il fatto che $Osp(4/N)$ è l'estensione supersimmetrica del gruppo di De Sitter 4-dimensionale. Si verificano facilmente anche le regole di commutazione (4.35).

4.5.2 Il supergruppo Osp(2/1,C)

Dalla (4.21) si ha

$$\mu = \begin{pmatrix} \zeta & \xi \\ \xi^T C & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \frac{1}{2i}\zeta^a\Gamma_a \tag{4.43}$$

dunque

$$0 = d\mu + \mu\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i}(d\zeta^a + \frac{1}{2}\varepsilon^a_{bc}\zeta^b\zeta^c)\Gamma_a + \xi\xi^T C & d\xi + \zeta\xi \\ (d\xi + \zeta\xi)^T C & 0 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

Sfruttando la proprietà $\xi\xi^T C = \frac{1}{2}\xi^T C\Gamma_a\xi\Gamma^a$ [7] si ottiene

$$0 = d\mu + \mu\mu = \begin{pmatrix} d\zeta + \frac{1}{2}\zeta\times\zeta + i\xi^T C\Gamma\xi & d\xi + \zeta\xi \\ (d\xi + \zeta\xi)^T C & 0 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

A questo punto passiamo dalla superalgebra complessa alla sua forma reale ponendo $\zeta^a = \vec{\omega}^a + i\vec{v}^a$, $\xi^\alpha = \psi_1^\alpha + i\psi_2^\alpha$ con ψ_r spinori di Majorana; seguono

$$\begin{cases} 0 = d\vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\omega}\times\vec{\omega} - \frac{1}{2}\vec{v}\times\vec{v} + i\bar{\psi}_1\vec{\Gamma}\psi_1 - i\bar{\psi}_1\vec{\Gamma}\psi_2 \\ 0 = d\vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{v} + 2i\bar{\psi}_1\vec{\Gamma}\psi_2 \\ 0 = d\psi_1 + \omega\psi_1 - v\psi_2 \\ 0 = d\psi_2 + \omega\psi_2 + v\psi_1 \end{cases} \tag{4.46}$$

Per chiarificare il significato fisico del gruppo effettuiamo il riscalamento

$$(\omega, v, \psi_1, \psi_2) \quad \longrightarrow \quad (\omega, \bar{e}v, \bar{e}^{-1/2}\psi_1, \bar{e}^{-1/2}\psi_2) \tag{4.47}$$

e facciamo la posizione

$$\omega^{ab} = -\varepsilon^{abc}\vec{\omega}_c \qquad (\vec{\omega}_c = -\frac{1}{2}\varepsilon_{cab}\omega^{ab}) \tag{4.48}$$

[7] La si può verificare proiettando sulla base $1, \Gamma_a$.

Allora le (4.44) si riscrivono

$$\begin{cases} 0 = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c\omega^{cb} - \bar{e}^2 v^a v^b - \bar{e}\bar{\psi}_1\Gamma^{ab}\psi_1 + \bar{e}\bar{\psi}_2\Gamma^{ab}\psi_2 \\ 0 = \mathcal{D}v^a + 2i\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_2 \\ 0 = \mathcal{D}\psi_1 - \bar{e}v\psi_2 \\ 0 = \mathcal{D}\psi_2 + \bar{e}v\psi_1 \end{cases} \tag{4.49}$$

si vede così che $Osp(2/1,\mathcal{C})$ non è altro che l'estensione supersimmetrica del gruppo di De Sitter tridimensionale. Dalle (4.49) si possono estrarre le costanti di struttura $c^\Gamma_{\Delta\Theta}$ e quindi le regole di commutazione:

$$\begin{aligned}
&[J^{ab}, J_{cd}] = -4\eta^{[a}{}_{[c}J_{d]}{}^{b]}, \quad [J_{ab}, P_c] = 2P_{[a}\eta_{b]c}, \quad [P_c, P_d] = -\bar{e}^2 J_{ab} \\
&[J_{ab}, Q_{\alpha 1}] = Q_{\beta 1}\Sigma^\beta_{ab\alpha}, \quad [J_{ab}, Q_{\alpha 2}] = Q_{\beta 2}\Sigma^\beta_{ab\alpha} \\
&[P, Q_{1\alpha}] = \bar{e}Q_{2\beta}(\tfrac{\Gamma_a}{2i})^\beta{}_\gamma, \quad [P, Q_{2\alpha}] = -\bar{e}Q_{1\beta}(\tfrac{\Gamma_a}{2i})^\beta{}_\gamma \\
&\{Q_{1\alpha}, Q_{1\beta}\} = -\bar{e}\Gamma^{ab}_{\alpha\beta}J_{ab}, \quad \{Q_{2\alpha}, Q_{2\beta}\} = +\bar{e}\Gamma^{ab}_{\alpha\beta}J_{ab}, \quad \{Q_{1\alpha}, Q_{2\beta}\} = 2i\Gamma^a_{\alpha\beta}P_a.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Nota: il conto si potrebbe evidentemente estendere anche a $Osp(2/N,\mathcal{C})$ ma non ci interessa farlo per motivi che saranno chiari nel seguito.

4.5.3 Il supergruppo SU(2,2/1)

Dalla (4.22) si ha

$$\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}iA + v + \omega & \xi \\ \bar{\xi} & iA \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

Ragionando come in tre e quattro dimensioni, ma tenendo conto dell' identità di Fierz $\xi\bar{\xi} = \frac{1}{4}\xi\bar{\xi} + \frac{1}{4}\bar{\xi}\Gamma_a\xi\Gamma^a - \frac{1}{8}\bar{\xi}\Gamma_a b\xi\Gamma^{ab}$, otteniamo dall'equazione di Maurer-Cartan

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{i}{4}(dA - i\bar{\xi}\xi) + (\mathcal{D}v^a + \frac{i}{2}\bar{\xi}\Gamma^a\xi)\frac{\Gamma^a}{2i} + \frac{1}{4}(R^{ab} - v^a v^b - \frac{1}{2}\bar{\xi}\Gamma^{ab}\xi)\Gamma_{ab} & \mathcal{D}\xi - \frac{3}{4}iA\xi + v\xi \\ \overline{\mathcal{D}\xi + \frac{3}{4}iA\xi + v\xi} & i(dA - i\bar{\xi}\xi) \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

Poniamo $\xi = \psi_1 + i\psi_2$ con ψ_i Majorana-simplettico; le proprietà di $C-$simmetria delle matrici Γ danno (si veda il paragrafo (3.6))

$$\bar{\xi}\xi = \bar{\psi}\psi, \quad \bar{\xi}\Gamma^a\xi = \bar{\psi}\Gamma^a\psi, \quad \bar{\xi}\Gamma^{ab}\xi = i\bar{\psi}\times\Gamma^{ab}\psi \tag{4.53}$$

e quindi le (4.52), col solito riscalamento

$$(\omega, A, v, \psi) \longrightarrow \quad (\omega, \bar{e}A, \bar{e}v, \bar{e}^{1/2}\psi) \tag{4.54}$$

si riscrivono

$$\begin{cases} 0 = R^{ab} - \bar{e}^2 v^a v^b - \frac{i}{2}\bar{e}\bar{\psi} \times \Gamma^{ab}\psi \\ 0 = dA - i\bar{\psi}\psi \\ 0 = \mathcal{D}v^a + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ 0 = \mathcal{D}\psi_i + \varepsilon_{ij}(\frac{3}{4}A\psi^j + iv\psi^j); \end{cases} \tag{4.55}$$

si vede così che $SU(2,2/1)$ non è altro che l'estensione supersimmetrica del gruppo di De Sitter 5-dimensionale. Esplicitamente le regole di commutazione si scrivono

$$\begin{aligned} &[J^{ab}, J_{cd}] = -4\eta^{[a}{}_{[c}J_{d]}{}^{b]}, \quad [J_{ab}, P_c] = 2P_{[a}\eta_{b]c}, \quad [P_c, P_d] = -\bar{e}^2 J_{ab} \\ &[Z, Z] = 0 \\ &[J_{ab}, Z] = 0, \quad [P_a, Z] = 0 \\ &[J_{ab}, Q_{\alpha 1}] = Q_{\beta 1}\Sigma^{\beta}_{ab\,\alpha} \quad [J_{ab}, Q_{\alpha 2}] = Q_{\beta 2}\Sigma^{\beta}_{ab\,\alpha} \\ &[P, Q_{1\alpha}] = \bar{e}Q_{2\beta}(\tfrac{\Gamma_a}{2})^{\beta}{}_{\gamma}, \quad [P, Q_{2\alpha}] = -\bar{e}Q_{1\beta}(\tfrac{\Gamma_a}{2})^{\beta}{}_{\gamma} \\ &\{Q_{1\alpha}, Q_{1\beta}\} = \{Q_{2\alpha}, Q_{2\beta}\} = -\tfrac{i}{2}\bar{e}\Gamma^{ab}_{\alpha\beta}J_{ab} \\ &\{Q_{1\alpha}, Q_{2\beta}\} = i\Gamma^a_{\alpha\beta}P_a + 2iC_{\alpha\beta}Z. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Nota: anche in questo caso non ci interessa estendere la trattazione a $SU(2,2/N)$.

4.6 Il superspazio rigido

In questo paragrafo, seguendo le idee del capitolo 1, mostreremo come sia possibile costruire, a partire dai supergruppi precedentemente studiati, dei superspazi D-dimensionali ($D = 3, 4, 5$) supersimmetrici (in pratica ciò significa che esistono dei supervettori di Killing K_Γ che formano una rappresentazione dei generatori del supergruppo).

In primo luogo notiamo che tutti i supergruppi studiati finora ammettono la decomposizione $G' = H' \oplus K'$, $H' = SO(1, D-1)' \oplus H'_0$, $K' = I' \oplus O'$, con le proprietà seguenti:

$$\begin{array}{ll} [H', H'] < H' & (c^{a,\alpha}_{\mathcal{B}C} = 0) \\ [H', I'] < I' & (c^{\mathcal{A},\alpha}_{\mathcal{B}c} = 0) \\ [H', O'] < O' & (c^{\mathcal{A},a}_{\mathcal{B}\beta} = 0) \\ [I', I'] < H' & (c^{a,\alpha}_{bc} = 0) \\ [I', O'] < O' & (c^{\mathcal{A}a}_{b\gamma} = 0) \\ \{O', O'\} < H' + I' & (c^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0) \end{array} \tag{4.57}$$

(più precisamente la decomposizione del supergruppo di De Sitter è del tipo

$$\begin{array}{l} [J,J]=J, \quad [J,P]=P, \quad [P,P]=-\bar{e}^2 J \\ [Z,Z]=eZ \\ [J,Z]=0, \quad [P,Z]=0 \\ [J,Q]=Q, \quad [P,Q]=\bar{e}Q \\ [Z,Q]=\bar{e}Q \\ \{Q,Q\}=\bar{e}J+Z+P \end{array} \tag{4.58}$$

e si noti che nel limite di Poincarè le cariche Z diventano centrali).

In generale è quindi possibile decomporre l'equazione di Maurer-Cartan come

$$\begin{cases} 0 = d\mu^{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{BC}}\mu^{\mathcal{B}}\mu^{\mathcal{C}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{bc}\mu^b\mu^c + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta \\ 0 = d\mu^a + c^a_{\mathcal{B}c}\mu^{\mathcal{B}}\mu^c + \frac{1}{2}c^a_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta \\ 0 = d\mu^\alpha + c^\alpha_{\mathcal{B}\gamma}\mu^{\mathcal{B}}\mu^\gamma + c^\alpha_{b\gamma}\mu^b\mu^\gamma \end{cases} \tag{4.59}$$

ovvero

$$\begin{cases} 0 = \breve{R}^{\mathcal{A}} = d\omega^{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{BC}}\omega^{\mathcal{B}}\omega^{\mathcal{C}} + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{bv}v^b v^c + \frac{1}{2}c^{\mathcal{A}}_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta \\ 0 = \breve{T}^a = dv^a + c^a_{\mathcal{B}c}\omega^{\mathcal{B}}v^c + \frac{1}{2}c^a_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta \\ 0 = \breve{\varrho}^\alpha = d\psi^\alpha + c^\alpha_{\mathcal{B}\gamma}\omega^{\mathcal{B}}\psi^\gamma + c^\alpha_{b\gamma}v^b\psi^\gamma \end{cases} \tag{4.60}$$

(più precisamente per superestensioni del gruppo di De Sitter le (4.60) assumono una forma del tipo

$$\begin{cases} 0 = \breve{R}^{aa'} = R^{aa'} - \bar{e}^2 v^a v^{a'} + \frac{\bar{e}}{2}\bar{\psi}^i c^{aa'}_{ij}\psi^j, \quad R^{aa'} = d\omega^{aa'} + \omega^{ac}\omega_c{}^{a'} \\ 0 = \breve{F}^{ij} = F^{ij} + \frac{1}{2}\bar{\psi}^k c^{ij}_{kl}\psi^l, \quad F^{ij} = dA^{ij} + \bar{e}A^i{}_k A^{kj} \\ 0 = \breve{T}^a = \mathcal{D}v^a + \frac{1}{2}\bar{\psi}^i c^a_{ij}\psi^j, \quad \mathcal{D}v^a = dv^a + \omega^a{}_b v^b \\ 0 = \breve{\varrho}^i = D\psi^i + \bar{e}c^i_{bj}v^b\psi^j, \quad D\psi^i = d\psi^i + \frac{1}{2}\Sigma_{ab}\omega^{ab}\psi^i\bar{e}A^i{}_j\psi^j \end{cases} \tag{4.61}$$

si noti che $\mathcal{A} \to (ab, ij)$, $\alpha \to (\alpha i)$).

In queste ipotesi lo spazio omogeneo che si ottiene identificando i punti collegati da H-trasformazioni, $K = G/H$, si dice supersimmetrico; nel caso del gruppo di Poincarè (di De Sitter) K è detto superspazio rigido di Minkowsky (di De Sitter).

Per studiare la geometria di K (cioè per determinarne una superbase E^A e una connessione $\omega^A{}_B$) occorre una parametrizzazione $L(x,\theta)$ del superspazio, come ad esempio

$$L(x,\theta) = \exp(T_{\alpha i}\theta^{\alpha i})\exp(T_a x^a) \tag{4.62}$$

(nel caso di $Osp(4/N)$, usando le convenzioni di [21], un pò diverse dalle nostre, risulta

$$L(x,\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+2\bar{e}\theta\theta} & \sqrt{2\bar{e}}\theta \\ \sqrt{2\bar{e}}\bar{\theta} & \sqrt{\mathbb{1}+2\bar{e}\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+2\bar{e}ix_a\gamma^a}{\sqrt{1+4\bar{e}^2x_ax^a}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

Si trova quindi la base di 1-forme

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{\mathcal{A}}(x^B)dx^A = \bar{L}dL. \tag{4.64}$$

Se interessa il limite di Minkowsky $\bar{e} \to 0$ le formule si semplificano notevolmente e nel caso $D = 4$, colle convenzioni di [21] (a cui rimandiamo per una spiegazione dettagliata) si trova

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab} & \sqrt{2\bar{e}}\psi \\ \sqrt{2\bar{e}}\bar{\psi} & \bar{e}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\bar{e}\gamma_a(2dx^a + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^a d\theta) & \sqrt{2\bar{e}}d\theta \\ \sqrt{2\bar{e}}d\bar{\theta} & \bar{e}(d\bar{\theta}\theta - \bar{\theta}d\theta) \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

Da queste si possono trovare i vettori di Killing e i compensatori colle tecniche spiegate nel paragrafo (1.9):

$$\begin{cases} P_a = -\frac{1}{2}\partial_a, \quad T_{AB} = 0, \quad Q_{A\alpha} = \partial_{A\alpha} - \frac{1}{4}(\bar{\theta}\gamma^a)_{A\alpha}\partial_a, \\ M_{ab} = x_{[a}\partial_{b]} + \frac{1}{4}\bar{\theta}\gamma_{ab}\partial_\theta, \; W^{\mathcal{A}}{}_\Gamma = 0 \text{ tranne } W^{cd}_{ab} = -\delta^{cd}_{ab}. \end{cases} \tag{4.66}$$

Lo stesso procedimento si può evidentemente effettuare per $Osp(2,\mathcal{C}/1)$ e $SU(2,2/1)$. In ogni caso comunque il superspazio rigido non è molto interessante per i nostri scopi: quello che a noi interessa è lo studio della supergravità che è lo studio della geometria del superspazio vincolato.

4.7 Il superspazio vincolato

Ci interessa ora studiare la versione soffice del superspazio. I ragionamenti che illustreremo valgono in generale per ogni supergruppo con decomposizione del tipo (4.57).

Come si è visto nel capitolo 1 si ottiene un gruppo soffice assumendo che le 1-forme μ^Γ siano non invarianti sinistre; in tali ipotesi si hanno delle curvature $\breve{\mu}^\Gamma$ diverse da zero. Nel nostro caso le curvature si decompongono come mostrato nell'equazione (4.60), che riscriviamo, introducendo esplicitamente l'$H-$derivazione D,[8]

$$\begin{cases} \breve{R}^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\bar{e}^2 c^{\mathcal{A}}_{bc}\mu^b\mu^c + \frac{1}{2}\bar{e}c^{\mathcal{A}}_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta \\ \breve{T}^a = \mathcal{D}v^a + \frac{1}{2}c^a_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta \\ \breve{\varrho}^\alpha = D\psi^\alpha + \bar{e}c^\alpha_{b\gamma}v^b\psi^\gamma. \end{cases} \tag{4.67}$$

Le identità di Jacobi vengono allora sostituite dalle identità di Bianchi

$$\begin{cases} \nabla\breve{R}^{\mathcal{A}} = D\breve{R}^{\mathcal{A}} + c^{\mathcal{A}}_{bc}v^b\breve{T}^c + c^{\mathcal{A}}_{\alpha\beta}\psi^\alpha\breve{\varrho}^\beta = 0 \\ \nabla\breve{T}^a = D\breve{T}^a - c^a_{\mathcal{B}c}\breve{R}^{\mathcal{B}}v^c + c^a_{\alpha\beta}\psi^\alpha\breve{\varrho}^\beta = 0 \\ \nabla\breve{\varrho}^\alpha = D\breve{\varrho}^\alpha - c^\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\breve{R}^{\mathcal{B}}\omega^{\mathcal{C}} + c^\alpha_{b\gamma}v^b\breve{\varrho}^\gamma - c^\alpha_{b\gamma}\breve{T}^b\psi^\gamma = 0 \end{cases} \tag{4.68}$$

[8] Si intende $\omega^a{}_c \equiv c^a_{\mathcal{B}c}\omega^{\mathcal{B}}, \quad \omega^\alpha{}_\gamma \equiv c^\alpha_{\mathcal{B}\gamma}\omega^{\mathcal{B}}$.

I supergruppi soffici sono troppo generali per descrivere lo spaziotempo ordinario: è quindi necessario imporre dei vincoli per ridurre le dimensioni fisiche da $D + \frac{D(D-1)}{2} + N\Delta \longrightarrow D$.

L'invarianza di gauge permette di eliminare facilmente le $D(D-1)/2$ dimensioni associate ai generatori H imponendo

$$\breve{\mu}^{\Gamma}_{\mathcal{A}\Delta} = 0 \tag{4.69}$$

ciò permette di ottenere $\mu(x, y)$ in funzione di $\mu_0(x)$ via una trasformazione di gauge, come fatto nel paragrafo (1.10):

$$\mu = \bar{\Lambda}\mu_0\Lambda + \Lambda d\Lambda. \tag{4.70}$$

Inoltre l'algebra dei diffeomorfismi $[\ell_{t_\Gamma}, \ell_{t_\Delta}] = \ell_{(c^{\Theta}_{\Gamma\Delta} - \breve{\mu}^{\Theta}_{\Gamma\Delta})t_\Theta}$ si scompone in

$$\begin{array}{l} [\ell_{t_\mathcal{A}}, \ell_{t_\mathcal{B}}] = c^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}B}\ell_{t_C} \\ [\ell_{t_\mathcal{A}}, \ell_{t_b}] = c^{c}_{\mathcal{A}b}\ell_{t_c} \\ [\ell_{t_\mathcal{A}}, \ell_{t_\beta}] = c^{\gamma}_{\mathcal{A}\beta}\ell_{t_\gamma} \\ [\ell_{t_a}, \ell_{t_b}] = c^{\mathcal{A}}_{ab}\ell_{t_\mathcal{A}} - \ell_{\breve{\mu}^{\Gamma}_{ab}t_\Gamma} \\ [\ell_{t_a}, \ell_{t_\beta}] = c^{\gamma}_{a\beta}\ell_{t_\gamma} - \ell_{\breve{\mu}^{\Gamma}_{a\beta}t_\Gamma} \\ \{\ell_{t_\alpha}, \ell_{t_\beta}\} = c^{a}_{\alpha\beta}\ell_{t_a} + c^{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}\ell_{t_C} - \ell_{\breve{\mu}^{\Gamma}_{\alpha\beta}t_\Gamma}. \end{array} \tag{4.71}$$

L'eliminazione delle dimensioni fermioniche, dovuta all'invarianza per supersimmetria, è però molto più problematica: non si può imporre semplicemente

$$\breve{\mu}^{\Gamma}_{\alpha B} = 0 \tag{4.72}$$

altrimenti anche le supertrasformazioni sarebbero trasformazioni di gauge (nel senso del paragrafo (1.10)) e ciò non può essere ammesso. Si consideri infatti il seguente ragionamento.

Ammettiamo che le supertrasformazioni siano simmetrie della teoria e anche trasformazioni di gauge; allora anche il loro commutatore dev'essere una simmetria della teoria e una trasformazione di gauge: ma

$$\{\ell_{t_\alpha}, \ell_{t_\beta}\} = \text{ (se } \breve{\mu}_{\alpha\beta} = 0) = c^{a}_{\alpha\beta}\ell_{t_a} + c^{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}\ell_{t_C} \tag{4.73}$$

contiene una traslazione di gauge che, come sappiamo dal paragrafo (1.11) non è una simmetria della teoria (lo è soltanto nel vuoto) . Dunque la (4.72) non è imponibile.[9]

[9] In sintesi il ragionamento si può scrivere anche nella forma

$$i_{t_\alpha}\breve{\mu}^{\Gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{\{t_\alpha, t_\beta\}}\breve{\mu}^{\Gamma} = 0 \Rightarrow \quad i_{t_a}\breve{\mu}^{\Gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \breve{\mu}^{\Gamma} = 0.$$

È comunque possibile introdurre dei vincoli che permettono di esprimere le componenti esterne delle curvature in funzione delle componenti interne:

$$\breve{\mu}^{\Gamma}_{\alpha A} = \breve{\mu}^{\Gamma}_{\alpha A}(\mu^{\Delta}_{ab}). \tag{4.74}$$

Tali vincoli costituiscono un sistema di equazioni differenziali, come si vede usando coordinate locali:

$$(d\mu + \mu\mu)_{\tilde{\alpha}\tilde{A}} = \mu_{\tilde{\alpha}\tilde{A}}(\mu_{\tilde{a}\tilde{b}}) \quad \Rightarrow \partial_{[\tilde{\alpha}}\mu_{\tilde{A}]} = f_{\tilde{\alpha}\tilde{A}}(\partial_{[\tilde{a}}\mu_{b]}, \mu_{\tilde{A}}). \tag{4.75}$$

Noto μ_0 sullo spaziotempo, cioè note le condizioni iniziali $\mu_{\tilde{a}}(x,0)$, $\partial_{[\tilde{a}}\mu_{\tilde{b}]}(x,0)$ le (4.75) permettono di ricavare le derivate esterne in funzione delle interne; dunque il sistema(4.75)permette di ricavare μ su tutto il superspazio.

Naturalmente tutto quanto si è detto vale solo se il sistema differenziale soddisfa la condizione di integrabilità $d^2 = 0$ cioè le identità di Bianchi $\nabla\breve{\mu} = 0$: questa richiesta, assieme alle invarianze della teoria, impone dei vincoli molto stretti sulla parametrizzazione (4.74), che in pratica viene completamente determinata (a meno di ridefinizioni dei campi); in alcuni casi (detti on-shell) risultano inoltre fissate anche le equazioni del moto. Le tecniche per determinare la forma esplicita della parametrizzazione e le equazioni del moto sono oggetto della supergravità vera e propria, che tratteremo estesamente nel prossimo capitolo. Qui ci limitiamo a considerare come esempio il caso più semplice possibile, la supergravità di Poincarè in quattro dimensioni.

4.8 Supergravità semplice

La teoria più semplice, ma anche la più importante dal punto di vista fisico, è costruita sul (super)gruppo $\overline{Osp(4/1)}$, caratterizzato dalle seguenti curvature[10]:

$$\begin{cases} R^a{}_b = d\omega^a{}_b - \omega^a{}_c\omega^c{}_b \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ \varrho = \mathcal{D}\psi \end{cases} \tag{4.76}$$

dalle seguenti identità di Bianchi

$$\begin{cases} \mathcal{D}R^a{}_b = 0 \\ \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - i\bar{\psi}\Gamma^a\varrho = 0 \\ \mathcal{D}\varrho + \frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\psi = 0 \end{cases} \tag{4.77}$$

e dalle seguenti invarianze:

[10] Qui per compatibilità con [21] seguiamo delle convenzioni che differiscono dalle nostre per qualche segno e per qualche fattore 2. R^a indica la (super)torsione $\breve{T}^a$.

1. Invarianza di Lorentz

$$\begin{array}{l} \omega'^a{}_b = \bar{\Lambda}^a{}_c \omega^c{}_d \Lambda^d{}_b + \bar{\Lambda}^a{}_c d\Lambda^c_b, \qquad \delta\omega^a{}_b = \mathcal{D}\varepsilon^a{}_b \\ v'^a = \bar{\Lambda}^a{}_b v^b, \qquad \delta v^a = -\varepsilon^a{}_b v^b \\ \psi'^\alpha = \bar{\Lambda}^\alpha{}_\beta \psi^\beta, \qquad \delta\psi^\alpha = -\varepsilon^\alpha{}_\beta \psi^\beta \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\Sigma^\alpha_{ab\beta}\psi^\beta \end{array} \tag{4.78}$$

2. Invarianza di scala

$$\omega \longrightarrow w^0\omega, \; v \longrightarrow w^{+1}v, \; \psi \longrightarrow w^{+1/2}\psi \tag{4.79}$$

Per passare dal supergruppo soffice al superspazio fisico si devono imporre dei vincoli (i vincoli sulle $H-$direzioni sono sempre sottointesi)

$$\begin{array}{ll} R^{ab}{}_{\gamma D} & = R^{ab}{}_{\gamma D}(R^{ef}{}_{gh}, R^e{}_{gh}, \varrho^\alpha_{gh}) \\ R^a{}_{\gamma D} & = R^a{}_{\gamma D}(R^{ef}{}_{gh}, R^e{}_{gh}, \varrho^\alpha_{gh}) \\ \varrho^\alpha_{\gamma D} & = \varrho^\alpha_{\gamma D}(R^{ef}{}_{gh}, R^e{}_{ab}, \varrho^\alpha_{ab}) \end{array} \tag{4.80}$$

L'invarianza di scala impone che le curvature esterne siano date da combinazioni lineari dei seguenti campi:

$$\begin{array}{lll} R^{ab}{}_{\gamma\delta} & = R^{ab}{}_{\gamma\delta}(R^e{}_{gh}) & (\text{peso } -1) \\ R^{ab}{}_{c\delta} & = R^{ab}{}_{c\delta}(\varrho^\alpha_{gh}) & (\text{peso } -\frac{3}{2}) \\ R^a{}_{\gamma\delta} & = 0 & (\text{peso } +0) \\ R^a{}_{\gamma d} & = 0 & (\text{peso } -\frac{1}{2}) \\ \varrho^\alpha_{\beta\gamma} & = 0 & (\text{peso } -\frac{1}{2}) \\ \varrho^\alpha_{\beta c} & = \varrho^\alpha_{\beta c}(R^e{}_{gh}) & (\text{peso } -1) \end{array} \tag{4.81}$$

Assumendo il vincolo $R^a_{bc} = 0$ (che non è restrittivo in quanto è sempre imponibile a meno di una ridefinizione della connessione) l'unica curvatura esterna non nulla è

$$R^{ab}{}_{c\delta} = \theta^{ab}{}_{c\delta}(\varrho_{ab}). \tag{4.82}$$

Per determinare esplicitamente θ ed ottenere una teoria consistente si devono imporre le identità di Bianchi. Esiste un teorema dovuto a Dragon ([26]) secondo il quale se sono verificate le identità T e ϱ , l' identità R è identicamente soddisfatta. Dunque è sufficiente riscrivere le (4.77b,c) con i vincoli imposti[11]:

$$\begin{array}{l} R^{ab}v^c v^d v_b + \bar{\theta}^{ab}{}_c \psi v^c v_b - i\bar{\psi}\Gamma^a \varrho_{bc} v^b v^c = 0 \\ \\ \mathcal{D}(\varrho_{ab}v^a v^b) + \frac{1}{4}R^{ab}{}_{cd}v^c v^d \Gamma_{ab}\psi + \frac{1}{4}\bar{\theta}^{ab}{}_c \psi v^c \Gamma_{ab}\psi = 0 \end{array} \tag{4.83}$$

[11] Si tenga presente che in conseguenza ai vincoli suddetti risulta

$$\mathcal{D}v = \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma\psi, \quad \mathcal{D}\psi = \varrho_{ab}v^a v^b.$$

Proiettando nei vari settori si ottiene:

Identità$-T$:

$$\begin{array}{ll} settore\ \psi\psi\psi: & 0=0 \\ settore\ v\psi\psi: & 0=0 \\ settore\ vv\psi: & \bar{\theta}_{abc}\psi v^c v^b - i\bar{\psi}\Gamma_a \varrho_{bc} v^b v^c = 0 \quad (*) \\ settore\ vvv: & R^a{}_{bcd} v^b v^c v^d = 0 \end{array} \tag{4.84}$$

Identità$-\varrho$:

$$\begin{array}{ll} settore\ \psi\psi\psi: & 0=0 \\ settore\ v\psi\psi: & i\varrho_{ab}\bar{\psi}\Gamma^a\psi v^b + \frac{1}{4}\bar{\theta}^{ab}{}_c\psi\Gamma_{ab}\psi v^c = 0 \quad (**) \\ settore\ vv\psi: & \psi^\alpha \mathcal{D}_\alpha \varrho_{ab} v^a v^b + \frac{1}{4} R^{ab}{}_{cd}\Gamma_{ab}\psi v^c v^d = 0 \quad (***) \\ settore\ vvv: & \partial_c \varrho_{ab} v^a v^b v^c = 0 \end{array} \tag{4.85}$$

Dalla (*) si può ricavare

$$\theta_{abc} = -2i\Gamma_{[a}\varrho_{b]c} + i\Gamma_c\varrho_{ab} \tag{4.86}$$

A questo punto la (**) permette di ricavare l'equazione del gravitino con alcuni rimaneggiamenti (vedi [21] pag.721 per i dettagli; si usano le identità di Fierz in quattro dimensioni e la formula

$$\Gamma_5\Gamma_d\Gamma_{ab} = 2\Gamma_5\eta_{d[a}\Gamma_{b]} - i\varepsilon_{abcd}\Gamma^c). \tag{4.87}$$

Si ottiene

$$\Gamma_5\Gamma_c\varrho_{ab}\varepsilon^{abcd} = 0 \tag{4.88}$$

o, in termini di forme

$$\Gamma_5\Gamma_c\varrho v^c = 0. \tag{4.89}$$

L'equazione del gravitone si ottiene derivando la (4.89); si ottiene

$$\Gamma_5\Gamma_c(-\frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\psi)v^c + \Gamma_5\Gamma_c\varrho(\frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^c\psi) = 0 \tag{4.90}$$

e quindi, nel settore $vvv\psi$,

$$R^{ab}v^c\varepsilon_{abcd} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = 0. \tag{4.91}$$

4.9 Il punto di vista lagrangiano

È anche possibile ricavare i vincoli e le equazioni del moto interne di una teoria di supergravità da un punto di vista lagrangiano. Nel nostro caso per esempio è immediato verificare che i vincoli

$$\begin{array}{l} R^{ab}_{c\delta} = \theta^{ab}_{c\delta}, \quad R^{ab}_{\gamma\delta} = 0 \\ R^{a}_{b\gamma} = 0, \quad R^{a}_{\beta\gamma} = 0 \\ \varrho^{\alpha}_{b\gamma} = 0, \quad \varrho^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0 \\ \bar{\theta}_{abc} = -\varepsilon_{abef}\,\bar{\varrho}^{ef}\Gamma_5\Gamma_c - \eta_{c[a}\varepsilon_{b]def}\,\bar{\varrho}^{ef}\Gamma_5\Gamma_d \end{array} \tag{4.92}$$

e le equazioni del moto interne

$$\begin{array}{l} \mathcal{R}^{a}{}_{b} - \frac{1}{2}\eta^{a}{}_{b}R_S = 0 \\ R^{a}_{bc} = 0 \\ \varepsilon^{abcd}\Gamma_5\Gamma_b\varrho_{cd} = 0 \end{array} \tag{4.93}$$

si possono dedurre dall'azione

$$I = \int_{M_4 \subset \overline{Osp(4/1)}} R^{ab}v^c v^d \varepsilon_{abcd} + 4\bar{\varrho}\Gamma_5\Gamma_a\psi v^a. \tag{4.94}$$

tramite le "super"equazioni del moto (equazioni su superforme)

$$\begin{array}{l} R^{ab}v^c\varepsilon_{abcd} = 0 \\ R^{c}v^d\varepsilon_{abcd} = 0 \\ \Gamma_5\Gamma_d\varrho v^d = 0 \end{array} \tag{4.95}$$

(l'azione (4.94) sarà costruita in base a pure considerazioni geometriche nel capitolo 5): basta risolvere le (4.95) proiettando nei vari settori. C'è però un problema: dal principio d'azione si ottiene

$$\bar{\theta}_{abc} = -\varepsilon_{abef}\,\bar{\varrho}^{ef}\Gamma_5\Gamma_c - \eta_{c[a}\varepsilon_{b]def}\,\bar{\varrho}^{ef}\Gamma_5\Gamma_d \tag{4.96}$$

che differisce (apparentemente) dall'espressione in (4.86); tuttavia con qualche rimaneggiamento[12] si può scrivere

$$\theta^{Azione}_{abc} = \theta^{Bianchi}_{abc} + \text{termini lineari in } E_a = \varepsilon_{abcd}\Gamma_5\Gamma_b D^c\psi^d \tag{4.97}$$

e quindi se è verificata l'equazione del gravitino (come deve essere affinchè le identità di Bianchi siano soddisfatte) le due espressioni coincidono.

[12] Si veda [21] pag. 686.

La deduzione della teoria da un principio d'azione (detto principio d'azione reonomico) oltre che essere "estetica" è anche molto comoda in teorie in cui compaiono solo 1-forme (cioè tutte le teorie trattate finora in cui le 1-forme μ^Γ costituiscono la base del supergruppo soffice), e spesso è più rapida dell'approccio di Bianchi. Il vantaggio maggiore che presenta, però, è che i vincoli sono forniti automaticamente dalle equazioni del moto esterne, senza la difficoltà di dover cercare un ansatz opportuno. Tuttavia in teorie più complicate (con 0-forme) è di solito più conveniente l'approccio di Bianchi. Nei prossimi capitoli seguiremo l'uno o l'altro (o entrambi in contemporanea) a seconda della maggiore comodità.

4.10 Supergravità e supertrasformazioni

In questo paragrafo vogliamo illustrare il significato fisico di tutta la costruzione sviluppata finora, mostrando come vengono viste le simmetrie del group manifold da un osservatore spaziotemporale. In particolare proveremo che esistono delle supertrasformazioni che scambiano bosoni e fermioni, cioè che il (super)group manifold approach dà luogo ad una teoria spaziotemporale supersimmetrica.

Come è noto dal capitolo 1 i diffeomorfismi sul group manifold inducono sulla teoria spaziotemporale che si ottiene restringendo le forme su G a forme su M delle trasformazioni (infinitesime)[13]

$$\delta_\varepsilon X_0 \equiv (\ell_\varepsilon\, X)|_0; \tag{4.98}$$

nel nostro caso tali trasformazioni si possono raggruppare in tre classi:

1. diffeomorfismi spaziotemporali indotti da $\varepsilon = t_{\tilde{a}}\varepsilon^{\tilde{a}} = t_\Gamma \mu^\Gamma_{\tilde{a}}\varepsilon^{\tilde{a}} \equiv t_\Gamma\varepsilon^\Gamma$; da $\ell_\varepsilon\mu = \nabla\varepsilon + i_\varepsilon\breve{\mu}$ si ottiene

$$\begin{cases} \delta_D\omega^{\mathcal{A}} = D\varepsilon^{\mathcal{A}} + c^{\mathcal{A}}_{bc}v^b\varepsilon^c + c^{\mathcal{A}}_{\alpha\beta}\psi^\alpha\varepsilon^\beta + i_\varepsilon\breve{R}^{\mathcal{A}} \\ \delta_D v^a = D\varepsilon^a - c^a_{\mathcal{B}c}\varepsilon^{\mathcal{B}}v^c + c^a_{\alpha\beta}\psi^\alpha\epsilon^\beta + i_\varepsilon\breve{T}^a \\ \delta_D\psi^\alpha = D\varepsilon^\alpha - c^\alpha_{\mathcal{B}C}\varepsilon^{\mathcal{B}}\omega^{\mathcal{C}} + c^\alpha_{b\gamma}v^b\varepsilon^\gamma - c^\alpha_{b\gamma}\varepsilon^b\psi^\gamma + i_\varepsilon\breve{\varrho}^\alpha; \end{cases} \tag{4.99}$$

2. trasformazioni di gauge (di Lorentz più le simmetrie interne associate alle teorie con $N > 1$) indotte da $\varepsilon = t_{\mathcal{A}}\varepsilon^{\mathcal{A}}$

$$\begin{cases} \delta_H\omega = D\varepsilon \\ \delta_H v = -\varepsilon v \\ \delta_H\psi = -\varepsilon\psi; \end{cases} \tag{4.100}$$

[13] $X = \frac{1}{k!}X_{\Gamma_1\cdots\Gamma_k}\mu^{\Gamma_1}\cdots\mu^{\Gamma_k}$ è una generica $k-$forma ottenuta come combinazione lineare delle 1-forme di base μ^Γ: basta conoscere il comportamento della derivata di Lie su tali 1-forme per conoscerlo su tutte. Il pedice 0 indica la restrizione allo spaziotempo.

3. supertrasformazioni indotte da $\varepsilon = t_\alpha \varepsilon^\alpha$

$$\begin{cases} \delta_S \omega^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}}_{\alpha\beta} \psi^\alpha \varepsilon^\beta + i_\varepsilon \breve{R}^A \\ \delta_S v^a = c^a_{\alpha\beta} \psi^\alpha \varepsilon^\beta + i_\varepsilon \breve{T}^a \\ \delta_S \psi^\alpha = D\varepsilon^\alpha + c^\alpha_{b\gamma} v^b \varepsilon^\gamma + i_\varepsilon \breve{\varrho}^\alpha . \end{cases} \tag{4.101}$$

In particolare per $\overline{Osp(4/1)}$ con i vincoli (4.92) le (4.99),(4.100),(4.101) si scrivono

$$1) \begin{cases} \delta_D \omega = \mathcal{D}\varepsilon + i_\varepsilon R \\ \delta_D v = \mathcal{D}\varepsilon - \varepsilon v + i\bar{\varepsilon}\Gamma\psi \\ \delta_D \psi = \mathcal{D}\varepsilon - \varepsilon\psi + i_\varepsilon \varrho \end{cases} \tag{4.102}$$

$$2) \begin{cases} \delta_L \omega = \mathcal{D}\varepsilon \\ \delta_L v = -\varepsilon v \\ \delta_L \psi = -\frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\Gamma_{ab}\psi \end{cases} \tag{4.103}$$

$$3) \begin{cases} \delta_S \omega = \bar{\theta}_c \varepsilon v^c \\ \delta_S v = i\bar{\varepsilon}\Gamma\psi \\ \delta_S \psi = \mathcal{D}\varepsilon . \end{cases} \tag{4.104}$$

Mentre le trasformazioni 1) e 2) non dicono nulla di nuovo rispetto alle teorie sul solo sottogruppo bosonico, le supertrasformazioni 3) hanno una conseguenza fondamentale: campi a spin diverso sono unificati e in particolare per $\overline{Osp(4/1)}$ il gravitone v e il gravitino ψ sono mandati uno nell'altro: è questa la caratteristica essenziale della supersimmetria (più precisamente qui si parla di supergravità perchè l'invarianza è locale, cioè gli ε^α sono funzioni del punto e non parametri rigidi). Lo scopo principale di questa tesi è lo studio delle teorie di supergravità nelle varie dimensioni e quindi è di importanza centrale uno studio delle supertrasformazioni 3). Vogliamo illustrare qualche loro peculiarità.

A) Le supertrasformazioni lasciano invariata l'azione spaziotemporale

$$I_0 = \int_{M_4} R^{ab}_0 v^c_0 v^d_0 \varepsilon_{abcd} + 4\bar{\varrho}_0 \Gamma_5 \Gamma_a \psi_0 v^a_0 . \tag{4.105}$$

che è la restrizione di (4.94). Per provarlo basta sfruttare la proprietà (si confronti con il paragrafo (1.11))

$$\delta I_0 = \int (\ell_\varepsilon \mathcal{L})_0 = 0 \text{ se } i_\varepsilon d\mathcal{L} = 0; \tag{4.106}$$

poichè

$$
\begin{aligned}
d\mathcal{L} &= \mathcal{D}(R^{ab}v^c v^d \varepsilon_{abcd} + 4\bar{\varrho}\Gamma_5\Gamma_d\psi v^d) \\
&= 2R^{ab}(R^c + \tfrac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^c\psi)v^d\varepsilon_{abcd} + \bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_d\Gamma_{ab}\psi v^d R^{ab} + 4\bar{\varrho}\Gamma_5\Gamma_d\varrho v^d - \\
&\quad 4\bar{\varrho}\Gamma_5\Gamma_d\psi(R^d + \tfrac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^d\psi) \qquad (4.107) \\
&= \text{ usando l'identità ciclica e la proprietà (4.87)} \\
&= 2R^{ab}R^c v^d\varepsilon_{abcd} + 4\bar{\varrho}\Gamma_5\Gamma_d\varrho v^d
\end{aligned}
$$

si ha, usando la forma esplicita della parametrizzazione esterna (4.92) (non serve usare il vincolo interno $R^a_{bc} = 0$)

$$i_\varepsilon d\mathcal{L} = (2\bar{\varepsilon}\theta^{ab}{}_c v^c v^d\varepsilon_{abcd} - 4\bar{\varepsilon}\Gamma_5\Gamma_f\varrho_{cd}v^c v^d)R^f = 0. \qquad (4.108)$$

B) Nel vuoto le supertrasformazioni

$$\ell_\varepsilon\ (\omega, v, \psi) = (0, i\bar{\varepsilon}\Gamma\psi, \mathcal{D}\varepsilon) \qquad (4.109)$$

stanno nella superalgebra G' di G (per definizione !); vi sono inoltre le gauge-rotazioni (trasformazioni di Lorentz)

$$\ell_\varepsilon\ (\omega, v, \psi) = (\mathcal{D}\varepsilon, -\varepsilon v, -\varepsilon\psi) \qquad (4.110)$$

e le gauge-traslazioni

$$\ell_\varepsilon\ (\omega, v, \psi) = (0, \mathcal{D}\varepsilon, 0) \qquad (4.111)$$

Il commutatore di due supertrasformazioni è una gauge-traslazione e si possono verificare direttamente le leggi di commutazione (4.34).

C) Quanto si è detto non vale in generale: il commutatore di supersimmetrie non è una gauge-traslazione e anzi apparentemente non chiude neppure la superalgebra soffice di Poincarè:[14]

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}] = \begin{array}{l} \delta_{[\varepsilon_1,\varepsilon_2]} + \text{ termini “antipatici”} \\ \text{lineari in } E^a = \varepsilon^{abcd}\Gamma_5\Gamma_b\mathcal{D}_c\psi_d \end{array} \qquad (4.112)$$

[14] Per la dimostrazione si veda per esempio [21] in cui il conto viene fatto nel formalismo del secondo ordine, cioè implementando $R^a = 0$ e considerando $\omega = \omega(v, \psi)$ come campo non fondamentale (in particolare la legge di supertrasformazione di ω si ottiene dalle leggi di v e ψ tramite la regola della catena

$$\delta\omega = \frac{\delta\omega}{\delta v}\delta v + \frac{\delta\omega}{\delta\psi}\delta\psi$$

ed è equivalente on-shell alla legge di trasformazione del primo ordine).

contrariamente a quanto ci si aspetterebbe; tuttavia questo risultato è molto meno drammatico di quanto potrebbe sembrare a prima vista, in quanto dobbiamo di nuovo ricordare che tutta la nostra interpretazione poggia sulla condizione di integrabilità del sistema (4.75) $d^2 = 0$ cioè sulla validità delle identità di Bianchi (ciò assicura l'equivalenza tra spaziotempo e superspazio): abbiamo visto che queste implicano le equazioni del moto (la supergravità semplice di Poincarè è una teoria on-shell) e quindi in particolare l'equazione del gravitino $E^d = 0$; dunque la chiusura sullo spazio delle soluzioni è assicurata:

$$[\ell_{t_\Delta}, \ell_{t_\Gamma}] = \ell_{[t_\Delta, t_\Gamma]} \quad \text{(on-shell)} \tag{4.113}$$

Non c'è invece chiusura sullo spazio delle configurazioni (off-shell) a differenza di quanto accade per le trasformazioni ordinarie. Vedremo in futuro come si possa evitare questa situazione (in certi casi).

4.11 Il group manifold approach in teorie estese

Nei paragrafi precedenti abbiamo provato (nell'esempio della supergravità semplice) che il group manifold approach è un buon metodo per ottenere teorie supersimmetriche (o meglio di supergravità). Deve però essere chiaro che quanto si è detto non è banalmente estendibile a un qualsiasi supergruppo decomponibile contenente il gruppo di Poincarè o De Sitter.

Consideriamo per esemplificare il caso $D = 4$ con gruppo $G = Osp(4/N)$; ci sono allora le 1-forme (v, ψ, ω, A) e le curvature $(\breve{T}, \breve{\varrho}, \breve{R}, \breve{F})$. Imponendo dei vincoli è possibile ridurre G allo spaziotempo quadridimensionale M; v si può allora pensare come base di M e ω come sua connessione, definite a meno di trasformazioni di gauge $SO(1,3)$; da un punto di vista fisico v è il gravitone che descrive il campo gravitazionale di M e ω è un campo ausiliario esprimibile in termini dei campi fisici; ψ e A invece sono interpretati come campi materiali accoppiata alla gravità.

Perchè sia possibile una interpretazione spaziotemporale supersimmetrica, è evidentemente necessario che il numero di gradi di libertà on-shell dei bosoni e dei fermioni concida. Si vede subito che questo avviene solo per $N = 1$ e $N = 2$:

D = 4, N = 1:	bosoni 2	fermioni 2×1
D = 4, N = 2:	bosoni $2 + 2 \times 1$	fermioni 2×2
D = 4, N = 3:	bosoni $2 + 2 \times 3$	fermioni 2×3
D = 4, N = N:	bosoni $2 + 2 \times N(N-1)/2$	fermioni $2 \times N$

Per $N > 2$ ci sono troppi bosoni e quindi il supergruppo da solo non basta a costruire la teoria supersimmetrica: ci vogliono dei fermioni aggiuntivi che complicano la situazione. In particolare per $N = 3$ basta introdurre uno spinore di Majorana λ; per $N = 4$ invece, occorrono 6 gradi fermionici aggiuntivi; siccome però si vuole rispettare l'invarianza per

$SO(4)$ si devono introdurre quattro spinori λ^i; ciò richiede l'introduzione anche di uno scalare complesso ϕ con due gradi bosonici[15]. Per $N > 4$ si devono introdurre molti più spinori e scalari aggiuntivi; gli spinori e gli scalari, che vanno interpretati come un $\sigma-$model su una opportuna varietà differenziabile, complicano la teoria; per questo motivo nel prossimo capitolo ci limiteremo a considerare solo i casi $N = 1$ ed $N = 2$; per lo stesso motivo consideremo inoltre solo i supergruppi $Osp(2/1, \mathcal{C})$ e $SU(2, 2/1)$ e non la loro N-estensione:

D = 3, N = 2: bosoni 0	fermioni 0×2
D = 5, N = 2: bosoni $5 + 3 \times 1$	fermioni 4×2

Dobbiamo inoltre osservare che non è possibile estendere la teoria ad ogni N o ad ogni D, per quanti campi aggiuntivi si inseriscano: per avere una teoria di campo locale interagente consistente è necessario che al massimo sia $D = 11, N = 1$ (oppure $D = 10, N = 2,\ D = 9, N = 2,\ D = 8, N = 2,\ D = 7, N = 4,\ D = 6, N = 8,\ D = 5, N = 8,\ D = 4, N = 8,\ D = 3, N = 16$)[16] e quindi ci sono forti limitazioni sui supergruppi (e le superalgebre) consentiti; inoltre in generale può capitare che un supergruppo apparentemente buono dia una teoria banale (cioè con il vuoto come unica soluzione). Tutti questi limiti quindi non consentono di considerare il group manifold approach come l'impostazione fondamentale o innegabilmente la più adatta all'elaborazione di teorie di supergravità (tant'è vero che sono diffusi in letteratura anche altri approcci): ciononostante si tratta di un metodo molto conveniente in alcuni casi e soprattutto con il pregio di dare un' interpretazione geometrica profonda e unificata a <u>tutte</u> le simmetrie della teoria.

[15] Si noti che queste considerazioni euristiche sono in perfetto accordo con i risultati forniti dalla teoria delle superalgebre e riportati in tabella (C.4)

[16] Il motivo sarà accennato nell'appendice C.

Capitolo 5

IL PRINCIPIO D'AZIONE REONOMICO

5.1 Introduzione

In questo capitolo daremo una trattazione generale della supergravità di De Sitter di cui illustreremo alcuni esempi in 3,4,5 dimensioni; ci limiteremo a teorie che ammettono una formulazione "pura" nel group manifold approach, cioè sono costruite direttamente su opportuni supergruppi e contengono solo le 1-forme della superalgebra di Lie soffice ad essi associata (come si è fatto per la gravità costruita su $SO(1, D-1, \tilde{e})$). Di tutte queste teorie costruiremo l'azione seguendo il cosiddetto principio d'azione reonomico.
La trattazione data in questo capitolo sarà estesa nei prossimi a supergravità più generali, contenenti 0-forme e k-forme.

5.2 Principi fondamentali

Come si è detto nel capitolo precedente dal punto di vista del group manifold approach lo studio della supergravità coincide con lo studio della geometria del supergruppo soffice di De Sitter (o di Poincarè): dare una teoria di supergravità vuol dire dare le equazioni cui soddisfano le 1-forme μ^Γ che descrivono G. Tali equazioni devono essere invarianti per trasformazioni di gauge [1] (eliminazione delle dimensioni di gauge) e per

[1] La forma esplicita delle trasformazioni di gauge è la seguente:

$$\begin{cases} \omega^a{}_b \longrightarrow \bar{\Lambda}^a{}_c \omega^c{}_d \Lambda^d{}_b + \bar{\Lambda}^a{}_c d\Lambda^c_b \\ A^i{}_j \longrightarrow \bar{\Lambda}^i{}_k A^k{}_l \Lambda^l{}_j + \bar{\Lambda}^i{}_k \Lambda^k{}_j \\ v^a \longrightarrow \bar{\Lambda}^a{}_b v^b \\ \psi^{\alpha i} \longrightarrow \bar{\Lambda}^\alpha{}_\beta \bar{\Lambda}^i{}_j \psi^{\beta j}. \end{cases} \tag{5.1}$$

supertrasformazioni[2] (eliminazione delle dimensioni fermioniche) di modo che G diventi equivalente allo spaziotempo ordinario M. La forma delle equazioni viene ulteriormente vincolata se si tiene conto che la teoria è descritta da curvature[3]

$$\begin{cases} \breve{R}^{aa'} = & R^{aa'} - \bar{e}^2 v^a v^{a'} + \bar{e}\frac{1}{2}\bar{\psi}^i c^{aa'}_{ij}\psi^j \\ \breve{F}^{ij} = & F^{ij} + \frac{1}{2}\bar{\psi}^k c^{ij}_{kl}\psi^l \\ \breve{T}^a = & \mathcal{D}v^a + \frac{1}{2}\bar{\psi}^i c^a_{ij}\psi^j \\ \breve{\varrho}^i = & D\psi^i + \bar{e}c^i_{bj}v^b\psi^j \end{cases} \tag{5.3}$$

invarianti per il riscalamento

$$\begin{cases} v \longrightarrow w^{+1}v \\ \omega \longrightarrow w^0\omega \\ e \longrightarrow w^{-1}e \\ A \longrightarrow w^{+1}A. \end{cases} \tag{5.4}$$

Si dice dunque che

- il gravitone v ha peso 1
- i gravitini ψ hanno peso 1/2
- la connessione ω ha peso 0
- i gluoni A hanno peso 1
- il parametro $\bar{e}$ ha peso -1.

Ricordiamo che $\bar{e}$ è legata alla costante cosmologica tramite la (1.173).

Tali invarianze insieme al fondamentale postulato di equivalenza tra spaziotempo e superspazio (principio di reonomia) stabilito in (4.7) e che riscriviamo

[2] Come si è detto nel capitolo 4 la forma esplicita delle supertrasformazioni è data dalla formula generale $\ell_\varepsilon\mu = \nabla\varepsilon + i_\varepsilon\breve{\mu}$ per $\varepsilon = (\varepsilon^{ab}, \varepsilon^a, \varepsilon^{\alpha i}, \varepsilon^{ij}) = (0, 0, \varepsilon^{\alpha i}, 0)$; dunque

$$\begin{cases} \delta_S\omega^{ab} = \bar{e}c^{ab}_{\alpha i\beta j}\psi^{\alpha i}\varepsilon^{\beta j} + i_\varepsilon\breve{R}^{ab} \\ \delta_S A^{ij} = c^{ij}_{\alpha k\beta l}\psi^{\alpha k}\varepsilon^{\beta l} + i_\varepsilon\breve{F}^{ij} \\ \delta_S v^a = c^a_{\alpha i\beta j}\psi^{\alpha i}\varepsilon^{\beta j} + i_\varepsilon\breve{T}^a \\ \delta_S\psi^{\alpha i} = D\varepsilon^{\alpha i} + \bar{e}c^{\alpha i}_{a\beta j}v^a\varepsilon^{\beta j} + i_\varepsilon\breve{\varrho}^{\alpha i}. \end{cases} \tag{5.2}$$

[3] I coefficienti $c^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ sono oggetti $H-$invarianti ($H = SO(1, D-1) \times H'$ con H' gruppo di gauge interno): sono quindi le matrici $\Gamma_{(k)}$ e oggetti costruiti con η_{ij} (per la forma esplicita si rimanda agli esempi (4.42), (4.49),(4.55)); ciò assicura il buon comportamento delle curvature per trasformazioni di gauge.

le componenti esterne delle curvature sono esprimibili come funzioni (combinazioni lineari) invarianti delle componenti interne:

$$\breve{\mu}^{\Gamma}_{\alpha i A} = K^{\Gamma ab}_{\alpha i A \Theta}\breve{\mu}^{\Theta}_{ab} \tag{5.5}$$

sono sufficienti a individuare completamente le equazioni del moto, come vedremo tra poco. L'idea che seguiremo sarà quella di costruire una lagrangiana invariante da cui dedurre le equazioni incognite: queste ultime daranno anche la forma esplicita della parametrizzazione (5.5).

Prima di portare a compimento questo programma, però, premettiamo un paragrafo tecnico che illustra alcune convenzioni e proprietà che saranno utili nel seguito.

5.3 Proprietà degli operatori di derivazione

Com'è noto in seguito alla regola di Leibniz un operatore di derivazione è completamente specificato quando è fissato il suo comportamento sulle 0-forme e su una base di 1-forme E^A[4]; a seconda del comportamento rispetto alle 0-forme le derivazioni si dicono algebriche

$$\tau f = 0 \quad (\tau \frac{1}{p!}\omega_{A_1 \cdots A_p} E^{A_1} \cdots E^{A_p} = \frac{1}{(p-1)!}\omega_{A_1 \cdots A_p} \tau(E^{A_1}) \cdots E^{A_p}) \tag{5.6}$$

o differenziali

$$\triangle f = \partial_A f dx^A; \tag{5.7}$$

a seconda del comportamento rispetto alla base E^A si dicono adattate ad essa

$$X E^A = 0 \quad (X(\frac{1}{p!}\omega_{A_1 \cdots A_p} E^{A_1} \cdots E^{A_p}) = \frac{1}{p!}(X\omega_{A_1 \cdots A_p}) E^{A_1} \cdots E^{A_p}) \tag{5.8}$$

oppure non adattate; esempi dei vari tipi di derivazioni sono

- la contrazione i_v (derivata algebrica);
- il differenziale d (derivata differenziale adattata alle basi coordinate);
- la derivata covariante $\mathcal{D}$ in una varietà riemanniana (derivata differenziale adattata ai vielbein, $\mathcal{D}v^a = 0$).

[4]D'ora in poi $E^A = (v^a,\ \psi^{\alpha i})$ indicherà la base del superspazio, cioè della porzione del group manifold a $x^A = 0$; questa è rappresentativa di tutto G in quanto le coordinate di gauge sono banali.

La derivata covariante nel superspazio si può spezzare in derivate dei tipi suddetti. Premettiamo però qualche osservazione.

Osservazione 1: fissata la base $E^A = (v^a, \psi^{\alpha i})$ ogni $n-$superforma ω si può decomporre in $n+1$ superforme di tipo (p,q)[5]:

$$\begin{aligned}\omega &= \tfrac{1}{n!}\omega_{A_1\cdots A_n}E^{A_1}\cdots E^{A_n}\\ &= \textstyle\sum_{p+q=n}\omega_{(p,q)}\\ &= \textstyle\sum_{p+q=n}\tfrac{1}{p!}\tfrac{1}{q!}\omega_{a_1\cdots a_p\alpha_1 i_1\cdots\alpha_q i_q}v^{a_1}\cdots v^{a_n}\psi^{\alpha_1 i_1}\cdots\psi^{\alpha_q i_q}\end{aligned} \tag{5.10}$$

dunque è importante studiare l'azione di D sulle superforme (p,q).

Osservazione 2: nella pratica le definizioni delle curvature (5.3) permettono di scrivere la derivata covariante come[6]

$$\begin{aligned}\mathcal{D}v^a &= \breve{T}^a - \tfrac{1}{2}\bar{\psi}^i c^a_{ij}\psi^j\\ &= \tfrac{1}{2}\breve{T}^a_{bc}v^b v^c + \breve{T}^a_{bk}v^b\psi^k + \tfrac{1}{2}\breve{T}^a_{ij}\bar{\psi}^i\psi^j - \tfrac{1}{2}\bar{\psi}^i c^a_{ij}\psi^j\\ D\psi^i &= \breve{\varrho}^i - \bar{e}c^i_{bj}v^b\psi^j\\ &= \tfrac{1}{2}\breve{\varrho}^i_{ab}v^a v^b + \breve{\varrho}^i_{aj}v^a\psi^j - \bar{e}c^i_{bj}v^b\psi^j + \tfrac{1}{2}\breve{\varrho}^i_{jk}\bar{\psi}^j\psi^k\end{aligned} \tag{5.11}$$

mentre sulle 0-forme

$$Df = \partial_a f v^a + \partial_i f\psi^i. \tag{5.12}$$

Da queste osservazioni si deduce che D si può decomporre in

$$\begin{array}{lll} D_{(1,0)} & \text{che manda } (p,q)-\text{forme in} & (p+1,q)-\text{forme}\\ D_{(0,1)} & & (p,q+1)\\ D_{(-1,2)} & & (p-1,q+2)\\ D_{(2,-1)} & & (p+2,q-1)\end{array} \tag{5.13}$$

[5] Per esempio le 2-forme di curvatura si scrivono

$$\breve{\mu} = \breve{\mu}_{(2,0)} + \breve{\mu}_{(1,1)} + \breve{\mu}_{(0,2)} = \frac{1}{2}\breve{\mu}_{ab}v^a v^b + \breve{\mu}_{a\alpha i}v^a\psi^{\alpha i} + \frac{1}{2}\breve{\mu}_{\alpha i\beta}j\psi^{\alpha i}\psi^{\beta j}; \tag{5.9}$$

(nella normalizzazione di [21] invece $\breve{\mu} = \breve{\mu}_{ab}v^a v^b + 2\breve{\mu}_{a\alpha i}v^a\psi^{\alpha i} + \breve{\mu}_{\alpha i\beta}j\psi^{\alpha i}\psi^{\beta j}$).

[6] Per alleggerire la notazione sottointendiamo gli indici greci.

con

$$\begin{array}{ll} D_{(1,0)} & (v,\psi) = (\frac{1}{2}\breve{T}_{bc}v^b v^c, (\varrho_{bj} - \bar{e}c_{bj})v^b\psi^j) \\ D_{(0,1)} & (v,\psi) = (\breve{T}_{bj}v^b\psi^j, \frac{1}{2}\breve{\varrho}_{jk}\bar{\psi}^j\psi^k) \\ D_{(-1,2)} & (v,\psi) = (\frac{1}{2}(\breve{T}_{jk} - c_{jk})\bar{\psi}^j\psi^k, 0) \\ D_{(2,-1)} & (v,\psi) = (0, \frac{1}{2}\breve{\varrho}_{ab}v^a v^b). \end{array} \tag{5.14}$$

Per fare un esempio concreto, nel caso di $\overline{Osp(4/1)}$ usando la parametrizzazione

$$R^a = 0, \quad \varrho_{(0,2)} = 0 \tag{5.15}$$

risulta

$$\begin{array}{l} D_{(1,0)}(v,\psi) = (0, \varrho_{(1,1)}) \\ D_{(0,1)}(v,\psi) = (0,0) \\ D_{(-1,2)}(v,\psi) = (\frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma\psi, 0) \\ D_{(2,-1)}(v,\psi) = (0, \varrho_{(2,0)}) \end{array} \tag{5.16}$$

In generale le derivazioni $D_{(2,-1)}$ e $D_{(-1,2)}$ sono algebriche, mentre le $D_{(1,0)}$ e $D_{(0,1)}$ sono differenziali e si possono decomporre come

$$\begin{cases} D_{(1,0)} = D_v + T_{(1,0)} \\ D_{(0,1)} = D_\psi + T_{(0,1)} \end{cases} \tag{5.17}$$

con D_v, D_ψ adattate alla base (v,ψ) e

$$\begin{cases} T_{(1,0)}(f,v,\psi) = (0, \breve{T}_{(2,0)}, \breve{\varrho}_{(1,1)} - \bar{e}c_{bj}v^v\psi^j) \\ T_{(0,1)}(f,v,\psi) = (0, \breve{T}_{(1,1)}, \breve{\varrho}_{(0,2)}). \end{cases} \tag{5.18}$$

La proprietà $d^2 = 0$ dà

$$\begin{cases} \text{tipo } (4,-2) \text{ peso } 3 & D^2_{(2,-1)} = 0 \\ \text{tipo } (3,-1) \text{ peso } \frac{5}{2} & \{D_{(2,-1)}, D_{(1,0)}\} = 0 \\ \text{tipo } (2,+0) \text{ peso } 2 & D^2_{(1,0)} + \{D_{(2,-1)}, D_{(0,1)}\} = 0 \\ \text{tipo } (+1,1) \text{ peso } \frac{3}{2} & \{D_{(0,1)}, D_{(1,0)}\} + \{D_{(2,-1)}, D_{(-1,2)}\} = 0 \\ \text{tipo } (+0,2) \text{ peso } 1 & D^2_{(0,1)} + \{D_{(-1,2)}, D_{(1,0)}\} = 0 \\ \text{tipo } (-1,3) \text{ peso } \frac{1}{2} & \{D_{(-1,2)}, D_{(0,1)}\} = 0 \\ \text{tipo } (-2,4) \text{ peso } 0 & D^2_{(-1,2)} = 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

La dimostrazione è ovvia si se raccolgono i termini dello stesso tipo; si noti che si è assegnato un peso ad ogni tipo:

$$\text{peso}(D_{(r,s)}) \equiv r + \frac{s}{2}. \tag{5.20}$$

La decomposizione (4.57) è utile per estrarre il contenuto delle equazioni del moto e/o delle identità di Bianchi; per esempio l' identità$-\varrho$ di $\overline{Osp(4/1)}$ con i vincoli (5.15) dà

$$\begin{array}{l} settore\ (0,3)\ D_{(-1,2)}\breve{\varrho}_{(1,1)} + \breve{R}_{(0,2)}\psi = 0 \\ settore\ (1,2)\ D_{(0,1)}\breve{\varrho}_{(1,1)} + D_{(-1,2)}\breve{\varrho}_{(2,0)} + \breve{R}_{(1,1)}\psi = 0 \\ settore\ (2,1)\ D_{(0,1)}\breve{\varrho}_{(2,0)} + D_{(1,0)}\breve{\varrho}_{(1,1)} + \breve{R}_{(2,0)}\psi = 0 \\ settore\ (3,0)\ D_{(1,0)}\breve{\varrho}_{(2,0)} = 0. \end{array} \tag{5.21}$$

Dopo questi preliminari torniamo ad affrontare il problema della determinazione delle equazioni delle supergravità ovvero della costruzione dell'azione reonomica.

5.4 Il punto di vista lagrangiano

Nel capitolo precedente si è visto come sia possibile ricavare le equazioni delle 1-forme di curvatura dalle identità di Bianchi, imponendo dei vincoli opportuni; il problema fondamentale è quindi quello della scelta dei vincoli (non banale per supergravità più complesse). Un notevole passo in avanti rispetto a questo problema è costituito dal principio d'azione reonomico, che permette di ricavare i vincoli e la parametrizzazione esterna (oltre alle equazioni del moto) variando un'azione opportuna. La bellezza del principio sta nel fatto che l'azione si può costruire a partire da pure considerazioni geometriche e di simmetria in maniera del tutto generale, in pratica senza alcuna arbitrarietà. Nel seguito illustreremo le regole che ne permettono la costruzione esplicita e le esemplificheremo nel caso semplice di $Osp(4/1)$. Generalizzazioni delle regole al caso di teorie con k-forme e 0-forme saranno viste nei prossimi capitoli.

La gravità ordinaria è costruita sul gruppo di Poincarè (o di De Sitter) seguendo le condizioni C1), C2), C3) stabilite nel paragrafo (1.12). Nel caso della supergravità esse si riscrivono come segue.

C1) Le curvature sono deducibili da un principio d'azione integrando una lagrangiana geometrica su una sottovarietà bosonica $D-$dimensionale senza bordo del supergruppo di Poincarè (o di De Sitter):

$$I(\mu) = \int_{M\subset G} \mathcal{L}(\mu, \breve{\mu}), \quad \mathcal{L} \text{ polinomiale in } \mu, \breve{\mu}. \tag{5.22}$$

C2) La lagrangiana è $H-$gauge invariante, scalare ed ha peso $D-2$. La gauge invarianza assicura la possibilità di ridurre G a G/H tramite la trasformazione di gauge (5.1); si noti che per consistenza le equazioni variazionali dovranno fornire i vincoli $\breve{\mu}^{\Gamma}_{\mathcal{A}\Delta} = 0$, cioè non dovranno contenere termini nudi in ω[7]. Termini nudi in ω possono comunque

[7] Sono termini del tipo $X_{\mathcal{A}}\omega^{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}X_{aa'}\omega^{aa'} + X_{\otimes}\omega^{\otimes}$.

essere presenti in $\mathcal{L}$, nel caso in cui H contenga un sottogruppo abeliano (tipicamente ci può essere un fattore $U(1)$) in quanto risulta

$$\delta_{gauge} \int (X_\otimes \omega^\otimes) = \int (X_\otimes d\varepsilon^\otimes) = \int (-1)^{D-1} dX_\otimes \varepsilon^\otimes = 0 \tag{5.23}$$

se X è gauge invariante e vale la condizione aggiuntiva $dX_\otimes = 0$.

C3) Devono esistere soluzioni ragionevoli, cioè la teoria dev'essere non banale e deve ammettere la soluzione di vuoto in cui tutte le curvature si annullano, dando luogo al superspazio rigido (4.6);

$$\frac{\delta I}{\delta \mu}|_{\breve{\mu}=0} = 0 \tag{5.24}$$

Poichè nella pratica I è della forma

$$I(\mu) = \int \Lambda(\mu) + \breve{\mu}^\Gamma \nu_\Gamma(\mu) + \breve{\mu}^\Gamma \breve{\mu}^\Delta \nu_{\Gamma\Delta}(\mu) \tag{5.25}$$

le condizioni (5.24) si scrivono[8]

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta \mu^\Gamma} + \nabla \nu_\Gamma|_{\breve{\mu}=0} = 0. \tag{5.26}$$

Il postulato (5.5) che abbiamo discusso in dettaglio nel primo paragrafo (le componenti esterne delle curvature devono essere esprimibili come combinazioni lineari invarianti delle componenti interne) assicura che la lagrangiana dipende in realtà solo dai campi interni μ^Γ_{ab} e che (come si è visto nel capitolo precedente)

C4) Le equazioni interne (settori $v \cdots v$) danno le equazioni del moto spaziotemporali mentre le equazioni esterne (settori rimanenti) danno la parametrizzazione delle componenti esterne delle curvature, detta parametrizzazione reonomica:

$$\begin{array}{lll} \frac{\delta I}{\delta \mu}|_{v\cdots v} = 0 & \Rightarrow & \breve{\mu}^\Gamma_{ab} = \breve{\mu}^\Gamma_{ab}(\mu_{ab}) \\ \frac{\delta I}{\delta \mu}|_{v\cdots \psi} = 0 & \Rightarrow & \breve{\mu}^\Gamma_{\alpha B} = \breve{\mu}^\Gamma_{\alpha B}(\mu_{ab}). \end{array} \tag{5.27}$$

(una "violazione"di questa regola nel caso $D = 6$ sarà discussa in futuro).

[8] Il metodo più rapido per ricavare l'espressione di $\nabla \nu_\Gamma = d\nu_\Gamma - (-1)^{D-2} \nu_\Delta \mu^\Delta{}_\Gamma$ è quello di sfruttare la conoscenza di ∇X^Γ (fornita dalle identità di Bianchi) e usare la definizione $\nabla(\nu_\Gamma X^\Gamma) = d(\nu_\Gamma X^\Gamma)$. Per un esempio concreto si veda [21] pag. 775.

Si deve fare un'osservazione importante: si è visto nel paragrafo (4.8) che l'ipotesi dei vincoli (5.5) è consistente solo se sono soddisfatte le identità di Bianchi; dal punto di vista lagrangiano, invece, non è necessario risolvere esplicitamente tali identità: infatti in tutte le teorie le identità di Bianchi risultano contenute nelle equazioni variazionali. Ciò significa che è possibile ricavare la parametrizzazione esterna variando l'azione, e che tale parametrizzazione è equivalente a quella che si ottiene dalle identità di Bianchi, cioè identica a meno di termini nulli on-shell.

Una volta che siano state determinate le parametrizzazioni esterne è possibile ricavare la forma esplicita delle supertrasformazioni fermioniche, come si è visto in (5.3); si deve allora richiedere la condizione

C5) L'azione è invariante per trasformazioni di supersimmetria, cioè

$$\delta_\varepsilon I = \int \ell_\varepsilon \mathcal{L} = \int i_\varepsilon d\mathcal{L}|_{parametrizzazione\ consistente} = 0 \tag{5.28}$$

In tutte le teorie che tratteremo (con un'avvertenza per la $D = 6$) la (5.28) sarà verificata usando la parametrizzazione reonomica o una equivalente ad essa. Ciò assicura che le equazioni dedotte da $\mathcal{L}$ siano invarianti per supersimmetria e quindi in sostanza che i campi siano equivalenti ai supercampi.

Le condizioni C1-C5 permettono di determinare tutti i coefficienti incogniti e quindi la forma esplicita della lagrangiana univocamente. Deve essere ben chiaro che non è possibile rilassare una qualunque delle condizioni C1-C5: esse non costituiscono un sistema di assiomi ma un insieme di condizioni di consistenza interna della teoria; eliminarne una significa non avere più soluzioni (o avere solo la soluzione banale in cui tutto è zero).

5.5 Supergravità D = 4, N = 1

In questo paragrafo vogliamo far vedere come funzionano effettivamente le regole date in precedenza nel caso fondamentale della supergravità $D = 4, N = 1$. Il gruppo su cui si costruisce la teoria è $Osp(4/1)$ con curvature [9], nelle convenzioni di [18],

$$\begin{cases} R^{ab} = d\omega^{ab} - \omega^a{}_c\omega^{cb} + \bar{e}^2 v^a v^b + \frac{1}{2}\bar{e}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ \varrho = d\psi - \frac{1}{4}\omega^{ab}\Gamma_{ab}\psi + \frac{i}{2}\bar{e}v^a\Gamma_a\psi. \end{cases} \tag{5.30}$$

[9]Da queste si ricavano le identità di Bianchi (e quindi la forma esplicita di ∇)

$$\begin{cases} \mathcal{D}R^{ab} + 2\bar{e}^2 v^{[a}R^{b]} + \bar{e}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\varrho = 0 \\ \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - i\bar{\psi}\Gamma^a\varrho = 0 \\ \mathcal{D}\varrho + \frac{i}{2}\bar{e}v^a\Gamma_a\varrho + \frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\psi - \frac{i}{2}\bar{e}R^a\Gamma_a\psi = 0. \end{cases} \tag{5.29}$$

Condizione C1: la lagrangiana è una 4-forma del tipo

$$I(\mu) = \int \Lambda(\mu) + \breve{\mu}^{\Gamma}\nu_{\Gamma}(\mu) + \breve{\mu}^{\Gamma}\breve{\mu}^{\Delta}\nu_{\Gamma\Delta}(\mu) \tag{5.31}$$

con Λ e ν_Γ combinazioni lineari a coefficienti costanti delle μ^Γ:

$$\Lambda = c_{\Gamma_1\cdots\Gamma_4}\mu_1^{\Gamma}\cdots\mu_4^{\Gamma}, \quad \nu_\Gamma = c_{\Gamma\Gamma_1\Gamma_2}\mu^{\Gamma_1}\mu^{\Gamma_2}. \tag{5.32}$$

Condizione C2: i termini della lagrangiana devono essere scalari e di peso 2; dunque vanno eliminati i termini quadratici nelle curvature e restano solo i seguenti termini lineari

$$R^{ab}v^c v^d\varepsilon_{abcd}, \quad \bar{\varrho}\Gamma_5\Gamma_a\psi v^a \tag{5.33}$$

e i seguenti di ordine zero:

$$\bar{e}^2 v^a v^b v^c v^d \varepsilon_{abcd}, \quad \bar{e}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi v^c v^d\varepsilon_{abcd}. \tag{5.34}$$

Dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \;& R^{ab}v^c v^d\varepsilon_{abcd} + a_1\bar{\varrho}\Gamma_5\Gamma_a\psi v^a + b_1\bar{e}^2 v^a v^b v^c v^d\varepsilon_{abcd} + \\ & b_2\bar{e}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi v^c v^d\varepsilon_{abcd}.\end{aligned} \tag{5.35}$$

Condizione C3: l'esistenza dello stato di vuoto fissa i tre coefficienti incogniti a_1, b_1, b_2 ; ciò si deduce dalle equazioni[10]

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta I}{\delta\omega}\right|_{\breve{\mu}=0} :\;& i\varepsilon_{abcd}\bar{\psi}\Gamma^c\psi v^d + \tfrac{1}{4}a_1\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_d\Gamma_{ab}\psi v^d = 0 \\ & \Rightarrow a_1 = 4; \\ \left.\frac{\delta I}{\delta v}\right|_{\breve{\mu}=0} :\;& 8\bar{e}^2\varepsilon_{abcd}v^a v^b v^c + i\bar{e}a_1\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_{ad}\psi v^a + 4\bar{e}^2 b_1\varepsilon_{abcd}v^a v^b v^c + \\ & 2b_1\bar{e}\varepsilon_{abcd}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi v^c = 0 \quad \Rightarrow b_1 = -2, b_2 = 1; \\ \left.\frac{\delta I}{\delta\bar{\psi}}\right|_{\breve{\mu}=0} :\;& 2\bar{e}\varepsilon_{abcd}\Gamma^{ab}\psi v^c v^d + 2b_2\bar{e}\varepsilon_{abcd}\Gamma^{ab}\psi v^c v^d = 0 \\ & \Rightarrow \text{compatibile con i risultati precedenti;}\end{aligned} \tag{5.36}$$

dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \;& R^{ab}v^c v^d\varepsilon_{abcd} + 4\bar{\varrho}\Gamma_5\Gamma_a\psi v^a - 2\bar{e}^2 v^a v^b v^c v^d\varepsilon_{abcd} - \\ & \bar{e}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi v^c v^d\varepsilon_{abcd}.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Abbiamo così determinato completamente $\mathcal{L}$ (e nel limite $\bar{e} \longrightarrow 0$ si ritrova la (4.94)). Vogliamo ora verificare che le condizioni C4) e C5) sono compatibili con le precedenti.[11]

[10] Nella soluzione delle equazioni è utile la formula di dualizzazione $\Gamma_{ab} = -\frac{i}{2}\varepsilon_{abcd}\Gamma_5\Gamma^{cd}$.

[11] La teoria $D = 4, N = 1$ è così semplice che le condizioni C4)-C5) entrano solo come condizioni di compatibilità; in generale invece, in teorie più complicate, tali condizioni sono indispensabili anche per la determinazione dei coefficienti.

Condizione C4: le equazioni del moto

$$\begin{cases} 2R^{ab}v^c\varepsilon_{abcd} + 4\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_d\varrho = 0 \\ R^a v^b v^c \varepsilon_{abcd} = 0 \\ 8\Gamma_5\Gamma_d\varrho v^d - 4\Gamma_5\Gamma_d\psi R^d = 0 \end{cases} \tag{5.38}$$

(per derivare le equazioni del moto conviene tener conto che si è già imposta la condizione di vuoto: ciò significa che si possono trascurare tutti termini di ordine zero, che devono cancellarsi tra loro per dare equazioni lineari nelle curvature) sono identiche alla (4.95); abbiamo già visto che si scompongono in equazioni interne (4.93) ed in equazioni esterne; queste ultime permettono di ricavare la parametrizzazione reonomica (4.92) e quindi la forma delle supertrasformazioni tramite la (5.2):

$$\ell_\varepsilon \begin{pmatrix} \omega^{ab} \\ v^a \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}\bar{\varepsilon}\Gamma^{ab}\psi + \bar{\varepsilon}\theta^{ab}{}_c v^c \\ -i\bar{\psi}\Gamma^a\varepsilon \\ \mathcal{D}\varepsilon + \frac{i}{2}\bar{e}v^a\Gamma_a\varepsilon. \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

Condizione C5: l'azione è invariante per supertrasformazioni.
Si procede come si è fatto nel paragrafo (4.9) per $\overline{Osp(4/1)}$.

Il metodo reonomico è generale e funziona anche in altri casi. Nel seguito illustreremo una teoria che si sviluppa in maniera molto simile alla precedente, la $D = 3, N = 2$; l'interesse di tale teoria è per lo più didattico (in tre dimensioni non esiste una vera e propria (super)gravità) ma è utile poichè mostra tecniche che si usano tipicamente in teorie più complesse (in particolare mostreremo anche come si possa dedurre la teoria per riduzione dimensionale dalla D=4,N=1).

5.6 Supergravità D = 3, N = 2

Nella prima parte di questo paragrafo costruiremo la supergravità in tre dimensioni direttamente dal supergruppo $Osp(2/1,\mathcal{C})$, che estende il gruppo di De Sitter in $D = 3$, analogamente a quanto si è fatto in quattro dimensioni per $Osp(4/1)$; nella seconda parte invece partiremo dal supergruppo $Osp(4/1)$ e dedurremo la teoria per riduzione dimensionale.

Consideriamo il primo metodo. Le curvature (rispetto alle (4.49) i segni di v e ω sono cambiati per adeguarci alle convenzioni di [21]) sono date da

$$\begin{cases} R^{ab} = d\omega^{ab} - \omega^{ac}\omega_c{}^b + \bar{e}^2 + \bar{e}(\bar{\psi}_1\Gamma^{ab}\psi_1 - \bar{\psi}_2\Gamma^{ab}\psi_2) \\ R^a = dv^a - \omega^a{}_b v^b - 2i\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_2 \\ \varrho_1 = d\psi_1 - \frac{1}{4}\Gamma^{ab}\omega_{ab}\psi_1 - \frac{i\bar{e}}{2}v^a\Gamma_a\psi_2 \\ \varrho_2 = d\psi_2 - \frac{1}{4}\Gamma^{ab}\omega_{ab}\psi_2 + \frac{i\bar{e}}{2}v^a\Gamma_a\psi_1 \end{cases} \tag{5.40}$$

Nella ricerca dei termini che possono comparire nella lagrangiana è opportuno osservare che le (5.40) sono invarianti per il cambio

$$(\bar{e}, \psi_1, \varrho_1) \longleftrightarrow (-\bar{e}, \psi_2, \varrho_2) \tag{5.41}$$

dunque possono comparire solo termini invarianti; per esempio

$$\begin{array}{ll} \bar{\varrho}_1\psi_1 + \bar{\varrho}_2\psi_2 & \text{è buono;} \\ \bar{e}(\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_1 + \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2) & \text{è cattivo.} \end{array} \tag{5.42}$$

A) Evidentemente non possono comparire termini quadratici nelle curvature, che sono 4-forme.

B) I termini lineari possibili sono

$$R^{ab}v^c\varepsilon_{abc}, \quad \bar{\varrho}_1\psi_1 + \bar{\varrho}_2\psi_2, \quad \bar{\varrho}_{(1}\psi_{2)} \tag{5.43}$$

C) I termini di ordine zero sono

$$\bar{e}^2 v^a v^b v^c \varepsilon_{abc}, \quad i\bar{e}(\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_1 - \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2)v_a \tag{5.44}$$

e quindi

$$\begin{aligned} I = \int \quad & R^{ab}v^c\varepsilon_{abc} + a_1(\bar{\varrho}_1\psi_1 + \bar{\varrho}_2\psi_2) + a_2\bar{\varrho}_{(1}\psi_{2)} + \\ & b_1\bar{e}^2v^av^bv^c\varepsilon_{abc} + ib_2\bar{e}(\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_1 - \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2)v_a \end{aligned} \tag{5.45}$$

D) L'imposizione dell'esistenza del vuoto porta alla determinazione di tutti i coefficienti[12]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta\omega}\Big|_{\breve{\mu}=0} : \quad & 2i\bar{\psi}_1\Gamma^c\psi_2\varepsilon_{abc} + \tfrac{a_1}{4}(\bar{\psi}_1\Gamma_{ab}\psi_1 + \bar{\psi}_2\Gamma_{ab}\psi_2) + \tfrac{a_2}{4}(\bar{\psi}_{(2}\Gamma_{ab}\psi_{1)}) = 0 \\ & \Rightarrow a_1 = 0, \ a_2 = -8, \quad \mathcal{L} = R^{ab}v^c\varepsilon_{abc} - 8\bar{\varrho}_{(1}\psi_{2)} + \\ & b_1\bar{e}^2v^av^bv^c\varepsilon_{abc} + ib_2\bar{e}(\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_1 - \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2) \end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta v}\Big|_{\breve{\mu}=0} : \quad & 2\bar{e}^2v^bv^c\varepsilon_{abc} + 4(\bar{\psi}_2(-\tfrac{i\bar{e}}{2}\Gamma_a)\psi_2 + \bar{\psi}_1(+\tfrac{i\bar{e}}{2}\Gamma_a)\psi_1) + 3b_1\bar{e}^2v^bv^c\varepsilon_{abc} \\ & + ib_2\bar{e}(\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_1 - \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2) \quad \Rightarrow b_1 = -\tfrac{2}{3}, \quad b_2 = -2, \\ & \mathcal{L} = R^{ab}v^c\varepsilon_{abc} - 8\bar{\varrho}_{(1}\psi_{2)} - \tfrac{2}{3}\bar{e}^2v^av^bv^c\varepsilon_{abc} - 2i\bar{e}(\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_1 - \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2) \end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta\bar{\psi}^1}\Big|_{\breve{\mu}=0} : \quad & 2\bar{e}\Gamma^{ab}\psi_1v^c\varepsilon_{abc} - 4i\bar{e}\Gamma^a\psi_1v_a = 4i\bar{e}\Gamma^c\psi_1v_c - 4i\bar{e}\Gamma^c\psi_1v_c = 0 \\ & \text{(relazione di compatibilità)} \end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta\bar{\psi}^2}\Big|_{\breve{\mu}=0} : \quad & -2\bar{e}\Gamma^{ab}\psi_2v^c\varepsilon_{abc} + 4i\bar{e}\Gamma^a\psi_2v_a = -4i\bar{e}\Gamma^c\psi_2v_c + 4i\bar{e}\Gamma^c\psi_2v_c = 0 \\ & \text{(come prima con lo scambio } \bar{e} \leftrightarrow -\bar{e}\text{).} \end{aligned} \tag{5.49}$$

[12] Nella soluzione delle equazioni è utile ricordare la formula di dualizzazione $\Gamma_{ab} = i\varepsilon_{abc}\Gamma^c$.

In conclusione la teoria è descritta dall'azione

$$\mathcal{L} = R^{ab} v^c \varepsilon_{abc} - 8\bar{\varrho}_{(1}\psi_{2)} - \frac{2}{3}\bar{e}^2 v^a v^b v^c \varepsilon_{abc} - 2i\bar{e}(\bar{\psi}_1 \Gamma^a \psi_1 - \bar{\psi}_2 \Gamma^a \psi_2) v_a \tag{5.50}$$

ed ha equazioni del moto

$$\begin{cases} R^c \varepsilon_{abc} = 0 \\ R^{ab} \varepsilon_{abc} = 0 \\ \varrho_{1,2} = 0. \end{cases} \tag{5.51}$$

E) Le equazioni del moto della supergravità in $D = 3$ sono banali, come avviene del resto anche per la gravità ordinaria; ciò significa che il vuoto costituisce l'unica soluzione e che la parametrizzazione reonomica si annulla on-shell. L'invarianza per supersimmetria è allora assicurata (anzi l'intero $G = Osp(2/1)$ è gruppo di gauge).

Consideriamo ora il secondo metodo per ottenere la $D = 3, N = 2$ pura: si riduce dimensionalmente la $D = 4, N = 1$ troncando i campi materiali.

$$v^{\underline{a}}_{\underline{\tilde{a}}} = \begin{pmatrix} v^a_{\tilde{a}} & A_a \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \psi^{\underline{\alpha}}_{\underline{\tilde{a}}} = \begin{pmatrix} \psi^{\alpha 1}_{\tilde{a}} \\ \lambda^{\alpha 1} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \psi^{\alpha 2}_{\tilde{a}} \\ \lambda^{\alpha 2} \end{pmatrix} \tag{5.52}$$

e cerchiamo soluzioni con $A = 0,\ \sigma = 0,\ \lambda_{1,2} = 0$. L'unico punto delicato è una scelta opportuna della relazione tra le matrici γ 4-dimensionali e le matrici Γ 3-dimensionali: noi abbiamo scelto

$$\gamma^a = \begin{pmatrix} \Gamma^a & \\ & -\Gamma^a \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \tag{5.53}$$

In tal modo risulta

$$\gamma^{ab} = \frac{1}{2}[\gamma^a, \gamma^b] = \begin{pmatrix} \Gamma^{ab} & \\ & \Gamma_{ab} \end{pmatrix}, \quad \gamma^{a3} = \frac{1}{2}[\gamma^a, \gamma^3] = \begin{pmatrix} & \Gamma^a \\ \Gamma^a & \end{pmatrix} \tag{5.54}$$

mentre gli spinori barrati si spezzano in

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0 = (\psi_1^+ \quad \psi_2^+) \begin{pmatrix} \Gamma^0 & \\ & -\Gamma^0 \end{pmatrix} = (\bar{\psi}_1, \quad -\bar{\psi}_2). \tag{5.55}$$

Come conseguenza delle precedenti convenzioni l'algebra di $Osp(4/1)$

$$\begin{cases} R^{\underline{ab}} = d\omega^{\underline{ab}} - \omega^{\underline{a}}{}_{\underline{c}}\omega^{\underline{cb}} + \bar{e}^2 v^{\underline{a}} v^{\underline{b}} + \frac{\bar{e}}{2}\bar{\psi}\Gamma^{\underline{ab}}\psi \\ R^{\underline{a}} = \mathcal{D}v^{\underline{a}} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^{\underline{a}}\psi \\ \varrho = \mathcal{D}\psi + \frac{i\bar{e}}{2} v^{\underline{a}}\Gamma_{\underline{a}}\psi \end{cases} \tag{5.56}$$

diventa

$$\begin{cases} R^{ab} = d\omega^{ab} - \omega^a{}_c\omega^{cb} + \bar{e}^2 v^a v^b + \frac{\bar{e}}{2}(\bar{\psi}_1\Gamma^{ab}\psi_1 - \bar{\psi}_2\Gamma^{ab}\psi_2) \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}(\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_1 + \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2) \\ \varrho_1 = \mathcal{D}\psi_1 + \frac{i\bar{e}}{2}v^a\Gamma_a\psi_1 \\ \varrho_2 = \mathcal{D}\psi_2 + \frac{i\bar{e}}{2}v^a\Gamma_a\psi_2 \end{cases} \tag{5.57}$$

(si noti che R^{a3} e R^3 sono identicamente nulli); l'invarianza (5.41) vale ancora; dunque i termini possibili nella lagrangiana sono gli stessi:

$$\begin{array}{l} R^{ab}v^c\varepsilon_{abc}, \quad a_1(\bar{\varrho}_1\psi_1 + \bar{\varrho}_2\psi_2), \quad a_2\varrho_{(1}\psi_{2)}, \quad b_1\bar{e}^2v^av^bv^c\varepsilon_{abc}, \\ ib_2(\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_1 - \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2)v_a. \end{array} \tag{5.58}$$

L'esistenza del vuoto dà

$$\begin{array}{ll} \frac{\delta I}{\delta\omega}\Big|_{\breve{\mu}=0}: & \frac{i}{2}(\bar{\psi}_1\Gamma^c\psi_1 + \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2)\varepsilon_{abc} + \frac{a_1}{4}(\bar{\psi}_1\Gamma_{ab}\psi_1 + \bar{\psi}_2\Gamma_{ab}\psi_2) + \frac{a_2}{4}\bar{\psi}_2\Gamma_{ab}\psi_1 \\ & \Rightarrow a_2 = 0,\ a_1 = 0, \quad \mathcal{L} = R^{ab}v^c\varepsilon_{abc} - 2(\varrho_1\psi_1 + \varrho_2\psi_2) + \\ & b_1\bar{e}^2v^av^bv^c\varepsilon_{abc} + ib_2(\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_1 - \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2)v_a. \end{array} \tag{5.59}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{\delta I}{\delta v}\Big|_{\breve{\mu}=0}: & 2\bar{e}^2v^bv^v\varepsilon_{abc} + 2(\bar{\psi}_1\frac{i\bar{e}}{2}\Gamma_a\psi_1 - \bar{\psi}_2\frac{1\bar{e}}{2}\psi_2) + 3b_1\bar{e}^2v^av^bv^c\varepsilon_{abc} + \\ & b_2i\bar{e}(\bar{\psi}_1\Gamma_a\psi_1\bar{\psi}_2\Gamma_a\psi_2) \Rightarrow b_1 = -\frac{2}{3},\ b_2 = -1, \\ & \mathcal{L} = R^{ab}v^c\varepsilon_{abc} - 2(\varrho_1\psi_1 + \varrho_2\psi_2) - \frac{2}{3}\bar{e}^2v^av^bv^c\varepsilon_{abc} - \\ & i_2(\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_1 - \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2)v_a. \end{array} \tag{5.60}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{\delta I}{\delta\psi^1}\Big|_{\breve{\mu}=0}: & \bar{e}\Gamma^{ab}\psi_1v^c\varepsilon_{abc} - 0 - 2i\bar{e}\Gamma^a\psi_1v_a = 2i\bar{e}\Gamma^c\psi_1v_c - 2i\bar{e}\Gamma^a\psi_1v_a \equiv 0 \\ & \Rightarrow \ \text{relazione di compatibilità} \\ \frac{\delta I}{\delta\psi^2}\Big|_{\breve{\mu}=0}: & \Rightarrow \text{relazione analoga} \end{array} \tag{5.61}$$

La lagrangiana

$$\mathcal{L} = R^{ab}v^c\varepsilon_{abc} - 2(\varrho_1\psi_1 + \varrho_2\psi_2) - \frac{2}{3}\bar{e}^2v^av^bv^c\varepsilon_{abc} - i\bar{e}(\bar{\psi}_1\Gamma^a\psi_1 - \bar{\psi}_2\Gamma^a\psi_2)v_a \tag{5.62}$$

è leggermente diversa dalla (5.50) ma dà le stesse equazioni del moto

$$\begin{cases} R^c\varepsilon_{abc} = 0 \\ R^{ab}\varepsilon_{abc} = 0 \\ \varrho_{1,2} = 0; \end{cases} \tag{5.63}$$

cambia però la definizione delle curvature.

Nota: troncando un gravitino nell'algebra (5.57) si ottiene la supergravità $D = 3,\ N = 1$ che viene ad avere curvature praticamente identiche alla $D = 4,\ N = 1$; è anche possibile generalizzare l'algebra a qualunque N definendo

$$\begin{cases} R^{ab} = d\omega^{ab} - \omega^a{}_c\omega^{cb} + \bar{e}^2v^av^b + \frac{1}{2}\bar{e}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ \varrho^i = \mathcal{D}\psi^i + \frac{i}{2}\bar{e}\Gamma^av_a\psi^i. \end{cases} \tag{5.64}$$

5.7 Supergravità D = 4, N = 2

Le teorie finora sviluppate ($D = 4, N = 1$ e $D = 3, N = 2$) sono particolarmente semplici e la loro trattazione non richiede particolari avvertenze. In questo paragrafo considereremo invece una teoria più complicata, costruita su $Osp(4/2)$, in cui la sottoalgebra di gauge H contiene oltre alle trasformazioni di Lorentz anche una simmetria $SO(2) \sim U(1)$ che associeremo al campo elettromagnetico[13].

Ciò rende necessaria l'introduzione di 0-forme ausiliarie f_{ab} che permettono di scrivere un termine cinetico del tipo

$$I_{KIN} = (R^{\otimes} f^{ab} - \frac{1}{12} f_{ef} f^{ef} v^a v^b) v^c v^d \varepsilon_{abcd} \tag{5.65}$$

in grado di fornire un'equazione di tipo Maxwell (si veda il capitolo 2) [14]. Vedremo che l'introduzione di tali 0-forme impone l'uso di C4) per determinare completamente tutti i coefficienti.

La teoria che vogliamo costruire è caratterizzata dalla seguente algebra soffice (seguiamo le convenzioni di [18] coll'unica differenza di non prendere $\bar{e}$ =1)[15]:

$$\begin{aligned}
&\bar{R}^{ab} = d\omega^{ab} - \omega^a{}_c \omega^{cb} + \bar{e}^2 v^a v^b + \tfrac{1}{2}\bar{e}\bar{\psi}_A \Gamma^{ab} \psi^A \\
&\varrho^A = d\psi^A - \tfrac{1}{4}\omega^{ab}\Gamma_{ab}\psi^A + \bar{e} A^A{}_B \psi^B + \tfrac{i}{2}\bar{e}\Gamma^a v_a \psi^A \\
&R^a = \mathcal{D} v^a - \tfrac{i}{2}\bar{\psi}^A \Gamma^a \psi_A \\
&R^{AB} = F^{AB} + \bar{\psi}^A \psi^B \quad (F^{AB} \equiv dA^{AB}).
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Cominciamo a studiare i possibili termini nella lagrangiana secondo le regole C1)-C5), trascurando inizialmente la presenza di termini nudi in A (in linea di principio possibili poichè $SO(2)$ è abeliano).

A) Termini quadratici nelle curvature.
L'unico termine rispettante l'invarianza di gauge e di scala è

$$R^{AB} R_{AB} \tag{5.67}$$

ma in tal caso si può scrivere[16]

$$\begin{aligned}
R^{AB} R_{AB} &= F^{AB} F_{AB} + 2F^{AB} \bar{\psi}_A \psi_B + \bar{\psi}^A \psi^B \bar{\psi}_A \psi_B \\
&\sim 2F^{AB} \bar{\psi}_A \psi_B + \bar{\psi}^A \psi^B \bar{\psi}_A \psi_B
\end{aligned} \tag{5.68}$$

[13] In tal modo il campo elettromagnetico A viene incluso nella gravità in maniera sostanzialmente differente dall'idea di Kaluza-Klein: lì i campi non gravitazionali venivano dalle dimensioni aggiuntive, qui dalla supersimmetria. Nelle teorie generali di supergravità in molte dimensioni lavorano entrambi i meccanismi.

[14] Si noti che qui usiamo le convenzioni e la normalizzazione di [18]; usando la normalizzazione del capitolo 2 il coefficiente $\frac{1}{12}$ andrebbe sostituito con $\frac{1}{24}$.

[15] A e B sono $SO(2)-$indici, cioè si alzano e abbassano con δ_{AB}.

[16] A meno della derivata totale $F^{AB} F_{AB} = d(A^{AB} F_{AB})$.

e quindi il termine (5.67) è riducibile a termini lineari e di ordine zero.

B) Termini lineari nelle curvature.
I termini possibili sono i seguenti:

$$R^{ab}v^c v^d \varepsilon_{abcd}, \quad R^{AB}\bar{\psi}_A \Gamma_5 \psi_B, \quad \bar{\varrho}^A \Gamma_5 \Gamma_a \psi_A v^a, \quad iR^a \bar{\psi} \times \Gamma_5 \Gamma_a \psi. \tag{5.69}$$

C) Termini di ordine zero.
Sono possibili [17]

$$\bar{e}^2 v^a v^b v^c v^d \varepsilon_{abcd}, \quad \bar{e}\bar{\psi}_A \Gamma^{ab} \psi^A v^c v^d \varepsilon_{abcd}, \quad \bar{\psi}_A \psi_B \bar{\psi}^A \psi^B \tag{5.70}$$

D) Non esistono termini nudi in A: infatti i termini possibili sono

$$XA = (a\bar{e}\bar{\psi} \times \Gamma_5 \Gamma_a \psi v^a + b\bar{\varrho} \times \Gamma_5 \psi)A \tag{5.71}$$

e per avere invarianza di gauge dovrebbe essere $dX = 0$; ma questo comporta $a, b = 0$.
In conclusione la lagrangiana è del tipo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \; & R^{ab}v^c v^d \varepsilon_{abcd} + a_1 i R^{AB}\bar{\psi}_A \Gamma_5 \psi_B + a_2 \bar{\varrho}^A \Gamma_5 \Gamma_a \psi_A v^a + a_4 i R^a \bar{\psi} \times \Gamma_5 \Gamma_a \psi \\ & + b_2 i \bar{e}^2 v^a v^b v^c v^d \varepsilon_{abcd} + b_3 e \bar{\psi}_A \Gamma^{ab} \psi^A v^c v^d \varepsilon_{abcd} + b_1 \bar{\psi}_A \psi_B \bar{\psi}^A \psi^B. \end{aligned} \tag{5.72}$$

E) A questo punto si impone l'esistenza della soluzione di vuoto e tutti i coefficienti vengono fissati (vedi [18]):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \; & R^{ab}v^c v^d \varepsilon_{abcd} + 4iR^{AB}\bar{\psi}_A \Gamma_5 \psi_B + 4\bar{\varrho}^A \Gamma_5 \Gamma_a \psi_A v^a - \tfrac{1}{2}\bar{e}^2 v^a v^b v^c v^d \varepsilon_{abcd} \\ & - \tfrac{1}{4} e \bar{\psi}_A \Gamma^{ab} \psi^A v^c v^d \varepsilon_{abcd} - 2i\bar{\psi}_A \psi_B \bar{\psi}^A \psi^B. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Si è così fissata univocamente l'azione, che però dà equazioni del moto

$$\begin{aligned} \delta_\omega I: \quad & 2R^c v^d \varepsilon_{abcd} = 0 \\ \delta_v I: \quad & 2R^{ab} v^c \varepsilon_{abcd} + 4\bar{\varrho}\Gamma_5 \Gamma_d \psi = 0 \\ \delta_A I: \quad & 8i\bar{\varrho}_{[A}\Gamma_5 \psi_{B]} = 0 \\ \delta_{\bar{\psi}_A} I: \quad & 8\Gamma_5 \Gamma_a \varrho v^a + 8i\Gamma_5 \psi_B R^{AB} - 4\Gamma_5 \Gamma_a \psi R^a = 0 \end{aligned} \tag{5.74}$$

banali: infatti la (5.74c) dà $\varrho = 0$ da cui, per la (5.74d), $R^{AB} = 0$; spariscono il campo elettromagnetico e il gravitino e si ottiene una teoria che descrive solo la gravità. Per evitare ciò si introduce il termine cinetico (5.65); in tal modo l'azione $I = I_0 + \gamma I_{KIN}$ dà le equazioni non banali

$$\begin{aligned} \delta_\omega I: \quad & 2R^c v^d \varepsilon_{abcd} = 0 \\ \delta_v I: \quad & 2R^{ab} v^c \varepsilon_{abcd} + 4\bar{\varrho}\Gamma_5 \Gamma_d \psi + 2\gamma f^{AB} R_{AB} v^c \varepsilon_{abcd} - \tfrac{\gamma}{3} f^{ab}_{AB} f^{AB}_{ab} v^a v^b v^c \varepsilon_{abcd} = 0 \\ \delta_A I: \quad & 8i\bar{\varrho}_{[A}\Gamma_5 \psi_{B]} + \gamma \varepsilon_{abcd} D(f^{ab}_{AB} v^c v^d) = 0 \\ \delta_{\bar{\psi}_A} I \quad & 8\Gamma_5 \Gamma_a \varrho v^a + 8i\Gamma_5 \psi_B R^{AB} - 4\Gamma_5 \Gamma_a \psi R^a + 2\gamma f^{ab}_{AB} v^c v^d \psi^B \varepsilon_{abcd} = 0 \end{aligned} \tag{5.75}$$

[17] Si tenga presente l'identità di Fierz $\frac{1}{2}\Gamma_5 \Gamma_a \psi_A \bar{\psi}_B \Gamma^a \psi_B = -\Gamma_5 \psi_B \bar{\psi}_A \psi_B + \psi_B \bar{\psi}_A \Gamma_5 \psi_B$.

F) A questo punto si è introdotto un nuovo coefficiente γ che può essere eliminato imponendo C4),cioè risolvendo le equazioni variazionali nei settori esterni; si trova

$$\gamma = 2. \tag{5.76}$$

Si può verificare che la parametrizzazione ottenuta dalle equazioni variazionali (on-shell equivalente a quella di Bianchi) soddisfa la condizione C5). La forma esplicita delle supertrasformazioni è data dalla (5.2) e si può trovare in [18], dove sono riportate anche le equazioni del moto spaziotemporali.

Nota: l'estensione della teoria a $N > 2$ non è banale in quanto è necessario introdurre delle 0-forme fisiche e la lagrangiana diventa assai più complicata contenendo molti altri termini oltre a quelli presenti in (5.73). Le teorie con 0-forme saranno trattate nel capitolo 7. Ora invece preferiamo dedicarci ad una teoria fortemente geometrica, cioè priva di 0-forme (cinetiche): tali teorie sono particolarmente eleganti ma non sono affatto generali: in pratica sono di questo tipo solo la $D = 4$, $N = 1$, la $D = 5$, $N = 2$, la $D = 6$, $N = 2$ e le teorie in $D = 3$.

5.8 Cenni sulla supergravità D = 5, N = 2

In questo paragrafo vogliamo dare qualche cenno sulla trattazione della $D = 5$, $N = 2$ che presenta diverse caratteristiche interessanti (in particolare ha varie proprietà in comune con la $D = 6$, $N = 2$, tra cui la presenza di una torsione non nulla); per una trattazione completa e dettagliata rimandiamo a [21] cap. III.5 di cui seguiamo le convenzioni (equivalenti a quelle del capitolo 4 a meno di qualche coefficiente). In particolare con ψ indichiamo una coppia di spinori di Majorana simplettici ψ^A; con $\psi\Gamma_{(k)}\psi$ indichiamo il prodotto $\bar\psi^A\Gamma_{(k)}\psi_A$, con $\bar\psi \times \Gamma_{(k)}\psi$ il prodotto $\bar\psi^A\Gamma_{(k)}\psi^B\varepsilon_{AB}$.

La supergravità in cinque dimensioni è descritta dalle $SU(2,2/1)-$curvature [18]

$$\begin{cases} R^{ab} = d\omega^{ab} - \omega^a{}_c\omega^{cb} + 4\bar e^2 v^a v^b + i\bar e\bar\psi \times \Gamma^{ab}\psi \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar\psi\Gamma^a\psi \\ \varrho^A = D\psi^A - \bar e v^a\Gamma_a\varepsilon^{AB}\psi_B \\ R^\otimes = dB - i\bar\psi\psi. \end{cases} \tag{5.78}$$

[18]Da queste si ottengono le identità di Bianchi

$$\begin{cases} \mathcal{D}R^{ab} + 8\bar e^2 v^{[a}R^{b]} + 2i\bar e\bar\psi \times \Gamma^{ab}\varrho = 0 \\ \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - i\bar\psi\Gamma^a\varrho = 0 \\ D\varrho^A - \bar e v^a\Gamma_a\varepsilon^{AB}\varrho_B + \frac{1}{4}\Gamma_{ab}R^{ab}\psi^A - \bar e\Gamma_a R^a\varepsilon^{AB}\psi_B + \frac{3}{2}\bar e R^\otimes\varepsilon^{AB}\psi_B = 0 \\ dR^\otimes - 2i\bar\psi\varrho = 0. \end{cases} \tag{5.77}$$

La determinazione della teoria dal punto di vista lagrangiano segue i soliti principi C1)-C5) ma presenta alcune differenze dal caso D=4,N=2:

i) esiste un termine quadratico nelle curvature accettabile[19] (5-forma invariante di peso 3)

$$\eta R^a v_a R^{\otimes}; \tag{5.79}$$

questo solo fatto assicura che il coefficiente η non può essere determinato dalla condizione di vuoto, come invece avviene per tutti gli altri:

$$\mathcal{L} \sim \breve{\mu}\breve{\mu}\mu \quad \Rightarrow \quad \delta\mathcal{L}|_{\breve{\mu}=0} = (2\nabla\delta\mu\breve{\mu}\mu + \breve{\mu}\breve{\mu}\delta\mu)|_{\breve{\mu}=0} \equiv 0. \tag{5.80}$$

ii) a meno di derivate totali è possibile solo il seguente termine nudo in B:

$$XB = \gamma(\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi + 2iR^{\otimes}\bar{\psi}\psi + R^{\otimes}R^{\otimes})B, \quad dX = 0 \tag{5.81}$$

iii) se si cercano anche tutti i possibili termini lineari e di ordine zero e si impone la condizione di vuoto si ottiene una lagrangiana totale della forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \quad & -\tfrac{8}{15}\bar{e}^2\varepsilon_{abcde}v^a v^b v^c v^d v^e - \tfrac{i}{3}\bar{e}\bar{\psi}\times\Gamma^{ab}\psi\varepsilon_{abcde}v^c v^d v^e + \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\Gamma_a\psi v^a \\ & +\tfrac{1}{4}\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi B + \tfrac{1}{3}R^{ab}v^c v^d v^e\varepsilon_{abcde} + iR^a v_a\bar{\psi}\psi - \tfrac{i}{2}R^{\otimes}\bar{\psi}\psi B + \\ & 2i\bar{\varrho}\Gamma_{ab}\psi v^a v^b - \tfrac{1}{4}R^{\otimes}R^{\otimes}B + \eta R^a v_a R^{\otimes}.\end{aligned} \tag{5.82}$$

Le equazioni esterne fissano l'unico coefficiente incognito[20] η, come è mostrato esplicitamente in [21]; a differenza che in tutte le teorie incontrate finora, però, η non è determinato univocamente ma può assumere i valori ± 1: si potrebbe allora pensare di avere non una ma due teorie diverse per la supergravità in cinque dimensioni. In realtà invece le due teorie sono equivalenti e il principio reonomico continua in

[19] Questo è tipico delle teorie in dimensione grande.

[20] E quindi la parametrizzazione reonomica ovvero le leggi di trasformazione per supersimmetria; esse sono date esplicitamente in [21] ma è chiaro da considerazione dimensionali e di invarianza che dovranno essere del tipo

$$\begin{cases} \ell_\varepsilon\omega = \bar{e}^2\bar{\psi}\Gamma\varepsilon + \bar{\theta}_c(\varrho_{ab})\varepsilon v^c + \bar{\psi}K(F_{ab})\varepsilon \\ \ell_\varepsilon v = -i\bar{\psi}\Gamma\varepsilon \\ \ell_\varepsilon\psi^A = D\varepsilon^A + \bar{e}\Gamma^a v_a\varepsilon^{AB}\varepsilon_B + H_c^{AB}(F_{ab})v^c\varepsilon_B \\ \ell_\varepsilon A = \bar{\psi}\varepsilon \end{cases} \tag{5.83}$$

sostanza a dare risultati univoci. Ciò si vede passando al formalismo del secondo ordine, cioè implementando l' equazione della torsione[21]

$$R^a = -\frac{1}{4}\eta\varepsilon^{abcde}F_{de}v_b v_c \tag{5.84}$$

(F_{ed} sono le componenti interne della curvatura $R^\otimes$, $R^\otimes = F_{de}v^d v^e$): si può verificare che l'azione ristretta allo spazio ordinario non dipende più da η ([21]).

iv) Ci interessa di più, invece, prendere in considerazione una catteristica nuova della teoria $D = 5$: la presenza di una torsione non nulla permette di avere un'equazione differenziale e non algebrica per F in quanto dalla (5.84) segue

$$\omega^{ab}_{\tilde{c}} = \omega^{ab}_{\tilde{c}}(v^a_{\tilde{a}}, \partial_{[\tilde{b}}v^a_{\tilde{c}]}, \psi^\alpha_{\tilde{a}}, F_{ab}) \tag{5.85}$$

e quindi le derivate di F si trovano nel termine col tensore di Riemann [22]. Un meccanismo simile funziona anche in $D = 6, N = 2$[23]: la presenza di una torsione non nulla evita l'introduzione delle 0-forme cinetiche (che non sono più necessarie per dare equazioni del moto non banali) e la teoria è fortemente geometrica.

v) la supergravità 5-dimensionale (come tutte le teorie con $D > 4$) ha senso fisico solo se permette una compattificazione opportuna: ciò da luogo in generale ad una teoria 4-dimensionale accoppiata: nel nostro caso si ottiene la $D = 4, N = 2$ con un multipletto vettoriale. Infatti il gravitone 5-dimensionale con 5 gradi di libertà da luogo a un gravitone 4-dimensionale con 2 gradi di libertà e a un vettore e uno scalare (2+1 gradi bosonici); il vettore 5-dimensionale a sua volta si scompone in un altro vettore e altro scalare 4-dimensionali (3 = 2 +1 gradi di libertà bosonici); il

[21] Si ricava immediatamente dall'azione sfruttando

$$\delta_\omega I = \varepsilon_{abcde}R^c v^d v^e + R^\otimes v_a v_b = 0.$$

[22] Se invece fosse $R^a = 0$ la componente $v \cdots v$ dell'equazione

$$\delta_B I = \eta R^{ab}v_a v_b - \frac{i}{2}(3-\eta)R^a\bar{\psi}\Gamma_a\psi + \frac{3}{2}iR^\otimes\bar{\psi}\psi + i(3+\eta)\bar{\varrho}\Gamma_a\psi v^a + \eta R^a R_a + \frac{1}{4}R^\otimes R^\otimes = 0.$$

darebbe

$$(\eta R_{abcd}(v,\psi) + \frac{3}{4}F_{ab}F_{cd})\varepsilon^{abcde} = 0 \tag{5.86}$$

che non contiene le derivate di F.

[23] Però non in generale.

gravitino 5-dimensionale con 8 gradi di libertà dà luogo invece a due gravitini e due spinori 4-dimensionali, ciascuno con 2 gradi di libertà fermionici:

$$\underset{5}{v \rightarrow \begin{pmatrix} v & A_1 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}} \quad \underset{4+4}{\psi^A \rightarrow \begin{pmatrix} \psi^A \\ \lambda^A \end{pmatrix}} \quad \underset{3}{A \rightarrow \begin{pmatrix} A \\ \sigma_2 \end{pmatrix}}. \tag{5.87}$$

In conclusione i campi si possono riordinare come segue

$$(v^{\underline{2}}, \psi^{\underline{4}}_{A}, A^{\underline{2}}) \oplus (A^{\underline{2}}_{1}, \lambda^{\underline{4}}_{A}, (\sigma_1 + i\sigma_2)^{\underline{2}}) \tag{5.88}$$

e generano come preannunciato la supergravità $D = 4, N = 2$ accoppiata con un multipletto vettore. Per questo motivo si dice spesso che la $D = 5, N = 2$ è la progenitrice della $D = 4, N = 2$.

Capitolo 6

SUPERGRAVITÀ CON K-FORME

6.1 Introduzione

In questo capitolo vedremo come si possa estendere il group manifold approach dalle algebre di Lie alle algebre differenziali libere (Free Differential Algebra, FDA) onde poter trattare le teorie in cui compaiono $k-$forme ($k > 1$); si noti che sono di questo tipo tutte le teorie di supergravità in dimensione maggiore di cinque. Per costruire il multipletto del gravitone di tali teorie useremo considerazione euristiche sul conto dei gradi di libertà e procederemo per riduzione dimensionale. Per una deduzione più rigorosa rimandiamo all'appendice C.

6.2 Considerazioni euristiche sulla supersimmetria

Come abbiamo detto nel capitolo 4 in generale un supermultipletto è un insieme di campi a spin diversi con delle trasformazioni che unificano la componente bosonica e la componente fermionica; evidentemente affinchè tali supertrasformazioni siano ben definite (invertibili) è essenziale che il numero di gradi di libertà fisici della componente bosonica e della componente fermionica coincidano; dunque è indispensabile avere una tabella che dia il numero di gradi di libertà on-shell dei vari campi; la riportiamo qui di seguito. I campi scalari reali hanno sempre un grado di libertà.

Gradi di libertà on-shell in diverse dimensioni

Dimensione	Gravitone	Gravitini	3-forme	2-forme	Vettori	Spinori
D = 3	0	0		0	1	1
D = 4	2	2	0	1	2	2
D = 5	5	4 + 4	1	3	3	2 + 2
D = 6	9	6 + 6	4	3	4	2 + 2
D = 7	14	16 + 16	10	10	5	4 + 4
D = 8	20	40	20	20	6	8
D = 9	27	48	35	21	7	8
D = 10	35	56	56	28	8	8
D = 11	44	128	84	36	9	16

Usando questa tabella è possibile capire come devono essere costituiti i supermultipletti. Per esempio in 11 dimensioni il gravitone ha 44 gradi di libertà e il gravitino ne ha 128; per saturare gli 84 gradi di libertà fermionici è necessario introdurre nel multipletto del gravitone una 3-forma A. Un altro esempio semplice avviene in 6 dimensioni in cui i 12 gradi di libertà del gravitino vengono saturati dal gravitone (9 gradi di libertà) e da una 2-forma con curvatura autoduale (3 gradi di libertà). Nulla però assicura, a rigore, che questi accoppiamenti formino effettivamente dei supermultipletti, fino a che non sono assegnate le leggi di supertrasformazione; la determinazione di tali leggi, come pure delle equazioni del moto dei vari campi, è compito della supergravità.

Nota: come si è accennato in certi casi è possibile aggiungere ad un supermultipletto on-shell dei campi ausiliari e aggiustare le regole di supertrasformazione in maniera tale da formare un'algebra chiusa indipendentemente dalla validità delle equazioni del moto. In tal caso si parla di supermultipletti off-shell. Per avere delle informazioni sul numero di campi ausiliari richiesti è indispensabile un conteggio dei gradi di libertà off-shell. Per esempio il multipletto del gravitone in $D = 4$ contiene troppo pochi gradi di libertà bosonici (6 + 12); bisogna aggiungere quindi altri 6 gradi bosonici, inserendo 4 campi scalari e un campo complesso. Parleremo più in dettaglio delle teorie off-shell nel prossimo capitolo. Qui ci accontentiamo di riportare una tabella coi gradi di libertà off-shell.

Gradi di libertà off-shell in diverse dimensioni

Dimensione	Gravitone	Gravitini	3-forme	2-forme	Vettori	Spinori
D = 3	3	4		1	2	2
D = 4	6	12	1	3	3	4
D = 5	10	16 + 16	4	6	4	4 + 4
D = 6	15	20 + 20	10	10	5	4 + 4
D = 7	21	40 + 40	20	15	6	8 + 8
D = 8	28	112	35	21	7	16
D = 9	36	128	56	28	8	16
D = 10	45	144	84	36	9	16
D = 11	55	320	120	45	10	32

6.3 Supergravità in D=10,9,8,7

In questo paragrafo vediamo come si possano ottenere il supermultipletto del gravitone in dimensione minore di undici colla tecnica della riduzione dimensionale.
Come primo esempio otteniamo la supergravità in 10 dimensioni dalla

$$D = 11: \text{ multipletto } (v, \psi, A), \text{ pesi } (1, 1/2, 3)$$

.

Procendo come nel paragrafo (5.8) si ottiene la $D = 10, N = 2$ non chirale[1]

$$\begin{array}{ccc} v \to \begin{pmatrix} v & A_1 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} & \psi \to \begin{pmatrix} \psi^\pm \\ \chi^\pm \end{pmatrix} & A \to \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\ 44 & 128 & 84 \\ & \Downarrow & \end{array} \tag{6.1}$$

$$(v^{\underline{35}}, \psi_{\pm}^{\underline{56+56}}, A^{\underline{56}}, B^{\underline{28}}, A_{\underline{1}}^{\underline{8}}, \chi_{\pm}^{\underline{8+8}}, \sigma_{\underline{1}}^{\underline{1}}) \tag{6.2}$$

Troncando A, A_1 e ψ^-, χ^+ si ottiene la $D = 10, N = 1$ chirale:

$$D = 10, N = 1 : (v, \psi^+, B, \chi^-, \sigma) \text{ pesi } (1, 1/2, 2, -1/2, 0); \tag{6.3}$$

il gravitone v contiene 35 gradi di libertà, il gravitino ψ 56 gradi di libertà (è descritto da uno spinore di Majorana-Weyl); la 2-forma (assione o gravifotone) B 28 gradi di libertà; considerando anche la coppia dilatone-dilatino σ e λ a spin 0 e 1/2 (1 + 8 gradi di libertà) si arriva al pareggio (64 + 64).

[1] $\psi^\pm$ e $\lambda^\pm$ soddisfano $\Gamma_{11}\psi^\pm = \pm\psi^\pm$, $\Gamma_{11}\lambda^\pm = \pm\lambda^\pm$.

Il multipletto del gravitone in $D = 9$ si ottiene ancora per riduzione dimensionale:

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{pmatrix} v & A_1 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \psi \\ \lambda \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B \\ A_2 \end{pmatrix} & \chi & \sigma \\
35 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
 & \Downarrow & & &
\end{array}
\tag{6.4}
$$

$$
(v^{\underline{27}}, \psi^{\underline{48}}, A^{\underline{7}}, B^{\underline{21}}, \chi^{\underline{8}}, \sigma^{\underline{1}}) \oplus (A^{\frac{7}{2}}, \lambda^{\underline{8}}, \sigma^{\underline{1}}); \tag{6.5}
$$

dunque la $D = 10$ è equivalente ad una $D = 9$ accoppiata con un multipletto vettore.

$$
D = 9, N = 1 : (v, \psi, A, B, \chi, \sigma) \text{ pesi } (1, 1/2, 1, 2, -1/2, 0) \tag{6.6}
$$

Il gravitone ha 27 gradi di libertà, il gravitino 48, il campo vettoriale 7, la 2-forma 21, dilatone e dilatino 1 e 8; in totale il bilancio è 56 + 56.

Il multipletto del gravitone in $D = 8$ si ottiene riducendo la $D = 9$ pura:

$$
\begin{array}{cccccc}
\begin{pmatrix} v & A_1 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \psi \\ \lambda \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B \\ A_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A \\ \sigma_2 \end{pmatrix} & \chi & \sigma \\
27 & 48 & 21 & 7 & 8 & 1 \\
 & & \Downarrow & & &
\end{array}
\tag{6.7}
$$

$$
(v^{\underline{20}}, \psi^{\underline{40}}, (A + iA_1)^{\underline{6+6}}, B^{\underline{15}}, \chi^{\underline{8}}, \sigma^{\underline{1}}) \oplus (A^{\frac{6}{2}}, \lambda^{\underline{8}}, (\sigma_1 + i\sigma_2)^{\underline{2}}) \tag{6.8}
$$

dunque la $D = 9$ è equivalente ad una $D = 8$ accoppiata con un multipletto vettore.

$$
D = 8, N = 1 : (v, \psi, A, B, \chi, \sigma) \text{ pesi } (1, 1/2, 1, 2, -1/2, 0); \tag{6.9}
$$

il gravitone ha 20 gradi di libertà, il gravitino 40, i campi vettoriali 6×2, la 2-forma 15, dilatone e dilatino 1 e 8; in totale il bilancio è 48 + 48.

Infine la supergravità in $D = 7$ si ottiene dalla $D = 8$ nel modo seguente:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\begin{pmatrix} v & A_2 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \psi \\ \lambda \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B \\ A_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A \\ \sigma_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} & \chi & \sigma \\
20 & 40 & 15 & 6 & 6 & 8 & 1 \\
 & & \Downarrow & & & &
\end{array}
\tag{6.10}
$$

$$
(v^{\underline{14}}, \psi^{\underline{32}}, (A, A_1, A_2)^{\underline{5\times 3}}, B^{\underline{10}}, \chi^{\underline{8}}, \sigma^{\underline{1}}) \oplus (A^{\frac{5}{3}}, \lambda^{\underline{8}}, (\sigma, \sigma_1, \sigma_2)^{\underline{3}}) \tag{6.11}
$$

dunque la $D = 8$ è equivalente ad una $D = 7$ accoppiata con un multipletto vettore.

$$
D = 7, N = 2 : (v, \psi, A^i, B, \chi, \sigma) \text{ pesi } (1, 1/2, 1, 2, -1/2, 0) \tag{6.12}
$$

Il gravitone ha 14 gradi di libertà, i gravitini 16×2, il campi vettoriali 5×3, la 2-forma 10, dilatone e dilatino 1 + il bilancio è 40 + 40.

Tutte le teorie appena illustrate contengono campi scalari (il dilatone σ) e quindi la loro trattazione viene rimandata al prossimo capitolo; qui ci limitiamo a trattare teorie contenenti solo $k-$forme ($k > 0$. Per costruirle esplicitamente è necessario introdurre il concetto di algebra differenziale libera. Noi ne daremo una trattazione semplificata e adattata alle applicazioni fisiche; per una trattazione più generale rimandiamo alla bibliografia ([21] capitolo III.6).

6.4 Algebre differenziali libere

Si dice FDA il sistema di equazioni differenziali su $k-$forme ($k > 0$)

$$d\mu^{\Lambda} = \Omega^{\Lambda}(\mu) \tag{6.13}$$

con Ω^{Λ} polinomiale a coefficienti costanti nelle μ^{Λ} e soddisfacente

$$d\Omega^{\Lambda} = 0, \quad \Omega^{\Lambda} \neq d\tilde{\Omega}^{\Lambda}. \tag{6.14}$$

La (6.14a) è la condizione di integrabilità del sistema ($d^2 = 0$) e assicura che localmente la (6.13) si possa scrivere; la (6.14b) è una condizione di non banalità e indica che Ω^{Λ} non è globalmente esatto (altrimenti sarebbe $\tilde{\Omega}^{\Lambda} = \mu^{\Lambda} + d\nu^{\Lambda}$). Si noti che un'algebra di Lie è un caso particolare di FDA in cui le forme hanno tutte grado 1 e

$$\Omega^{\Gamma} = -\frac{1}{2} c^{\Gamma}_{\Delta\Theta} \mu^{\Delta} \mu^{\Theta}. \tag{6.15}$$

Le FDA generali si ottengono come estensioni delle algebre di Lie; per i nostri scopi poi partiremo sempre da superalgebre G con una sottoalgebra H; dunque avremo a che fare con FDA μ^{Λ} contenenti un'algebra di Lie di 1-forme μ^{Γ} contenente a sua volta una sottoalgebra $\mu^{\mathcal{A}}$[2].

Diamo ora qualche definizione. Si dice cocatena di Chevalley una combinazione lineare dei μ^{Γ} $H-$invariante

$$\Omega = \Omega(\mu), \quad \delta_H \Omega = 0 \tag{6.16}$$

Vi sono due classi particolarmente interessanti di cocatene:

1. i cocicli che soddisfano $d\Omega = 0$ (chiusura);
2. i cobordi che soddisfano $\Omega = d\tilde{\Omega}$ (esattezza).

[2]Nelle teorie di supergravità μ^{Γ} è la superalgebra di Poincarè o di De Sitter e $\mu^{\mathcal{A}}$ corrisponde all'algebra di Lorentz e all'algebra di gauge in teorie estese.

Le $k-$forme chiuse ma non esatte (cocicli che non sono cobordi) si dicono rappresentativi delle classi di coomologia di Chevalley o ,brevemente, coomologie; coomologie che differiscono per un differenziale totale sono equivalenti ($\Omega \sim \Omega + dX$) e quindi è sufficiente avere $H-$invarianza a meno di un differenziale totale:

$$\delta_H \Omega = dX. \tag{6.17}$$

Non esistono molte coomologie: per esempio per $\overline{Osp(4/1)}$

$$\begin{cases} d\omega^{ab} = \omega^a{}_c \omega^{cb} \\ dv^a = \omega^a{}_b v^b - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ d\psi^\alpha = \omega^\alpha{}_\beta \psi^\beta, \quad \omega^\alpha{}_\beta \equiv \frac{1}{4}\omega^{ab}\Gamma^\alpha_{ab\beta} \end{cases} \tag{6.18}$$

le uniche coomologie (a meno di una costante moltiplicativa) sono

$$\Omega_1 = \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi v_a \quad (\delta_H \Omega_1 = 0, \quad d\Omega_1 = 0) \tag{6.19}$$

e

$$\Omega_2 = -\frac{1}{3}\omega_a{}^b \omega_b{}^c \omega_c{}^a \quad (\delta_H \Omega_2 = d(\varepsilon^a{}_b \omega^b{}_a), \quad d\Omega_2 = 0). \tag{6.20}$$

L'importanza delle coomologie è che permettono di estendere la superalgebra G' ad una FDA F'; infatti data una coomologia Ω_1 la struttura

$$\begin{cases} \Omega^\Gamma = -\frac{1}{2}c^\Gamma_{\Delta\Theta}\mu^\Delta\mu^\Theta \\ dB_1 = \Omega_1(\mu) \end{cases} \tag{6.21}$$

è una FDA, che indichiamo con F'_1. Si impongono ora due osservazioni:

1. poichè le coomologie sono definite a meno di differenziali totali dX le forme B e $B - X$ sono equivalenti;

2. la posizione (6.21) dà luogo ad un'ulteriore invarianza $U(1)$ per il cambio $B_1 \to B_1 + db_1$: dunque la sottoalgebra H' diventa più grande (e la indichiamo con H'_1).

L'algebra F'_1 (e la sottoalgebra H'_1) si possono estendere ulteriormente se c'è un'altra coomologia di grado diverso, ponendo

$$dB_2 = \Omega_2(\mu^\Gamma, B_1). \tag{6.22}$$

A questo punto per ulteriori estensioni si cercano altre coomologie: se esistono si introduce una forma B_3 e si continua per induzione fino a che non si trovano più coomologie.

Per esempio la FDA associata alla supergravità $D = 4, N = 1$ contiene la 2-forma B con curvatura

$$dB = \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi v_a + \frac{\alpha}{3}\omega^a{}_b\omega^b{}_c\omega^c{}_a \tag{6.23}$$

Nota 1: il punto essenziale che assicura l'esistenza del primo cociclo è l'identità ciclica (3.138)

$$\bar{\psi}\Gamma^a\psi\Gamma_a\psi = 0 \tag{6.24}$$

che permette di dimostrare $d^2 = 0$; tale identità vale in $D = 3, 4, 6, 10$ e quindi la FDA è immediatamente generalizzabile a queste dimensioni (con N minimale).

Nota 2: è possibile prendere in considerazione il secondo cociclo solo assumendo l'esistenza una costante dimensionale α di peso 2 (altrimenti si sommerebbero cocicli di peso diverso); per mantenere la Lorentz-invarianza è poi necessario cambiare la legge di trasformazione di B in

$$\delta_L B = \alpha\varepsilon^a{}_b\omega^b{}_a \tag{6.25}$$

(in generale se $dB = \Omega$ e $\delta_H\Omega = dX$ dev'essere $\delta_H B = X$ per avere $\delta_H(dB - \Omega) = 0$). L'utilità di quest'ultima estensione sarà chiarita nel capitolo 8.

6.5 Algebre soffici

Si ottiene un'algebra soffice di primo tipo sostituendo

$$0 = d\mu^\Lambda - \Omega^\Lambda(\mu) \tag{6.26}$$

con

$$\breve{\mu}^\Lambda = d\mu^\Lambda - \Omega^\Lambda(\mu) \tag{6.27}$$

che definisce il multipletto di curvatura $\breve{\mu}^\Lambda$; la condizione $d^2 = 0$ porta alle identità di Bianchi generalizzate

$$d\breve{\mu}^\Lambda + d\Omega^\Lambda = 0. \tag{6.28}$$

Se si osserva che $d\Omega^\Lambda$ è necessariamente una combinazione lineare in $\breve{\mu}$[3], cioè $d\Omega^\Lambda = \omega^\Lambda{}_\Pi(\mu)\breve{\mu}^\Pi$, le (6.28) si possono riscrivere[4]

$$\tilde{\nabla}\breve{\mu}^\Lambda \equiv d\breve{\mu}^\Lambda + \omega^\Lambda{}_\Pi\breve{\mu}^\Pi = 0. \tag{6.31}$$

Se si lavora con FDA soffici, conviene indebolire la condizione di Chevalley, e chiamare cocicli di secondo tipo le forme costruite sia con μ che con le curvature $\breve{\mu}$, $H-$invarianti e con differenziale nullo a curvatura nulla:

$$\Omega = \Omega(\mu, \breve{\mu}), \quad \delta_H\Omega = dX, \quad d\Omega|_{\breve{\mu}=0} = 0. \tag{6.32}$$

I cocicli non banali (coomologie) permettono di estendere F' ad una FDA di secondo tipo F''

$$\breve{\mu} = d\mu - \Omega(\mu, \breve{\mu}) \tag{6.33}$$

con identità di Bianchi

$$d\breve{\mu}^\Lambda + d\Omega^\Lambda \equiv d\breve{\mu}^\Lambda + \omega^\Lambda{}_\Pi\breve{\mu}^\Pi \equiv \tilde{\nabla}\breve{\mu}^\Lambda = 0; \tag{6.34}$$

la differenza rispetto alle algebre di primo tipo è che ora $d\Omega$ è polinomiale in $\breve{\mu}$ (e non solo lineare) e quindi $\omega^\Lambda{}_\Pi(\mu, \breve{\mu})$ contiene anche le curvature $\breve{\mu}$; inoltre in vari casi conviene ammettere che anche i coefficienti contenuti in $\omega^\Lambda{}_\Pi$ possano dipendere dal punto, siano cioè campi (0-forme).

Per fare un esempio concreto si considerino i cocicli non banali (3-forme di Chern-Simons) associati a un gruppo semisemplice H

$$\Omega = Tr(AF - \frac{1}{3}AAA) \quad (\delta_H\Omega = dTr(\varepsilon dA), \quad d\Omega = TrFF); \tag{6.35}$$

[3] Tra l'altro ciò assicura che a curvatura nulla le le (6.28) siano banalmente verificate: $d\Omega|_{\breve{\mu}=0} = 0$;ciò corrispondente ad una generalizzazione delle identità di Jacobi.

[4] La derivata $\tilde{\nabla}$, a differenza della ∇ associata a $G \subset F$, è definita solo su multipletti di forme ν^Λ con gradi del tipo $p^\Lambda = k^\Lambda + n$ (i k^Λ sono i gradi del multipletto μ^Λ e n è un numero naturale indipendente da Λ); solo in queste condizioni ha senso scrivere

$$\tilde{\nabla}\nu^\Lambda = d\nu^\Lambda + \omega^\Lambda{}_\Pi\nu^\Pi; \tag{6.29}$$

(le forme $\omega^\Lambda{}_\Pi$ hanno gradi $k^\Lambda - k^\Pi + 1$); si può definire $\tilde{\nabla}$ anche sui multipletti duali ν_Λ con gradi $p_\Lambda = n - k^\Lambda$:

$$\tilde{\nabla}\nu_\Lambda = d\nu_\Lambda - (-1)^{p_\Lambda}\nu_\Pi\omega^\Pi{}_\Lambda; \tag{6.30}$$

in tal modo è assicurata la $\tilde{\nabla}(X_\Lambda Y^\Lambda) = d(X_\Lambda Y^\Lambda)$).

si noti che a curvatura nulla le forme di C-S si riducono ai cocicli del primo tipo $\Omega^{(0)} = Tr(-\frac{1}{3}AAA)$, già visti in (6.20) per il gruppo di Lorentz ($A = \omega^a{}_b$). La (6.34) si scrive allora ($h_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ indica la metrica di Killing di H e $\mu^\Lambda = (A^{\mathcal{I}}, B)$)

$$\begin{cases} d\breve{A}^{\mathcal{I}} + c^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}\mathcal{K}} A^{\mathcal{J}} \breve{A}^{\mathcal{K}} = 0 \quad (dF + [A, F] = 0) \\ d\breve{B} + h_{\mathcal{I}\mathcal{J}} \breve{A}^{\mathcal{I}} \breve{A}^{J} = 0 \quad (dH + TrFF = 0). \end{cases} \tag{6.36}$$

Trattiamo ora alcune applicazioni alla supergravità. La possibilità di aggiungere forme di Chern-Simons è molto importante nelle teorie in cui compaiono 2-forme (ciò come si è visto capita spesso) dove è possibile ridefinire

$$H = dB - \alpha\Omega(A) \tag{6.37}$$

e cambiare la legge di trasformazione di B

$$\delta_L B = \alpha Tr(\varepsilon dA) \tag{6.38}$$

per avere una teoria gauge-invariante. L'accoppiamento con termini di Chern-Simons (di gauge e di Lorentz) ha anche interesse dal punto di vista quantistico in quanto, nel caso della supergravità $D = 10$, $N = 1$ con gruppo di gauge $E_8 \times E_8$ o $SO(32)$, permette di eliminare le anomalie attaverso il meccanismo di Green e Schwarz. Per ulteriori dettagli rimandiamo però al capitolo 8.

Un'altra applicazione pratica consiste nel ricavare la legge di trasformazione delle $k-$forme per supertrasformazioni; in generale se ε^Λ è un multipletto di $(k^\Lambda - 1)-$forme

$$\delta_\varepsilon \mu^\Lambda = \tilde{\nabla}\varepsilon^\Lambda + i_\varepsilon \breve{\mu}^\Lambda = d\varepsilon^\Lambda + \omega^\Lambda{}_\Pi \varepsilon^\Pi + i_\varepsilon \breve{\mu}^\Lambda \tag{6.39}$$

e quindi per $\varepsilon^\Lambda = (\varepsilon^{\mathcal{A}}, \varepsilon^a, \varepsilon^\alpha, \varepsilon^\otimes) = (0, 0, \varepsilon^\alpha, 0)$

$$\begin{cases} \ell_\varepsilon \mu^\Gamma = \nabla\varepsilon^\Gamma + i_\varepsilon \breve{\mu} \\ \ell_\varepsilon B = \omega^\otimes_\alpha \varepsilon^\alpha + i_\varepsilon H \end{cases} \tag{6.40}$$

e nel nostro esempio in cui $\Omega = Tr(AF - \frac{1}{3}A^3)$

$$\omega^\otimes_\alpha = 0. \tag{6.41}$$

6.6 Supergravità D=3,N=1

In questo paragrafo diamo un esempio concreto di come si costruisce una teoria basata su una FDA (la supergravità $D = 3,\ N = 1$) servendoci sia dell'approccio delle identità di Bianchi che del principio d'azione reonomico.

Il punto di partenza è costuituito dalla definizione dell'algebra differenziale libera soffice di primo tipo[5]

$$\begin{cases} R^a{}_b = d\omega^a{}_b - \omega^a{}_c\omega^c{}_b \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ \varrho = \mathcal{D}\psi \\ H = dB - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi v_a \end{cases} \tag{6.42}$$

con identità di Bianchi

$$\begin{cases} \mathcal{D}R^a{}_b = 0 \\ \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - i\bar{\psi}\Gamma^a\varrho = 0 \\ \mathcal{D}\varrho + \frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\psi = 0 \\ dH + i\bar{\varrho}\Gamma^a\psi v_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi R_a = 0. \end{cases} \tag{6.43}$$

La teoria è individuata quando si impone il postulato (5.5), cioè quando si è determinata una parametrizzazione Bianchi-consistente. Da pure considerazioni dimensionali (invarianza di scala) si ha l'ansatz (R^a e $\breve{T}^a$ indicano la stessa curvatura)

$$\begin{cases} R_{(1,1)} = R_{(1,1)}(\varrho_{ab}) \quad \text{peso -3/2} \\ R_{(0,2)} = R_{(0,2)}(H_{abc}) \quad \text{peso -1} \\ \varrho = \varrho_{(2,0)} + \varrho_{(1,1)}(H_{abc}) \\ \breve{T} = \breve{T}_{(0,2)}(H_{abc}) \\ H = H_{abc}v^a v^b v^c; \end{cases} \tag{6.44}$$

ovvero, più in dettaglio,

$$\begin{cases} R^{ab}_{(1,1)} = \bar{\theta}^{ab}{}_c(\varrho)\psi v^c \\ R^{ab}_{(0,2)} = \bar{\psi}K^{ab}(H)\psi \\ \varrho_{(1,1)} = H_c(H)\psi v^c \\ R^a = H^a_{bc}v^b v^c \\ H = H_{abc}v^a v^b v^c. \end{cases} \tag{6.45}$$

Si noti che si ammette la presenza di una torsione non nulla: ciò è conveniente ma non indispensabile (ridefinendo la connessione è sempre possibile imporre $R_{abc} = 0$).

[5] Benchè tale algebra si possa definire in $D = 3, 4, 6, 10$ solo in $D = 3$ e $D = 6$ il conto dei gradi di libertà è soddisfatto (0+0 e 12+12): negli altri casi l'algebra deve contenere altri campi (0-forme) che effettuino il bilanciamento.

La risoluzione delle identità di Bianchi procede in maniera standard e la parametrizzazione è individuata dalle identità bosoniche (esclusa l'identità$-R$ che per il teorema di Dragon è sovrabbondante).

Identità$-T$:

$$\begin{array}{lll} settore\ (0,3): & 0=0 & \\ settore\ (1,2): & iH^a_{bc}\bar\psi\Gamma^b\psi v^c + R^{ab}_{(0,2)}(H)v_b - i\bar\psi\Gamma^a\varrho_{(1,1)}(H)=0 & (*) \\ settore\ (2,1): & D_{(0,1)}R^a + R^{ab}_{(1,1)}(\varrho)v_b - i\bar\psi\Gamma^a\varrho = 0 & (***) \end{array} \tag{6.46}$$

Identità$-H$:

$$\begin{array}{lll} settore\ (0,4): & 0=0 & \\ settore\ (1,3): & 0=0 & \\ settore\ (2,2): & iH_{abc}\bar\psi\Gamma^a\psi v^b v^c + i\bar\varrho_{(1,1)}\Gamma^a\psi v_a - \frac{i}{2}\bar\psi\Gamma^a\psi H_{abc}v^c v^c = 0 & (**) \\ settore\ (3,1): & D_{(0,1)}H_{abc}v^a v^b v^c + i\bar\varrho_{ab}\Gamma^c\psi v_c v^a v^b = 0 & (+) \end{array} \tag{6.47}$$

Cominciamo col risolvere l'identità (*). Essa permette di ottenere la parametrizzazione di $R^{ab}_{(0,2)}$ nota quella di $\varrho_{(1,1)}$ ed inoltre impone dei vincoli su quest'ultima che viene completamente individuata usando la (**)

$$(*) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R^{ab}_{(0,2)} = i\bar\psi\Gamma^{[a}H^{b]}\psi + iH^{abc}\bar\psi\Gamma_c\psi \\ \Gamma^{(a}H^{b)} = \text{ matrice antisimmetrica} \end{array} \right. \tag{6.48}$$

$$(**) \Rightarrow (\Gamma_{[c}H_{b]})_{SIM} = \frac{1}{2}H_{abc}\Gamma^a \tag{6.49}$$

Si ottiene dunque $H_c = \alpha i h {\Gamma_c}$[6] con $\alpha = \frac{1}{2}$ e $K^{ab} = \frac{h}{2}\Gamma^{ab}$.

La parametrizzazione di $R^{ab}_{(1,1)}$ è fissata dalla (*) in termini delle derivate spinoriali di H_{abc}

$$\bar\theta^{a[bc]}_\alpha = \mathcal{D}_\alpha H^{abc} + i\bar\varrho^{bc\delta}\Gamma^a_{\delta\alpha}; \tag{6.50}$$

queste sono individuate in termini delle curvature fisiche dall'identità (+):

$$D_{(0,1)}H_{abc} = +i\bar\psi\Gamma_{[c}\varrho_{ab]}; \tag{6.51}$$

inserendo poi la (6.51) nelle identità di Bianchi fermioniche

Identità$-\varrho$:

$$\begin{array}{lll} settore\ (0,3): & 0=0 & \\ settore\ (1,2): & i\varrho_{ab}\bar\psi\Gamma^a\psi v^b + D_{(0,1)}H_c\psi v^c + \frac{1}{4}\bar\theta^{ab}{}_c\psi v^c\Gamma_{ab}\psi = 0 & (++) \\ settore\ (2,1): & D_{(0,1)}\varrho_{ab}v^a v^b + D_{(1,0)}\varrho_{(1,1)} + R_{(2,0)}\psi = 0 & (+++) \end{array} \tag{6.52}$$

[6] Usiamo la definizione $h_{abc} = \varepsilon_{abc}h,\ h = \frac{1}{6}\varepsilon^{abc}h_{abc}$.

risulta fissata l'equazione del gravitino (identità (++))

$$\varrho_{ab} = 0; \tag{6.53}$$

l'identità (+++) dà le derivate spinoriali del gravitino:

$$\mathcal{D}_\alpha \varrho_{ab\beta} = \frac{i}{2}\mathcal{D}_{[a} h \Gamma_{b]\alpha\beta} - \frac{3}{4}h^2\Gamma_{ab\alpha\beta} + \frac{1}{4}R^{ef}_{ab}\Gamma_{ef\alpha\beta}; \tag{6.54}$$

esse sono essenziali per ricavare le equazioni dei campi bosonici: queste si ottengono con una derivata spinoriale dell'equazione di Rarita-Schwinger[7]

$$\Gamma^{abc}\varrho_{bc} = 0; \tag{6.55}$$

si ha infatti

$$\begin{aligned}
0 &= \Gamma_{d\alpha\gamma}\Gamma^{cab\gamma\beta}\mathcal{D}^\alpha\varrho_{ab\beta} \\
&= Tr[\Gamma^{cab}(\tfrac{i}{2}\mathcal{D}_a h\Gamma_b - \tfrac{3}{4}h^2\Gamma_{ab} + \tfrac{1}{4}R^{ef}_{ab}\Gamma_{ef})\Gamma_d] \\
&= \text{ si usano le proprietà delle matrici } \Gamma \\
&= Tr[\Gamma^{cab}(\tfrac{i}{2}\mathcal{D}_a h\eta_{bd} - \tfrac{3}{4}\Gamma_{abd} + \tfrac{1}{4}R^{ef}_{ab}\Gamma_{efd})] \\
&= -\varepsilon^{ca}{}_d\mathcal{D}_a h + 9h^2\eta^{cab}_{abd} - 3R^{ef}_{ab}\eta^{cab}_{efd} \\
&= \text{ con trucchi standard} \\
&= -\varepsilon^{ca}{}_d\mathcal{D}_a h + 3h^2\eta^c_d + 2(\mathcal{R}^c_d - \tfrac{1}{2}R_S\eta^c_d)
\end{aligned} \tag{6.56}$$

e quindi, simmetrizzando e antisimmetrizzando gli indici

$$\mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = -\frac{3}{2}h^2\eta^a{}_b \tag{6.57}$$

$$\mathcal{D}_a h = 0. \tag{6.58}$$

È chiaro quindi che la teoria appena ricavata è equivalente alla gravità di (Anti) De Sitter in tre dimensioni e che h è legata alla costante cosmologica (si confronti con la (1.173)).

[7] In tre dimensioni corrisponde alla (6.53) ma preferiamo usare la forma generale in quanto il ragionamento vale, con qualche avvertenza, in tutte le dimensioni.

6.7 L'approccio lagrangiano

La teoria precedente può essere dedotta anche dal principio d'azione reonomico (in maniera ancora più semplice). Le regole C1)-C5) del capitolo 5 sono immediatamente estendibili ad una FDA senza alcuna modifica; l'unica azione geometrica, $H-$invariante e di peso 1 costruibile con i campi della teoria è

$$\mathcal{L} = R^{ab} v^c \varepsilon_{abc} + \alpha \bar{\varrho} \psi + \beta (Hh - \frac{1}{2} h^2 v^a v^b v^c \varepsilon_{abc}) \tag{6.59}$$

(si noti che riscalando i campi H, h è possibile porre $\beta = 1$).

L'esistenza del vuoto ($R = T = \varrho = H = h = 0$) fissa il coefficiente $\alpha = -2$; si hanno quindi le equazioni lineri nelle curvature

$$\begin{cases} \delta_\omega I : R^c \varepsilon_{abc} = 0 \\ \delta_v I : R^{ab} \varepsilon_{abc} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^c \psi h - \frac{3}{2} h^2 v^a v^b \varepsilon_{abc} = 0 \\ \delta_{\bar{\psi}} I : -4\varrho + ih \Gamma^a \psi v_a = 0 \\ \delta_B I : dh = 0 \\ \delta_h I : H - hv^a v^b v^c \varepsilon abc = 0 \end{cases} \tag{6.60}$$

da cui

$$\begin{cases} R^c = 0 \\ R^{ab}_{(2,0)} = \frac{3}{2} h^2 v^a v^b, \quad R^{ab}_{1,1} = 0, \quad R^{ab}_{(0,2)} = \frac{1}{4} h \bar{\psi} \Gamma^{ab} \psi \\ \varrho_{(2,0)} = 0, \quad \varrho_{(1,1)} = \frac{i}{2} \Gamma^a \psi v_a, \quad \varrho_{(0,2)} = 0 \\ h = costante \\ H = H_{(3,0)} = h \varepsilon_{abc} v^a v^b v^c \end{cases} \tag{6.61}$$

Le equazioni esterne danno una parametrizzazione che on-shell coincide con quella determinata dalle equazioni di Bianchi.

L'equivalenza della teoria con la supergravità di (Anti) De Sitter è ancora più chiara se si ridefiniscono le curvature nel modo seguente:

$$\begin{cases} \breve{R}^{ab} = R^{ab} + \frac{1}{2} h \bar{\psi} \Gamma^{ab} \psi = d\omega^{ab} - \omega^{ac} \omega_c{}^b + \frac{1}{2} h \bar{\psi} \Gamma^{ab} \psi, \\ \breve{\varrho} = \varrho - \frac{i}{2} h \Gamma_c \psi v^c = \mathcal{D}\psi - \frac{i}{2} h \Gamma_c \psi v^c; \end{cases} \tag{6.62}$$

in tal caso le equazioni del moto danno $\breve{\mu}$=0.

È evidente che il ragionamento si può estendere a teorie di Poincarè $D-$dimensionali[8] con $(D-1)-$forme B; esse corrispondono a teorie di De Sitter con costante cosmologica legata alla curvatura h ($H_{a_1 \cdots a_D} = \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} h$); l'esempio più importante è la supergravità 4- dimensionale che si ottiene compattificando la supergravità in $D = 11$: la 3-forma A ridotta in $D = 4$ ha curvatura $F_{abcd} = e\varepsilon_{abcd}$ e questa genera la costante cosmologica.

[8] Naturalmente però in $D > 3$ esistono altre soluzioni oltre a quella di vuoto.

6.8 Supergravità in sei dimensioni

La supergravità pura in sei dimensioni contiene i campi fisici $(v^{\underline{9}}, \psi^{\underline{12}}, B^{\underline{3}})$ caratterizzati da curvature e identità di Bianchi

$$\begin{cases} R^a{}_b = d\omega^a{}_b - \omega^a{}_c\omega^c{}_b \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ \varrho = \mathcal{D}\psi \\ H = dB - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi v_a \end{cases} \tag{6.63}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}R^a{}_b = 0 \\ \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\varrho + \frac{i}{2}\bar{\varrho}\Gamma^a\psi = 0 \\ \mathcal{D}\varrho + \frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\psi = 0 \\ dH + i(\bar{\varrho}\Gamma^a\psi v_a - \bar{\psi}\Gamma^a\varrho v_a) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi R_a = 0 \end{cases} \tag{6.64}$$

identiche a quella della teoria $D = 3$, $N = 1$: tuttavia la soluzione sarà diversa in seguito alle diverse proprietà delle rappresentazioni di $SO(1,5)$.

In $D = 6$ c'è una caratteristica particolamente originale che è l'esistenza di tensori autoduali. Osserviamo infatti che ogni tensore a tre indici si può spezzare come segue:

$$F_{abc} = F^+_{abc} + F^-_{abc}, \quad \tilde{F}^\pm_{abc} \equiv \frac{1}{3!}\varepsilon_{abcdef}F^{\pm\,def} = \pm F^\pm_{abc}; \tag{6.65}$$

F^+ e F^- sono la parte duale e antiduale di F e soddisfano

$$F^+ = \frac{F+\tilde{F}}{2}, \quad F^- = \frac{F-\tilde{F}}{2}. \tag{6.66}$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$F^{abc}_+ F_{+a}{}^{de}\varepsilon_{bcdefg} = 0, \quad F^{abc}_+ G_{+abc} = 0, \quad F^{ab[c}_+ G^{d]}_{\pm ab} = 0 \tag{6.67}$$

e le analoghe scambiando + con − ; le dimostrazioni (facili) e molte altre formule si trovano in [21] cap. III.7. Riportiamo anche alcune identità di Fierz[9]:

[9] Si osservi che per le proprietà verificate in generale nel capitolo 3 le uniche correnti reali che si possono ottenere con gli spinori chirali ψ e ϱ sono

$$i\bar{\psi}\Gamma_a\psi,\ \bar{\psi}\Gamma_{abc}\psi,\ i(\bar{\varrho}\Gamma_a\psi - \bar{\psi}\Gamma_a\varrho),\ \bar{\varrho}\Gamma_{abc}\psi - \bar{\psi}\Gamma_{abc}\varrho,\ \bar{\varrho}\Gamma_a\varrho,\ i\bar{\varrho}\Gamma_{abc}\varrho;$$

si noti inoltre che $T_{abc} = \bar{\psi}\Gamma_{abc}\psi$ è autoduale in seguito alla proprietà delle matrici Γ : $\Gamma^{abc} = \frac{1}{3!}\varepsilon^{abcdef}\Gamma_7\Gamma_{def}$.

$$\psi\bar{\psi} = (\frac{1}{4}\bar{\psi}\psi - \frac{1}{48}\bar{\psi}\Gamma_{abc}\psi\Gamma^{abc})\frac{1-\Gamma_7}{2}, \quad \Gamma_a\psi\bar{\psi}\Gamma_a\psi = 0 \tag{6.68}$$

$$\Gamma_{abc}\psi\bar{\psi}\Gamma^{abc}\psi = 0, \quad \Gamma_{abc}\psi\bar{\psi}\Gamma^c\psi = -2\Gamma^{[a}\psi\bar{\psi}\Gamma^{b]}\psi = -\Gamma_c\psi\bar{\psi}\Gamma^{cab}\psi \tag{6.69}$$

$$\bar{\psi}\Gamma^{abc}\psi\bar{\psi}\Gamma_a\psi = 0, \quad \bar{\psi}\Gamma_{abc}\psi\bar{\psi}\Gamma^{ab}{}_d\psi = 0. \tag{6.70}$$

Dall'analisi della $D = 3, N = 1$ sappiamo che conviene determinare la parametrizzazione esterna dalle identità di Bianchi e le equazioni del moto dal principio d'azione; nel primo approccio si parte dall'ansatz

$$\begin{cases} R^a = -\frac{1}{12}\xi\varepsilon^{abcdef}F_{def}v_bv_c \\ R = R_{(2,0)} + R_{(1,1)}(\varrho_{ab}, \bar{\varrho}_{ab}) + R_{(0,2)}(F^+_{abc}, F^-_{abc}) \\ \varrho = \varrho_{(0,2)} + \varrho_{(1,1)}(F^+_{abc}, F^-_{abc}) \\ \bar{\varrho} = \bar{\varrho}_{(0,2)} + \bar{\varrho}_{(1,1)}(F^+_{abc}, F^-_{abc}) \end{cases} \tag{6.71}$$

nel secondo da

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \; & \xi R^{\otimes}R^av_a + \tfrac{1}{4}R^{ab}v^cv^dv^ev^f\varepsilon_{abcdef} + i\alpha_3R^a\bar{\psi}\Gamma^b\psi v_av_b + \\ & i\alpha_4R_a\bar{\psi}\Gamma^{abc}\psi v_bv_c + \alpha_5(\bar{\varrho}\Gamma_{abc}\psi - \bar{\varrho}\Gamma_{abc}\psi)v^a + i\alpha_7R^{\otimes}\bar{\psi}\Gamma_a\psi v^a. \end{aligned} \tag{6.72}$$

La (6.72) merita la spesa di qualche parola.

A) $\xi R^{\otimes}R^av_a$ è l' unico termine quadratico nelle curvature possibile;

B) i termini lineari sono

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{4}R^{ab}v^cv^dv^ev^f\varepsilon_{abcdef}, \; R^ai\bar{\psi}\Gamma^b\psi v_av_b, \; R_a\bar{\psi}\Gamma^{abc}\psi v_bv_c, \\ & (\bar{\varrho}\Gamma_{abc}\psi - \bar{\varrho}\Gamma_{abc}\psi)v^a, \; iR^{\otimes}\bar{\psi}\Gamma_a\psi v^a; \end{aligned} \tag{6.73}$$

C) in conseguenza alle identità di Fierz non ci sono termini di ordine zero.

D) Nell'ansatz (6.72) si è implicitamente assunta nulla la parte della lagrangiana nuda in B

$$\begin{aligned} XB = \; & (\alpha_1R_{ab}v^av^b + i\alpha_2R^a\bar{\psi}\Gamma_a\psi v^a + \alpha_6(\bar{\varrho}\Gamma_a\psi - \bar{\psi}\Gamma_a\varrho)v^a) + \\ & \gamma R_aR^a + \delta R^{\otimes}R\otimes)B; \end{aligned} \tag{6.74}$$

ciò è corretto in seguito al seguente ragionamento. Supponiamo di aggiungere alla lagrangiana con i termini (6.74) dei differenziali totali $d\omega$ con

$$\omega_1 = i\bar{\psi}\Gamma_a\psi v^aB, \quad \omega_2 = \bar{\psi}\Gamma_{abc}\psi v^av^bv^c, \quad \omega_3 = R^{\otimes}B, \quad \omega_4 = R^av_aB \tag{6.75}$$

è possibile allora eliminare quattro termini del tipo

$$i(\bar{\varrho}\Gamma_a\psi - \bar{\psi}\Gamma_a\varrho)v^aB, \quad \bar{\psi}\Gamma_{abc}\psi R^a v^b v^c, \quad R^{\otimes}R^{\otimes}, \quad R^{ab}v_a v_b B \tag{6.76}$$

si vede così che, a differenza del caso $D=5$, la parte nuda in B

$$X = i\alpha_2 R^{\otimes}\bar{\psi}\Gamma_a\psi v^a + \gamma R_a R^a \tag{6.77}$$

si può eliminare perchè non soddisfa $dX = 0$ (non è $U(1)-$invariante).

L'imposizione di C4) (esistenza dello stato di vuoto) fissa tutti i coefficienti incogniti tranne ξ e resta

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \quad & \xi R^{\otimes}R^a v_a + \tfrac{1}{4}R^{ab}v^c v^d v^e v^f \varepsilon_{abcdef} + 3iR^a\bar{\psi}\Gamma^b\psi v_a v_b - i(\bar{\varrho}\Gamma_{abc}\psi \\ & + \bar{\varrho}\Gamma_{abc}\psi)v^a v^b v^c - 3iR^{\otimes}\bar{\psi}\Gamma_a\psi v^a.\end{aligned} \tag{6.78}$$

A questo punto è necessario il principio reonomico; le equazioni variazionali sono

$$\begin{aligned}
\delta_\omega I: \quad & \varepsilon_{abcdef}R^c v^d v^e v^f - \xi R^{\otimes}v_a v_b = 0 \\
& \Rightarrow R_{abc} = -\tfrac{1}{12}\varepsilon_{abcdef}R^{\otimes}_{def} \\[1ex]
\delta_v I: \quad & \varepsilon_{abcdef}R^{ab}v^c v^d v^e - 6iR^a v_a\bar{\psi}\Gamma_f\psi - 6i\bar{\psi}\Gamma^b\psi R_{[f}v_{b]} + \\
& 3i(\bar{\varrho}\Gamma_{abc}\psi - \bar{\varrho}\Gamma_{abc}\psi)v^a) - 3iR^a\bar{\psi}\Gamma_a\psi + \xi R^a R_a = 0 \\[1ex]
\delta_{\bar{\psi}} I: \quad & (-3 + \tfrac{1}{2}\xi)R^a\Gamma^b\psi v_a v_b + (3 + \tfrac{1}{2}\xi)R^{\otimes}\Gamma^a\psi v_a - \\
& 2\Gamma_{abc}\varrho v^a v^b v^c + 3\Gamma_{abc}\psi R^a v^b v^c = 0 \\[1ex]
\delta_B I: \quad & \xi R^{ab}v_a v_b - i(3 + \tfrac{1}{2}\xi)(\bar{\varrho}\Gamma_a\psi - \bar{\varrho}\Gamma_a\psi)v^a \\
& -3iR^a\bar{\psi}\Gamma_a\psi + \xi R^a R_a = 0.
\end{aligned} \tag{6.79}$$

Si noti che tali equazioni sono compatibili con l'ansatz (6.71) e, nei settori esterni, fissano la parametrizzazione reonomica; da questa si ricavano le seguenti regole di supertrasformazione (si veda [21] per i dettagli; in particolare risulta $\xi = 2\sqrt{3}\eta$, $\eta = \pm 1$)

$$\begin{cases}
\ell_\varepsilon\omega = -\frac{i}{2}(\bar{\varrho}^{c[a}\Gamma^{b]} + \eta\sqrt{3}\bar{\varrho}^{ab}\Gamma^c)\varepsilon v_c - \frac{3}{2}i(1 + \frac{\eta}{\sqrt{3}})\bar{\psi}\Gamma_c\varepsilon F_+^{abc} + \text{c. c.} \\
\ell_\varepsilon v = \frac{i}{2}(\bar{\varepsilon}\Gamma\psi - \bar{\psi}\Gamma\varepsilon) \\
\ell_\varepsilon\psi = D\varepsilon + \frac{3}{2}(1 - \frac{\eta}{\sqrt{3}}F^+_{abc}\Gamma^{ab}v^c\varepsilon) \\
\ell_\varepsilon B = i(\bar{\varepsilon}\Gamma^a\psi - \bar{\psi}\Gamma^a\varepsilon)v_a;
\end{cases} \tag{6.80}$$

inoltre si ottiene la condizione di non trivialità

$$F^-_{abc} = 0; \tag{6.81}$$

la (6.81) è un'equazione del moto spaziotemporale che non segue dalle proiezioni $v \ldots v$ delle equazioni del moto (6.79) ma solo dalle equazioni esterne; si è quindi persa l'idea fondamentale dietro alla regola C4).

Legata a questa caratteristica è la perdita di C5): un conto diretto (ma lungo) nel formalismo del secondo ordine dà infatti, comunque si scelga la parametrizzazione (questa ha una qualche libertà, nel senso che si possono aggiungere termini rispettanti le invarianze e nulli on-shell)

$$i_\varepsilon d\mathcal{L} \propto F_- \tag{6.82}$$

e se non si implementa (6.81) l'azione (6.78) non è supersimmetrica ! La controparte di questa caratteristica nel formalismo puramente spaziotemporale è che non si riesce a scrivere un'azione Lorentz-invariante per le equazioni del moto, che pure lo sono (si veda anche l'articolo [33]) . Riportiamo qui, per concludere, le equazioni dedotte dai settori interni

$$\begin{cases} \mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = 3(F^a_{+cd}F^{cd}_{+b} + F^a_{-cd}F^{cd}_{-b} - \frac{1}{3}\eta^a{}_b F^{cde}_+ F_{-cde}) \\ \varepsilon_{cdabef} R^{abef} + 8F^{ab}_{+[c}F_{-d]ab} = 0 \\ \Gamma^{abc}\varrho_{abc} = 0 \end{cases} \tag{6.83}$$

($F^-_{abc} = 0$ è implicata dalle equazioni esterne).

6.9 Lorentz-invarianza ed autodualità

La perdita di C4) e C5), cioè dell'equivalenza superspazio-spaziotempo [10], per quanto apparentemente disastrosa, è però facilmente rimediabile; basta infatti aggiungere alla lagrangiana un nuovo termine che forzi la (6.81) come equazione del moto interna; tale termine è

$$\mathcal{L}_\Lambda = \int \Lambda^{abc}_+ R^{\otimes} v_a v_b v_c \quad (\delta_\Lambda \mathcal{L} \Rightarrow F = F_+) \tag{6.84}$$

con Λ^+_{abc} moltiplicatore di Lagrange. Con un'opportuna legge di trasformazione per supersimmetria di Λ^+_{abc} è possibile anche cancellare il termine (6.82) e restaurare la desiderata invarianza (si veda [21] e la bibliografia ivi citata).

Notiamo infine che si può scavalcare completamente il problema, se si accoppia la $D = 6$, $N = 2$ con un multipletto tensore con il seguente contenuto in campi:

B_- tensore antiduale[11] di peso 2 (3 gradi bosonici)

[10] Ciò significa che non si possono estendere al superspazio tutte le configurazioni soddisfacenti le equazioni interne, ma solo quelle con la condizione aggiuntiva (6.81)

[11] Si intende che la sua curvatura F^-_{abc} è antiduale.

λ spinore di Weyl di peso -1/2 (4 gradi fermionici)
σ scalare reale di peso 0 (1 grado bosonico).

In tal caso il tensore B_- può essere unificato con la 2-forma autoduale B_+ del multipletto del gravitone ponendo

$$B = B_+ + B_- . \tag{6.85}$$

In tal modo la teoria accoppiata contiene i seguenti campi:

$$D = 6, N = 2 : (v, \psi, B, \chi, \sigma) \text{ pesi } (1, 1/2, 2, -1/2, 0) \tag{6.86}$$

questi sono gli stessi della supergravità 10-dimensionale (la teoria poteva essere ottenuta direttamente per riduzione dimensionale e troncando). Il grosso vantaggio dell'accoppiamento è che il nuovo tensore B non soddisfa più le relazioni di autodualità che rendono problematica la teoria pura e non ci sono problemi nell'ottenere un'azione supersimmetrica Lorentz invariante; inoltre se si accoppia anche un multipletto di Yang-Mills in maniera invariante di scala con il campo σ è possibile ottenere una compattificazione sulla sfera del tipo visto nel capitolo 2. Una trattazione di questa teoria nell'approccio di Noether si può trovare in [44].

Capitolo 7

SUPERGRAVITÀ CON 0-FORME

7.1 Introduzione

Nelle teorie sviluppate finora non compaiono in sostanza 0-forme (le eventuali 0-forme cinetiche f_{ab} sono artificiose e servono solo per poter scrivere l'azione del primo ordine, ma sono prive di un significato intrinseco); tuttavia è evidente che esse non possono essere trascurate in una trattazione generale della supergravità. Dedicheremo quindi questo capitolo alle teorie con 0-forme, che verranno trattate sia nell'approccio delle identità di Bianchi che seguendo il principio d'azione reonomico. In entrambi i casi dovremo estendere i postulati su cui si sono costruite le teorie sviluppate in precedenza.

7.2 Principi fondamentali

Se assumiamo che le teorie di supergravità contengano, oltre a una FDA soffice μ^{Λ} che estende la superalgebra di Poincarè μ^{Γ}, anche delle 0-forme aggiuntive λ il postulato fondamentale (5.5) viene indebolito affermando che

le componenti esterne delle curvature[1] *sono funzioni delle componenti interne e dei campi aggiuntivi.* [2]

$$\begin{cases} \breve{\mu} = \breve{\mu}(\breve{\mu}_{a_1 \cdots a_k}, \breve{\lambda}_a, \lambda) \\ \breve{\lambda} = \breve{\lambda}(\breve{\mu}_{a_1 \cdots a_k}, \breve{\lambda}_a, \lambda). \end{cases} \tag{7.2}$$

[1] Le "curvature" delle 0-forme sono definite come oggetti covarianti nelle derivate di λ, $\breve{\lambda} \equiv D\lambda$: ad esempio $\breve{X}^a = \mathcal{D}X^a, \breve{\chi} = \mathcal{D}\chi, \breve{\sigma} = d\sigma$; le loro componenti esterne danno la legge di trasformazione per supersimmetria in quanto si ha $\delta_\varepsilon \lambda = \ell_\varepsilon \lambda = i_\varepsilon d\lambda = i_\varepsilon D\lambda + i_\varepsilon \omega \lambda = i_\varepsilon D\lambda = i_\varepsilon \breve{\lambda}$.

[2] Si può avere un esempio concreto se si considera un supermultipletto (σ, χ) (gradi di libertà 1+1) accoppiato colla FDA della supergravità $D = 3$, $N = 1$; sono compatibili col postulato (7.2) parametrizzazioni

Se le 0-forme hanno un certo peso sono possibili solo funzioni polinomiali delle stesse; se invece sono scalari e hanno peso 0 sono possibili funzioni arbitrarie che sono individuate dalle simmetrie della varietà scalare.[3] L'introduzione delle 0-forme modifica anche le regole C1)-C5) che si riscrivono nella maniera seguente:

Una teoria di supergravità con 0-forme è descritta da un'azione complessiva

$$I(\mu,\lambda) = I_G(\mu) + I_0(\mu,\lambda), \tag{7.3}$$

geometrica e invariante di gauge e di scala, che si spezza in una parte I_G, non contenente le 0-forme e soddisfacente la condizione di vuoto $\delta_\mu I|_{\check{\mu}=0} = 0$, e una parte aggiuntiva I_0 contenente le 0-forme.

Se le 0-forme sono campi scalari l'azione si deve costruire in modo da rispettare le simmetrie della varietà scalare.

Si osservi che la presenza di 0-forme rende possibili termini proporzionali al massimo numero di vielbein

$$\mathcal{L}_X = X v^{a_1} \cdots v^{a_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} \tag{7.4}$$

(tipicamente X (di peso -2) è del tipo $\chi\chi\chi\chi$ o è un potenziale $e^2 V(\sigma)$); i coefficienti di tali termini non possono essere fissati nè dalla condizione di vuoto (che agisce solo sui termini non contenenti 0-forme) nè dalle componenti esterne delle equazioni variazionali ($\delta\mathcal{L}_X = \delta X(\lambda) v \cdots v + X \delta v \cdots v$ non ha componenti esterne); a differenza che nelle teorie trattate finora, quindi, diviene essenziale anche la condizione C5):

$$i_\varepsilon d\mathcal{L}_X = i_\varepsilon dX\, v \cdots v + \frac{D}{2} X\, i\bar{\varepsilon}\Gamma\psi \cdots v \tag{7.5}$$

contiene dei termini $v \cdots v$ e $\psi \cdots v$ che possono venire annullati da termini analoghi provenienti dalla lagrangiana rimanente se si scelgono opportunamente i coefficienti.

Teorie che fanno pesantemente uso di 0-forme sono le seguenti:

---

del tipo

$$\begin{aligned} R &= R_{(2,0)} + R_{(1,1)}(\varrho_{ab}, \Sigma_a \chi) + R_{(0,2)}(\chi\chi, h_{abc}) \\ \varrho &= \varrho_{(2,0)} + \varrho_{(1,1)}(\chi\chi, h_{abc}) + \varrho_{(0,2)}(\chi) \\ H &= H_{(3,0)} + H_{(2,1)}(\chi) + H_{(1,2)}(\sigma) \\ \check{\sigma} &= (d\sigma)_{(1,0)} + (d\sigma)_{(0,1)}(\chi) \\ \check{\chi} &= (\mathcal{D}\chi)_{(1,0)} + (\mathcal{D}\chi)_{(0,1)}(\Sigma_a, h_{abc}) \end{aligned} \tag{7.1}$$

(λ ha peso -1/2, $\Sigma_a = \partial_a \sigma$ peso -1, $\Lambda_a = \mathcal{D}_a \lambda$ peso -3/2); si noti che poichè σ ha peso zero la teoria potrebbe avere come coefficienti arbitrarie funzioni di σ: tuttavia tutte queste spariscono se si assume l'invarianza di scala $\sigma \longrightarrow \sigma + c$. Tale esempio è generalizzabile a 4,6 e 10 dimensioni.

[3] Si veda il capitolo 2 per degli esempi non supersimmetrici.

A) Teorie off-shell. Tramite le 0-forme è possibile dare parametrizzazioni più deboli, cioè più generali, delle curvature e spesso si riesce a mettere la teoria off-shell: la presenza di forme aggiuntive fa sì che le equazioni del moto non siano più determinate dalle identità di Bianchi. In tal caso le 0-forme sono non fisiche, cioè prive di gradi di libertà on-shell (spariscono nel vuoto oppure sono determinate dai campi materiali in teorie accoppiate).

B) Teorie accoppiate. In generale la materia è costituita da supermultipletti che contengono 0-forme (fisiche ed eventualmente ausiliarie se è possibile una trattazione off-shell). Se i supermultipletti contengono campi scalari sono necessarie tecniche di $\sigma-$model analoghe a quelle sviluppate nel capitolo 2.

C) Teorie estese e/o in dimensione grande. In molte teorie l'ammissione delle 0-forme non è facoltativa, ma è indispensabile per poter mantenere la supersimmetria. Infatti tipicamente in un supergruppo non c'è il bilanciamento tra i gradi di libertà bosonici e fermionici (condizione necessaria per poter parlare di supersimmetria) e quindi si devono per forza introdurre altri campi che effettuino il gioco, come si è visto nel paragrafo (4.11). Inoltre il multipletto del gravitone molto spesso contiene delle 0-forme non solo nel caso delle teorie estese, ma anche nel caso minimale in dimensione grande (in $D = 7, 8, 9, 10$ sono presenti uno scalare σ e uno spinore χ).

7.3 Teorie off-shell: il caso D = 4, N = 1

In questo paragrafo cominciamo a trattare come esempi di teorie con 0-forme le formulazioni off-shell delle teorie trattate on-shell nel capitolo 5. Dev'essere chiaro che non sempre una formulazione off-shell è possibile e anzi la possibilità di una trattazione off-shell dev'essere considerata come un "accidente" tipico delle dimensioni piccole e con N piccolo.

Condizione necessaria per avere una teoria off-shell è che esista una parametrizzazione consistente con le identità di Bianchi contenente ulteriori campi ausiliari (in pratica 0-forme) oltre ai campi della teoria on-shell. Per dare un esempio concreto consideriamo la teoria $\overline{Osp(4/1)}$ con curvature e identità di Bianchi

$$\begin{cases} R^a{}_b = d\omega^a{}_b - \omega^a{}_c\omega^c{}_b \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ \varrho = \mathcal{D}\psi \end{cases} \tag{7.6}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}R^a{}_b = 0 \\ \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - i\bar{\psi}\Gamma^a\varrho = 0 \\ \mathcal{D}\varrho + \frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\psi = 0. \end{cases} \tag{7.7}$$

Assumiamo come unico vincolo il puramente convenzionale $R^a = 0$; la parametrizzazione più generale possibile è allora

$$\begin{aligned} R^{ab} &= R^{ab}_{cd} v^c v^d + \bar{\theta}^{ab}_c \psi v^c + \bar{\psi} K^{ab} \psi \\ \varrho &= \varrho_{cd} v^c v^d + H_a \psi v^a + \bar{\psi} \Omega \psi. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Il postulato (5.5) imponeva immediatamente $K = 0$, $H = 0$, $\omega = 0$, in quanto con i campi $R^{ab}{}_{cd}$, ϱ_{cd} non era possibile ottenere termini col giusto peso. Il postulato indebolito (7.2), però, permette la presenza di campi aggiuntivi e quindi la (7.8) diventa possibile[4]. Le identità di Bianchi permettono di individuare esplicitamente i campi aggiuntivi.

Cominciamo coll'identità$-T$ che si scompone in

$$\begin{aligned} &\mathit{settore}\ (0,3): \ -i\bar{\psi}\Gamma\varrho_{(0,2)} = 0 \quad (*) \\ &\mathit{settore}\ (1,2): \ R_{(0,2)} v - i\bar{\psi}\Gamma\varrho_{(1,1)} = 0 \quad (**) \\ &\mathit{settore}\ (2,1): \ R_{(1,1)} v - i\bar{\psi}\Gamma\varrho_{(2,0)} = 0 \quad (***) \end{aligned} \tag{7.9}$$

La (*) si può riscrivere nella forma[5]

$$\Gamma^d_{(\gamma|\epsilon|}\Omega^{\epsilon}_{\alpha\beta)} = 0 \tag{7.10}$$

e si può risolvere con la tecnica della scomposizione in rappresentazioni irriducibili illustrata nell'appendice B (paragrafo (B.5)). La (7.10) contiene infatti le componenti irriducibili

$$X^d_{(\alpha\beta\gamma)} = (12+8)\times 4 = 24 + 20 + 12 + 12 + 8 + 4_M; \tag{7.11}$$

l'incognita Ω contiene invece

$$\Omega^{\delta}_{(\alpha\beta)} = (6+4)\times 4_M = 12 + 12 + 8 + 4_M + 4_M; \tag{7.12}$$

dunque resta libera una 4_M e si può scrivere

$$\Omega_{(\alpha\beta)}{}^{\epsilon} = a_1 \Gamma^a_{\alpha\beta}\Gamma^{\epsilon\delta}_a \chi_\delta + a_2 \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}\Gamma^{\epsilon\delta}_{ab}\chi_\delta \tag{7.13}$$

(tale possibilità è l'unica che rispetta le simmetrie degli indici); sostituendo in (7.10) si ricava

$$\frac{a_1}{a_2}\Gamma^a_{(\alpha\beta}\Gamma^{\epsilon\delta}_a\Gamma^d_{\epsilon\gamma)} + \Gamma^{ab}_{(\alpha\beta}\Gamma^{\epsilon\delta}_{ab}\Gamma^d_{\epsilon\gamma)} = 0 \tag{7.14}$$

è quindi contraendo δ e γ si ottiene

$$\frac{a_1}{a_2} = 2 \tag{7.15}$$

---

[4] I campi K, H, ω hanno rispettivamente peso $-1, -1$ e $-1/2$.

[5] In quattro dimensioni gli indici (di Majorana) α e β si possono alzare e abbassare con $C_{\alpha\beta}$.

(si noti che a_2 può essere riassorbito in χ).
Osserviamo infine che la (7.13) può essere riscritta nella forma

$$\varrho_{(0,2)} = \bar{\psi}\Gamma^a\psi\Gamma_a\chi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi\Gamma_{ab}\chi. \tag{7.16}$$

Passiamo ora alla (**) che si scrive

$$K^{ab}_{\alpha\beta} - i\Gamma^a_{(\alpha\varepsilon}H^{\varepsilon b}_{\beta)} = 0 \Rightarrow \ i\Gamma^{(a}_{(\alpha\varepsilon}H^{\varepsilon b)}_{\beta)} = 0, \ K^{ab}_{\alpha\beta} = i\Gamma^{[a}_{(\alpha\varepsilon}H^{\varepsilon b]}_{\beta)}; \tag{7.17}$$

il contenuto dell'equazione è (si usa la tabella delle rappresentazioni di $SO(1,3)$ in appendice)

$$\begin{aligned} X^d_{(\alpha\beta)c}: \quad & (6+4)\times(1+6+9) = (6) + (10+9+9'+6+1+1')+ \\ & (30+9+9'+6)+(4)+(16+4+4')+(16+16'+4) \end{aligned} \tag{7.18}$$

mentre il contenuto delle incognite è

$$\begin{aligned} H^{\varepsilon b}_{\beta}: \quad & (4_M\times 4_M)\times 4 = (1+1'+4+4'+6)\times 4 \\ & = 4+4'+(1+6+9)+(1'+6+9')+(16+4+4') \\ K^{ab}_{\alpha\beta}: \quad & (6+4)\times 6 = (10+9+9'+6+1+1')+(16+4+4'). \end{aligned} \tag{7.19}$$

Restano quindi libere due 4', una 1 ed una 1':

$$H^{\varepsilon}_{b\beta} = iA^{\underline{4'}}_{b}\Gamma^{\varepsilon}_{5\beta} + \mathcal{P}^{\underline{1'}}(\Gamma_5\Gamma_b)^{\varepsilon}{}_{\beta} + i\mathcal{S}^{\underline{1}}\Gamma^{\varepsilon}_{b\beta} + i(\Gamma_5\Gamma_b{}^c)^{\varepsilon}{}_{\beta}B^{\underline{4'}}_{c} \tag{7.20}$$

$$K^{ab}_{\alpha\beta} = -a_1 i\mathcal{P}^{\underline{1'}}(\Gamma_5\Gamma^{ab})_{\alpha\beta} - a_2\mathcal{S}^{\underline{1}}\Gamma^{ab}_{\alpha\beta} - a_3 i\varepsilon^{abcd}B^{\underline{4'}}_{c}\Gamma^d_{\alpha\beta} \tag{7.21}$$

sostituendo in (7.17) si ricava

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1. \tag{7.22}$$

Per ricavare la parametrizzazione reonomica di $R^{ab}_{c\delta}$ risolviamo infine la (***) che dà come al solito

$$\theta_{abc} = -2i\Gamma_{[a}\varrho_{b]c} + i\Gamma_c\varrho_{ab} \tag{7.23}$$

Le restanti identità di Bianchi non danno più le equazioni del moto, bensì le derivate esterne dei campi ausiliari (cioè la loro legge di trasformazione per supersimmetria, ovvero la loro parametrizzazione esterna) in termini delle componenti off-shell del gravitino $\varrho^{\underline{12}}$ e $\varrho^{\underline{4}}$ (si veda [19]).

In conclusione la teoria $D = 4$, $N = 1$ Bianchi consistente più generale possibile contiene i seguenti campi ausiliari:

Campi ausiliari della supergravità $D=4,\ N=1$ off-shell

χ	peso	-1/2,	gradi di libertà off-shell	4
A_a	"	-1	"	4
B_a	"	-1	"	4
$\mathcal{S}$	"	-1	"	1
$\mathcal{P}$	"	-1	"	1

Si noti che il numero di gradi di libertà bosonici e fermionici (contando anche il gravitone (6) e il gravitino (12)) coincide (16+16). È possibile dare anche una parametrizzazione con meno campi ausiliari (parametrizzazione minimale) imponendo il vincolo

$$\varrho_{(0,2)} = 0 \quad (\chi = 0). \tag{7.24}$$

Le identità di Bianchi (identità$-\varrho$ settore (0,3)) danno allora $B_a = \frac{1}{2}A_a$ e quindi

$$\begin{cases} R^{ab} = R^{ab}_{(0,2)} + \bar{\theta}^{ab}_c(\varrho_{ef})\psi v^c - \mathcal{S}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi - i\mathcal{P}\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma^{ab}\psi + \frac{i}{2}\varepsilon^{abcd}\mathcal{A}_c\bar{\psi}\Gamma_d\psi \\ \varrho = \varrho_{(2,0)} + i\mathcal{A}_a\Gamma_5\psi v^a + \frac{i}{2}\Gamma_5\Gamma^{ab}\psi\mathcal{A}_a v_b + i\mathcal{S}\Gamma_a\psi v^a + \mathcal{P}\Gamma_5\Gamma_a\psi v^a \end{cases} \tag{7.25}$$

e il bilancio bosoni-fermioni è ancora buono (12+12).

Le supertrasformazioni sul supermultipletto off-shell chiudono un'algebra off-shell, in quanto la parametrizzazione (7.25) non implica le equazioni del moto. Ciò significa che la

$$[\ell_{\varepsilon_1}, \ell_{\varepsilon_2}] = \ell_{[\varepsilon_1,\varepsilon_2]} \tag{7.26}$$

(valida se valgono le identità di Bianchi, cioè la condizione di integrabilità $d^2 = 0$) è assicurata senza far uso delle equazioni del moto: le supertrasformazioni sono simmetrie non solo dello spazio delle soluzioni ma anche dello spazio delle configurazioni, come avviene per le simmetrie ordinarie.

7.4 Altre teorie off-shell.

È immediato applicare le tecniche studiate in precedenza al al caso $D=3, N=1$ basato su un'algebra soffice apparentemente identica alla (7.6); tuttavia la soluzione è diversa poichè si lavora in dimensione diversa. Per individuare la teoria si può procedere come nel caso $D=4$, $N=1$, oppure osservare che il conto dei gradi di libertà off-shell (v =3 gradi bosonici, ψ = 4 gradi fermionici) suggerisce immediatamente di cercare una parametrizzazione con un solo campo scalare ausiliario: tentiamo quindi l'ansatz[6]

$$\Omega = 0, \quad H_c = i\Gamma_c\sigma, \quad K^{ab} = \alpha\sigma\Gamma^{ab}, \quad \theta^{ab}{}_c(\varrho_{ef}) = \text{solita espressione}. \tag{7.28}$$

[6] Si noti che il vincolo $\Omega = 0$, a differenza che nel caso $D=4$, è imposto dalle stesse identità di Bianchi. Infatti l'identità$-T$ settore (0,3)

$$\Gamma^a_{((\gamma|\delta|}\Omega^\delta_{\alpha\beta)} = 0 \tag{7.27}$$

impone $\Omega^\delta_{\alpha\beta} = 0$.

L'identità$-T$ settore (1,2) fissa subito $\alpha = -1$ e quindi

$$R^{ab} = R^{ab}_{(2,0)} + \bar{\theta}^{ab}_{c} \psi v^c - \sigma \bar{\psi} \Gamma^{ab} \psi, \quad \varrho = \varrho_{(2,0)} + i\sigma \Gamma^c \psi v_c, \quad R^a = 0. \tag{7.29}$$

La soluzione delle identità di Bianchi è invece molto più complicata in teorie estese, in quanto bisogna tenere conto anche delle rappresentazioni del gruppo degli automorfismi: nella pratica, possono nascere molti più campi ausiliari [7].

Qui ci limitiamo a riportare in una tabella i multipletti off-shell che si ottengono risolvendo le identità di Bianchi nei casi $N = 2$ in $D = 3, 4, 5$. [8]

Supergravità off-shell in $D = 3, 4, 5$ $N = 2$

Dim.	Bosoni	Fermioni	Gradi di lib.
D = 3	$v^{\underline{3}}, \mathcal{A}_a^{\underline{3}}, \sigma_i^{\underline{2}}$	$\psi_i^{\underline{8}}$	8+8
D = 4	$v^{\underline{6}}, A^{\underline{3}}, \mathcal{T}_{[ab]}^{\underline{6}}, \mathcal{A}_a^{\underline{4}}, \mathcal{B}_a^{\underline{4}}, \mathcal{C}_a^{\underline{4}}, \mathcal{A}^{\underline{8}}, A_{aij}^{\underline{8}}, \mathcal{S}^{\underline{1}}, \mathcal{T}^{\underline{2}}, \mathcal{P}, \mathcal{P}_{ij}^{\underline{2}}$	$\psi_i^{\underline{32}}, \chi_i^{\underline{8}}$	40+40
D = 5	$v^{\underline{10}}, B^{\underline{4}}, \mathcal{T}_{[ab]}^{\underline{10}}, \mathcal{A}_a^{\underline{5}}, \mathcal{B}_a^{\underline{5}}, \mathcal{A}_{aij}^{\underline{10}}, \mathcal{S}^{\underline{1}}, \mathcal{T}^{\underline{2}}, \mathcal{S}_{ij}^{\underline{2}}$	$\psi_i^{\underline{32}}, \chi_i^{\underline{8}}, \phi_i^{\underline{8}}$	48+48

Le teorie $D = 4, N = 2$ e $D = 5, N = 2$ sono trattate con tutti i dettagli in [19]; la teoria $D = 3, N = 2$ si può ottenere dalla $D = 4, N = 2$ per riduzione dimensionale.

Nota: la struttura delle teorie di supergravità è tale per cui per N grande è impossibile determinare una parametrizzazione off-shell; in pratica per $D = 4$ il limite è a $N = 3$, cioè non esistono teorie off-shell con $N \geq 3$. Il motivo di questo comportamento sarà illustrato con un esempio fra qualche paragrafo.

7.5 Teorie accoppiate: il caso di Super Yang-Mills

La definizione di supermultipletto data nel capitolo 4 (campi a spin diversi + regole di supertrasformazione) evidentemente vale anche per altri multipletti oltre a quello del gravitone. Ad esempio in tre dimensioni [9] è possibile mettere assieme uno scalare ed uno spinore ((1+1) gradi di libertà) oppure uno spinore ed un vettore ((1+1) gradi di libertà); in 4 dimensioni lo stesso vale per uno scalare complesso ed uno spinore di Weyl ((2+2) gradi di

[7] Per esempio oltre ai campi ausiliari di prima generazione che stanno nella parametrizzazione dei campi fisici compaiono anche dei campi ausiliari di seconda generazione nella parametrizzazione dei campi della prima generazione; si veda per esempio [19]

[8] Nella tabella compaiono oggetti con indici X_{ij}; si intende che che i e j sono simmetrizzati e a traccia nulla (ciò stanno nella rappresentazione 2-dimensionale di $SO(2)$.)

[9] La deduzione euristica del contenuto dei supermultipletti basata sul conto dei gradi di libertà on-shell che stiamo effettuando funziona in tutti i casi semplici ed è in perfetto accordo colla deduzione più rigorosa sviluppata nell'appendice C; rimandiamo a quest'ultima per una tabella con tutti i possibili supermultipletti in tutte le possibili dimensioni.

libertà) o ancora per uno spinore ed un vettore ((2+2) gradi di libertà); in cinque dimensioni i due tipi di multipletto (multipletto scalare e di Yang-Mills) sono unificati in uno scalare reale, uno spinore e un vettore ((1+3)+4 gradi di libertà). Si parla di supergravità accoppiata quando oltre al settore gravitazionale si considerano altri supermultipletti: in genere sono questi ultimi che contengono le 0-forme.

L'accoppiamento più semplice avviene quando la materia è costituita da un insieme di campi vettoriali a valori nella rappresentazione aggiunta di un determinato gruppo di gauge H_{YM} (caratterizzato da generatori $T_{\mathcal{I}}$, connessione $A = T_{\mathcal{I}}A^{\mathcal{I}}$ e curvatura $F^{\mathcal{I}} = dA^I + \frac{e}{2}c^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}\mathcal{K}}A^{\mathcal{J}}A^{\mathcal{K}}$; $\mathcal{I}$ è un'indice nella rappresentazione aggiunta di H_{YM} e sarà per lo più sottointeso; ugualmente si abbrevierà $F\lambda$ in luogo di $Tr(F\lambda) = F_{\mathcal{I}}\lambda^{\mathcal{I}}$); dal punto di vista del group manifold approach si può pensare di estendere il supergruppo gravitazionale G_0 a $G = G_0 \times H_{YM}$ e il gruppo di gauge H_0 a $H = H_0 \times H_{YM}$; in tal modo si introducono delle 1-forme bosoniche che vanno compensate con delle 0-forme aggiuntive λ (partner fermionici o gluini).

Osservando la tabella in appendice C (o semplicemente contando i gradi di libertà) si deduce che tale accoppiamento è possibile solo in quattro casi:

$$\begin{array}{lll} D=3,\ N=1 & (A,\lambda) & \text{multipletto } 1+1 \\ D=4,\ N=1 & (A,\lambda) & \text{multipletto } 2+2 \\ D=6,\ N=2 & (A,\lambda) & \text{multipletto } 4+4 \\ D=10,\ N=1 & (A,\lambda) & \text{multipletto } 8+8. \end{array}$$

Negli altri casi i supermultipletti di Yang-Mills contengono anche campi scalari [10] e si devono usare tecniche di $\sigma-$model. Illustreremo il problema tra qualche paragrafo; per ora ci limitiamo a trattare il caso più semplice possibile ($D = 3, N = 1$) in cui si hanno le curvature e le identità di Bianchi

$$\begin{cases} R^a{}_b = d\omega^a{}_b - \omega^a{}_c\omega^c{}_b \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar\psi\Gamma^a\psi \\ \varrho = \mathcal{D}\psi \\ F = dA + AA \\ \Lambda = \mathcal{D}\lambda + [A,\lambda] \end{cases} \tag{7.30}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}R^a{}_b = 0 \\ \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - i\bar\psi\Gamma^a\varrho = 0 \\ \mathcal{D}\varrho + \frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\psi = 0 \\ DF = 0 \\ D\Lambda - [F,\lambda] + \frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\lambda = 0. \end{cases} \tag{7.31}$$

Le (7.31b) sono già state risolte in termini del campo ausiliare σ; poichè questo ha

[10] Sono del tipo (A, λ, σ).

peso -1 on-shell dev'essere[11]

$$\sigma(\lambda) = \alpha\bar{\lambda}\lambda; \tag{7.32}$$

e la costante α può essere riassorbita in λ.
Sfruttando la (7.29)[12] le identità$-F$ si scrivono [13]

$$\begin{array}{ll} settore\ (0,3): & D_{(-1,2)}F_{(1,1)} = 0 \\ settore\ (1,2): & D_{(-1,2)}F_{(2,0)} + D_{(0,1)}F_{(1,1)} = 0 \\ settore\ (2,1): & D_{(0,1)}F_{(2,0)} + D_{(1,0)}F_{(1,1)} = 0; \end{array} \tag{7.33}$$

la prima equazione

$$\frac{i}{2}F_{a\alpha}\bar{\psi}\Gamma^a\psi\psi^\alpha = 0 \tag{7.34}$$

dice che la parametrizzazione di $F_{(1,1)}$ dev'essere del tipo[14]

$$F_{(1,1)} = 2i\bar{\psi}\Gamma_c\hat{\lambda}v^c \quad (F_{a\alpha} = 2i\Gamma_{a\alpha\beta}\hat{\lambda}^\beta) \tag{7.35}$$

con $\hat{\lambda}$ campo spinoriale di peso -1/2 che chiaramente si può identificare con λ; la seconda equazione

$$iF_{ab}\bar{\psi}\Gamma^a\psi v^b - 2\bar{\psi}i\Gamma_a D_{(0,1)}\lambda v^a = 0 \tag{7.36}$$

fornisce la parametrizzazione di Λ

$$\Lambda_{(0,1)} = D_{(0,1)}\lambda = -\frac{1}{4}F_{ab}\Gamma^{ab}\psi; \tag{7.37}$$

la terza equazione

$$D_{(0,1)}F_{ab}v^a v^b - 2i\bar{\Lambda}_b\Gamma_a\psi v^a v^b + 2i\bar{\lambda}\Gamma_a H_b\psi v^a v^b = 0 \tag{7.38}$$

dà invece le derivate spinoriali di F_{ab}; esse permettono di ricavare le equazioni del moto di F e λ se si usano le identità$-\Lambda$:

$$\begin{array}{ll} settore\ (0,2): & D_{(-1,2)}\Lambda_{(1,0)} + D_{(0,1)}\Lambda_{(0,1)} + R_{(0,2)}\lambda = 0 \\ settore\ (1,1): & D_{(0,1)}\Lambda_{(1,0)} + D_{(1,0)}\Lambda_{(0,1)} + R_{(1,1)}\lambda - [F_{(1,1)}\lambda] = 0 \end{array} \tag{7.39}$$

[11] I campi ausiliari on-shell sono esprimibili in termini dei campi fisici per definizione.
[12] Da questa discende l'azione delle derivate $D_{(r,s)}$ definite nel capitolo 5. In particolare si ha $D_{(-1,2)}v = \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma\psi$, $D_{(2,-1)}\psi = \varrho_{ab}v^a v^b D_{(1,0)}$, $D_{(1,0)}\psi = H_c\psi v^c = i\sigma\Gamma_c\psi v^c$.
[13] Assumiamo il vincolo standard $F_{(0,2)} = 0$.
[14] Il fattore 2 è puramente convenzionale.

ovvero

$$\begin{array}{l} \frac{i}{2}\Lambda_a\bar{\psi}\Gamma^a\psi - \frac{1}{4}D_{(0,1)}F_{ab}\Gamma^{ab}\psi + \bar{\psi}K\psi\lambda = 0 \\ D_{(0,1)}\Lambda_a v^a + \frac{1}{4}D_aF_{bc}\psi v^a - \frac{1}{4}F_{bc}\Gamma^{bc}H_a\psi v^a + \bar{\theta}_c\psi v^c\lambda + [2i\bar{\lambda}\Gamma^a\psi v_a, \lambda] = 0. \end{array} \tag{7.40}$$

La prima si riscrive

$$\frac{i}{2}\Lambda_a\bar{\psi}\Gamma^a\psi - \frac{i}{2}(\bar{\Lambda}_{[a}\Gamma_{b]} - \bar{\lambda}\Gamma_{[a}H_{b]})\psi\Gamma^{ab}\psi + \frac{1}{4}\bar{\psi}K^{ab}\psi\Gamma_{ab}\lambda = 0 \tag{7.41}$$

ovvero

$$\frac{i}{2}\Lambda^\gamma_a\Gamma^a_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\Lambda_{a\epsilon}\Gamma^\epsilon_{b(\beta}\Gamma^{ab\gamma}{}_{\alpha)} + \frac{i}{2}\lambda_\epsilon\Gamma^\epsilon_{a\delta}H^\delta_{b(\beta}\Gamma^{ab\gamma}{}_{\alpha)} + \frac{1}{4}K^{ab}_{\alpha\beta}\Gamma_{ab\delta}^{\ \ \ \gamma}\lambda^\delta = 0 \tag{7.42}$$

e quindi, contraendo gli indici β e γ, dà un' equazione di tipo Dirac[15]

$$i\Lambda^\gamma_a\Gamma^a_{\gamma\alpha} = -\frac{1}{4}\lambda^\gamma(i\Gamma_aH_b\Gamma^{ab} + K_{ab}\Gamma^{ab})_{\gamma\alpha}. \tag{7.43}$$

La seconda invece dà le derivate spinoriali di Λ_a

$$D_{(0,1)}\Lambda_a = -\tfrac{1}{4}D_aF_{bc}\Gamma^{bc}\psi - \tfrac{1}{4}F_{bc}\Gamma^{bc}H_a\psi - \bar{\theta}_a\psi\lambda - [2i\bar{\lambda}\Gamma_a\psi, \lambda] = 0 \tag{7.44}$$

indispensabili per ottenere un'equazione di tipo Yang-Mills derivando l'equazione di Dirac; infatti risulta

$$D_\gamma i\Gamma^a_{\alpha\beta}\Lambda^\beta_a = i\Gamma^a_{\alpha\beta}(-\frac{1}{4}D_aF_{bc}\Gamma^{bc\beta}_\gamma) + \cdots \tag{7.45}$$

e quindi, contraendo con $\Gamma^{d\gamma}{}_\alpha$, poichè

$$\frac{1}{4}D_aF_{bc}Tr(\Gamma^a\Gamma^{bc}\Gamma^d) = D_aF_{bc}\eta^{ab}\eta^{cd} = D_aF^{ad} \tag{7.46}$$

la (7.43) dà un qualcosa del tipo[16]

$$D_aF^{ab} = X^b(F_{ab}\lambda\lambda, \varrho_{ab}\lambda). \tag{7.47}$$

In conclusione anche per il settore materiale vale ciò che vale per il settore gravitazionale: le identità di Bianchi bosoniche danno la parametrizzazione delle componenti

[15] La (7.43) diventa più esplicita usando $H_b = i\bar{\lambda}\lambda\Gamma_b$, $K^{ab} = -\bar{\lambda}\lambda\Gamma^{ab}$: si ottiene

$$i\Gamma^aD_a\lambda = 3\bar{\lambda}\lambda\lambda.$$

[16] La forma esplicita si può ottenere svolgendo tutti i conti ma non ci interessa particolarmente; ci basta notare che l'espressione che si ottiene è covariante per trasformazioni di Lorentz e di gauge ed ha peso -2.

esterne delle curvature e le identità fermioniche danno le equazioni del moto dei campi fisici (se la teoria è on-shell: ciò capita in $D = 3, 10$). In particolare le identità$-\varrho$ danno l'equazione del gravitino e quella del gravitone.

Identità$-\varrho$:

$$\begin{array}{ll} settore(0,3): & 0 = 0 \\ settore(1,2): & i\varrho_{ac}\bar{\psi}\Gamma^a\psi v^c + iD_{(0,1)}\sigma\Gamma_c\psi v^c - \frac{1}{4}\bar{\psi}\theta^{ab}{}_c\Gamma_{ab}\psi v^c = 0 \\ settore(2,1): & \mathcal{D}_{(0,1)}\varrho_{ab}v^a v^b - \frac{1}{4}R^{ab}{}_{cd}\Gamma_{ab}\psi v^c v^d; \end{array} \tag{7.48}$$

la prima equazione si può scrivere

$$i\varrho^{\gamma}_{ac}\Gamma^a_{\alpha\beta} = -i\mathcal{D}_{(\alpha}\sigma\Gamma^{\gamma}_{c\beta)} + \tfrac{1}{4}\theta^{ab}{}_{c(\alpha}\Gamma^{\gamma}_{ab\beta)} \tag{7.49}$$

e, contraendo con $\Gamma^{cd\beta}{}_{\gamma}$ tenendo conto delle proprietà delle matrici Γ, si ottiene un'equazione del tipo

$$(i\Gamma^{dac}\varrho_{ac})_\alpha = -i\Gamma^d_{\alpha\beta}\mathcal{D}^\beta\sigma; \tag{7.50}$$

poichè le derivate spinoriali di σ sono note on-shell

$$D_{(0,1)}\sigma = \mathcal{D}_{(0,1)}(\bar{\lambda}\lambda) = 2\bar{\lambda}D_{(0,1)}\lambda = -\tfrac{i}{2}\bar{\lambda}F_{ab}\Gamma^{ab}\psi \tag{7.51}$$

la (7.50) assume la forma ordinaria

$$\Gamma^{dbc}\varrho_{bc} = \frac{1}{2}\Gamma^{dab}\Gamma_{ab}\lambda + F^d{}_b\Gamma^b\lambda. \tag{7.52}$$

Derivando la (7.52) e sfruttando la conoscenza delle derivate spinoriali di ϱ_{ab} dall'identità$-\varrho$ settore (2,1) si può ottenere un'equazione di Einstein del tipo standard

$$\mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = \alpha(F^{ac}F_{cb} + \frac{1}{4}\eta^a{}_b F_{cd}F^{cd}) + \beta(i\bar{\lambda}\Gamma^{(a}\Lambda_{b)} - i\eta^a{}_b\bar{\lambda}\Gamma^a\Lambda_a). \tag{7.53}$$

7.6 Teorie di SYM off-shell

Quanto si è visto nel paragrafo precedente vale se la teoria è on-shell; se la teoria è off-shell invece le equazioni del moto sono vacanti. Questo fenomeno avviene se la parametrizzazione di $\Lambda_{(0,1)}$ contiene dei campi ausiliari. In tal caso le identità$-\Lambda$ danno le derivate spinoriali di tali campi e non le equazioni di Dirac e di Yang-Mills; ciò capita in $D = 4$ e $D = 6$.

Nel primo caso l'identità$-F$ settore (1,2) dà

$$D_{(0,1)}\lambda = -\frac{1}{4}F_{ab}\Gamma^{ab} + iP\Gamma^5; \tag{7.54}$$

la dimostrazione usando la decomposizione in rappresentazioni irriducibili [17] avviene come segue: in seguito alla parametrizzazione (7.25) la (7.36) si scrive

$$iF_{ba}\Gamma^b_{\alpha\beta} + i\Gamma_{a(\alpha\gamma}D^\gamma\lambda_{\beta)} = 0 \tag{7.55}$$

e contiene le rappresentazioni $X_{a(\alpha\beta)} \sim 4 \times (4+6) = (1+6+9)+(4+4'+16)$; poichè le incognite sono $F_{ab} \sim 6$ e $D_\alpha\lambda_\beta \sim 4_M \times 4_M = 1+1'+4+4'+6$ resta libera oltre alla 6 anche la $1' \sim P$.

Il campo pseudoscalare P completa il multipletto vettoriale off-shell (A, λ, P) (gradi di libertà (3+1)+4); se si impone $P = 0$ (o $P = cost$) la teoria viene messa on-shell e i campi ausiliari $A^a, \mathcal{S}, \mathcal{P}$ si possono scrivere nella forma

$$A^a = \bar\lambda\Gamma_5\Gamma_a\lambda, \quad \mathcal{S} = \bar\lambda\lambda, \quad \mathcal{P} = \bar\lambda\Gamma_5\lambda; \tag{7.56}$$

se si rimane a livello off-shell invece non si riescono più ad ottenere le equazioni del moto; in particolare l'identità $-\Lambda$ settore (0,2) fornisce le derivate spinoriali di P in termini degli altri campi e non l'equazione di Dirac.

Nel caso 6-dimensionale[18] l'identità$-F$ settore (1,2)[19]

$$iF_{ab}\bar\psi_i\Gamma^a\psi^i v^b + \bar\psi_i\Gamma_a M^i{}_j\psi^j v^a = 0 \quad (M^{i\alpha}{}_{j\beta} \equiv \mathcal{D}_{j\beta}\lambda^{i\alpha}) \tag{7.57}$$

ha il seguente contenuto in rappresentazioni irridubili[20]

$$(6,1)\times[(6,1)+(10,3)] = (1+15+20,1)+(15+45,3); \tag{7.58}$$

il contenuto delle incognite è

$$F_{ab} \sim 15, \quad M^{i\alpha}{}_{j\beta} = (1+15, 1+3) \tag{7.59}$$

restano allora libere una (15,1) (F_{ab}) ed una (1,3) ($M_{(ij)}$): il multipletto di Yang-Mills off-shell è costituito dai campi fisici A, λ^i (5+8 gradi di libertà) e dai campi ausiliari $M_{(ij)}$ (3 gradi di libertà) che entrano nella parametrizzazione di Λ nella forma

$$\Lambda^i_{(0,1)} = -\frac{1}{4}F_{ab}\Gamma^{ab}\psi^i + M^{(ij)}\psi_j. \tag{7.60}$$

[17] Usiamo questo metodo per motivi didattici, tuttavia basterebbe usare solo l' antisimmetria della matrice Γ_5 per provare l'ansatz (7.54).

[18] In $D = 6$ si usano spinori di Majorana-Weyl simplettici e si ha una teoria estesa con gruppo di simmetria $Usp(2)$; gli indici i e j sono alzati e abbassati con ε_{ij} mentre gli indici chirali e antichirali sono collegati da $C_{\alpha\dot\beta}$; le matrici Γ si scrivono $\Gamma^a_{[\alpha\beta]}$, $\Gamma^{ab\alpha}{}_\beta$, $\Gamma^{abc}_{(\alpha\beta)}$ $\Gamma^{[\alpha\beta]}_a$, $\Gamma_{ab\alpha}{}^\beta$, $\Gamma^{(\alpha\beta)}_{abc}$.

[19] L'equazione assume questa forma in qualunque parametrizzazione del settore gravitazionale che rispetti i vincoli $\varrho_{(0,2)} = 0$ e $R^a_{(0,2)} = 0$.

[20] Usiamo le convenzioni dell'appendice B: nell'espressione (n, m) n è la dimensione della rappresentazione di $SO(1,5)$ ed m di $Usp(2)$.

Annullando questi ultimi la teoria viene messa on-shell.

Osserviamo infine che lo stesso calcolo in dieci dimensioni dà direttamente una teoria on-shell in quanto la solita identità$-F$ ha contenuto $10\times(10+126) = (1+45+54)+(210+1050)$ e quindi fissa completamente le incognite in $M^{\alpha}{}_{\beta} = 16^{+} \times 16^{-} = 1+45+210$: non ci sono campi ausiliari (come non ce ne sono in tre dimensioni).

7.7 Teorie di SYM dal punto di vista lagrangiano

Le teorie di SYM on-shell si possono sviluppare anche dal punto di vista lagrangiano. Qui ci limitiamo ad accennare la trattazione nel caso $D = 3, N = 1$.

Per quanto si è detto nell'introduzione l'azione sarà del tipo (conviene distinguere le 0-forme cinetiche dalle altre 0-forme e metterle nell'azione I_G)

$$I = I_G(v, \psi, A, f) + I_0(v, \psi, \lambda, f) \tag{7.61}$$

con

$$I_G = R^{ab} v^c \varepsilon_{abc} + \alpha \bar{\varrho}\psi + \beta (F f^{ab} v^c - \frac{1}{6} f_{gh} f^{gh} v^a v^b v^c)\varepsilon_{abc} \tag{7.62}$$

e

$$I_0(\lambda) = I_{ordine\ 1}(\lambda) + I_{ordine\ 2}(\lambda) + I_{ordine\ 3}(\lambda) + I_{ordine\ 4}(\lambda) \tag{7.63}$$

con[21]

$$I_{ordine\ 1} = i a_1 \bar{\lambda}\Gamma^a \Lambda v^b v^c \varepsilon_{abc} + a_2 F \bar{\lambda}\psi + i a_3 f_{ab} \bar{\lambda}\Gamma_c \psi v^c v^d \varepsilon^{bc}{}_d \tag{7.64}$$

$$I_{ordine\ 2} = b_1 \bar{\lambda}\lambda \bar{\psi}\Gamma^a \psi v_a + b_2 \bar{\lambda}\lambda R^a v_a \tag{7.65}$$

$$I_{ordine\ 3} = 0 \text{ per invarianza di gauge e di scala} \tag{7.66}$$

$$I_{ordine\ 4} = c_1 (\bar{\lambda}\lambda)^2 v^a v^b v^c \varepsilon_{abc}. \tag{7.67}$$

Non ci sono termine di ordine maggiore di 4 in λ perchè “troppo leggeri”.

La condizione di vuoto su I_G fissa $\alpha = -2$; β è fissato dalla normalizzazione (arbitraria) di F, f, λ; le componenti esterne delle equazioni variazionali danno a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 richiedendo la compatibilità con la parametrizzazione reonomica determinata via Bianchi; il termine quartico c_1 è fissato dall'invarianza per supersimmetria C5).

[21] Consideriamo di ordine 1 in λ anche il termine cinetico $i\bar{\lambda}\Gamma^a \Lambda v^b v^c \varepsilon_{abc}$.

7.8 L'accoppiamento con gli scalari in teorie estese

In questo paragrafo diamo una trattazione generale delle teorie in cui compaiono campi scalari[22]; per dei richiami sulle tecniche di $\sigma-$model impiegate si rimanda al capitolo 2.

In generale una teoria di supergravità accoppiata con campi scalari contiene oltre al gravitone v^a, ai gravitini $\psi^{\alpha i}$, e alla connessione ω^{ab} (più eventuali altre $k-$forme ($k = 1, 2, \ldots$) nel multipletto del gravitone) dei campi scalari σ con i loro partner fermionici χ; si hanno quindi curvature ed identità di Bianchi del tipo

$$\left\{ \begin{array}{ll} R^a{}_b = d\omega^a{}_b - \omega^a{}_c \omega^c{}_b & \mathcal{D}R^a{}_b = 0 \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi & \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - i\bar{\psi}\Gamma^a\varrho = 0 \\ \varrho^i = \mathcal{D}\psi^i & \mathcal{D}\varrho^i + R\psi^i = 0 \\ \breve{\sigma} = d\sigma & d\breve{\sigma} = 0 \\ X = \mathcal{D}\chi & \mathcal{D}X + R\chi = 0 \\ \ldots & \ldots \end{array} \right. \tag{7.68}$$

e si cercano parametrizzazioni invarianti del tipo[23]

$$\left\{ \begin{array}{l} \breve{T} = 0 \\ R = R_{(2,0)} + R_{(1,1)}(\theta) + R_{(0,2)}(\chi\chi) \\ \varrho = \varrho_{(2,0)} + \varrho_{(1,1)}(\chi\chi) \\ \breve{\sigma} = \breve{\sigma}_{(1,0)} + \breve{\sigma}_{(0,1)}(\chi) \\ X = X_{(1,0)} + X_{(0,1)}(\Sigma) \\ \ldots \end{array} \right. \tag{7.69}$$

L'esistenza di parametrizzazioni non banali impone dei forti vincoli sulla struttura dei supermultipletti e della varietà scalare; per illustrare il problema consideriamo come esempio concreto il caso $D = 3, N = 8$.[24]

1. È chiaro che per rispettare la simmetria $SO(8)$ anche i campi scalari dovranno possedere un indice in una rappresentazione di $SO(8)$[25].

[22] Ci limitiamo a teorie on-shell perchè in tal caso la forma dei supermultipletti materiali è nota a priori per le considerazioni svolte nell'appendice C; i supermultipletti off-shell (se esistono) si ricavano invece cercando soluzioni più generali delle identità di Bianchi.

[23] σ ha peso 0, χ peso -1/2.

[24] Una descrizione nell'approccio per componenti si può trovare in [40].

[25] Le rappresentazioni fondamentali di $SO(8)$ sono tre: la rappresentazione vettoriale $X^i \longrightarrow \Lambda^i{}_j X^j$, la rappresentazione spinoriale chirale (di dimensione 8) $X^\iota \longrightarrow \Lambda^\iota{}_\kappa X^\kappa$, e la rappresentazione spinoriale antichirale $X^{\dot{\iota}} \longrightarrow \Lambda^{\dot{\iota}}{}_{\dot{\kappa}} X^{\dot{\kappa}}$; le loro proprietà sono studiate nell'appendice B. In particolare sono tutte equivalenti e gli indici si possono alzare e abbassare col delta di Kronecker.

2. Per rispettare la supersimmetria gli spinori saranno nello stesso numero degli scalari ed esisterà una parametrizzazione del tipo

$$\begin{array}{ll} d\sigma_{(0,1)} = & \text{combinazione lineare a coefficienti} \\ & SO(1,2)\times SO(8) - \text{invarianti di } \chi \text{ e } \psi \\ \Longrightarrow & d\sigma^{\iota}_{(0,1)} = \Gamma^{\iota}_{i\dot{\imath}}\bar{\chi}^{\dot{\imath}}\psi^{i}; \end{array} \tag{7.70}$$

ciò impone che gli scalari abbiano un indice ι e gli spinori un indice $\dot{\imath}$ (gli unici oggetti $SO(8)-$invarianti con tre indici sono le matrici $\Gamma^{\iota}_{i\dot{\imath}}$). Se vi sono più supermultipletti materiali del tipo $(\sigma^{\iota r}, \chi^{\dot{\imath}r})$ l'ulteriore indice $r = 1,\ldots n$ permette un'ulteriore simmetria $SO(n)$ sugli spinori $\chi^{\dot{\imath}r}$.

3. A questo punto la richiesta di compatibilità tra la simmetria $SO(8)\times SO(n)$ della teoria estesa e le simmetrie interne della varietà scalare K impone che la connessione $Q^{\iota r}{}_{\kappa s}$ di K debba spezzarsi come segue:

$$Q^{\iota r}{}_{\kappa s} = \delta^{r}{}_{s}Q^{\iota}{}_{\kappa} + \delta^{\iota}{}_{\kappa}Q^{r}{}_{s} \tag{7.71}$$

in questo modo si può rendere locale la simmetria $SO(8)\times SO(N)$ definendo come curvature degli spinori[26]

$$\begin{array}{l} \varrho^{i} = D\psi^{i} = \mathcal{D}\psi^{i} + Q^{i}{}_{j}\psi^{j} \\ \chi^{\dot{\imath}r} = D\chi^{\dot{\imath}r} = \mathcal{D}\chi^{\dot{\imath}r} + Q^{\dot{\imath}}{}_{\dot{\kappa}}\chi^{\dot{\kappa}r} + Q^{r}{}_{s}\chi^{\dot{\imath}s} \end{array} \tag{7.72}$$

La formula (7.71) è una condizione fortissima sulla struttura geometrica della varietà scalare[27]: in pratica l'unica varietà $8n-$dimensionale che la soddisfa è

$$K = SO(8,n)/SO(8)\times SO(n).$$

4. In conclusione l'algebra soffice della $D = 3,\ N = 8$ accoppiata sarà (nelle varietà omogenee G/H la simmetria privilegia la base P e la connessione Q che sono state definite nel capitolo 2; per questo motivo non usiamo la base coordinata $d\sigma^{\iota r}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} R^{a} = \mathcal{D}v^{a} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^{a}\psi \\ \varrho^{i} = D\psi^{i} \\ P^{\iota}{}_{r} = L^{\iota}{}_{I}\partial_{\kappa s}L^{I}{}_{r}d\sigma^{\kappa s} \\ X^{\dot{\imath}r} = D\chi^{\dot{\imath}r} \\ R^{a}{}_{b} = d\omega^{a}{}_{b} - \omega^{a}{}_{c}\omega^{c}{}_{b} \\ R^{i}{}_{j} = dQ^{i}{}_{j} + Q^{i}{}_{k}Q^{k}{}_{j} = -P^{i}{}_{r}P_{j}{}^{r} \\ R^{r}{}_{s} = dQ^{r}{}_{s} + Q^{r}{}_{t}Q^{t}{}_{s} = -P_{i}{}^{r}P^{i}{}_{s}; \end{array} \right. \tag{7.73}$$

[26] La connessione $SO(8)$ sugli indici i, ι e $\dot{\imath}$ è data da $Q_{ij} = \frac{1}{4}Q_{\iota\kappa}\Gamma^{\iota\kappa}_{ij} = \frac{1}{4}Q_{\dot{\imath}\dot{\kappa}}\Gamma^{\dot{\imath}\dot{\kappa}}_{ij}$.

[27] La condizione (7.71) dice che K deve avere gruppo di olonomia (cioè gruppo di gauge o di simmetrie locali) $SO(8)\times SO(n)$.

si hanno quindi le identità di Bianchi fondamentali

$$\begin{cases} \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - i\bar{\psi}\Gamma^a\varrho = 0 \\ \mathcal{D}\varrho^i + \frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\psi^i - R^i{}_j\psi^j = 0 \\ DP^{\iota r} = 0 \\ D\chi^{ir} + \frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\chi^{ir} - R^i{}_{\dot\kappa}\chi^{\dot\kappa r} - R^r{}_s\chi^{is} = 0. \end{cases} \tag{7.74}$$

5. Risolvendo le (7.74) si determinano i coefficienti della parametrizzazione reonomica, che nel settore materiale è del tipo

$$\begin{aligned} P^{ir} &= \Sigma^{ir}_a v^a + a\bar{\chi}^{\iota r}\Gamma^i_{\iota i}\psi^i \\ X^{\iota r} &= \Lambda^{\iota r}_a v^a + bi\Sigma^{ir}_a\Gamma^a\Gamma^i_{i\iota}\psi^i. \end{aligned} \tag{7.75}$$

(in pratica l'unico coefficiente incognito è b poichè a può essere riassorbito in χ). Con gli spinori χ^i si possono ottenere i seguenti oggetti di peso -1[28]:

$$X = a_1\bar{\chi}\chi, \quad X^{ija} = a_2 i\bar{\chi}\Gamma^{ij}\Gamma^a\chi, \quad X^{i_1\cdots i_4} = a_3\bar{\chi}\Gamma^{i_1\cdots i_4}\chi; \tag{7.76}$$

i primi due entrano nella parametrizzazione di $R^{ab}_{(0,2)}$ e $\varrho_{(1,1)}$ nella forma

$$\begin{aligned} \varrho^i_{(1,1)} &= (iX\Gamma_a\psi^i + \Gamma_{ab}X^{bi}{}_j\psi^j)v^a \\ R^{ab}_{(0,2)} &= -X\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi - \bar{\psi}^k X_{klc}\psi^l\varepsilon^{cab} \end{aligned} \tag{7.77}$$

come si vede risolvendo la solita identità$-T$ settore (1,2)[29]; la soluzione dell'identità$-\varrho$ settore (0,3) fisserà i coefficienti significativi a_1 e a_2[30] e quindi le regole di supertrasformazione del settore gravitazionale saranno del tipo

$$\begin{cases} \ell_\varepsilon v^a = -i\bar{\psi}\Gamma^a\varepsilon \\ \ell_\varepsilon\psi^i = D\varepsilon^i + iX\Gamma_a\varepsilon^i + \Gamma_{ab}X^{bij}\varepsilon_j v^a \\ \ell_\varepsilon\omega^{ab} = \bar{\varepsilon}\theta^{ab}{}_c v^c - 2X\bar{\varepsilon}\Gamma^{ab}\psi - 2\bar{\varepsilon}^i X_{ijc}\psi^j\varepsilon^{abc}. \end{cases} \tag{7.78}$$

[28] Tenendo presenti le proprietà di simmetria delle matrici $C_{[\alpha\beta]}$, $\Gamma^a_{(\alpha\beta)}$ e $\delta_{(i\dot\kappa)}$, $\Gamma^{ij}_{[i\dot\kappa]}$, $\Gamma^{i_1\cdots i_4}_{(i\dot\kappa)}$.

[29] Il settore (2,1) dà invece la solita espressione per $\theta^{abc}(\varrho_{ef})$.

[30] Tale identità si scrive

$$D_{(-1,2)}\,\varrho^i_{(1,1)}(\chi\chi) - R^{ij}_{(0,2)}(\chi\chi) + R_{(0,2)}(\chi\chi)\psi^i = 0$$

e si può esplicitare sfruttando le identità di Fierz degli $SO(1,2)\times SO(8)-$spinori $\chi^{i\alpha}$:

$$\chi_{i\alpha}\chi_{\dot\kappa\beta} = C_{\alpha\beta}(\delta_{i\dot\kappa}X' + \Gamma^{i_1\cdots i_4}_{i\dot\kappa}X'_{i_1\cdots i_k}) + \Gamma^a_{\alpha\beta}\Gamma^{ij}_{i\dot\kappa}X'_{ija}.$$

I ragionamenti appena illustrati si possono estendere in generale (dalla tabella nell'appendice C sappiamo che l'accoppiamento con campi scalari è possibile in tutte le dimensioni $D < 10$). Ciò che cambia è la forma del gruppo di simmetrie locali H che agisce sui fermioni; in particolare per teorie con N grande la varietà scalare è completamente fissata. Consideriamo per esempio la $D = 3, N = 16$: per avere una parametrizzazione del tipo (7.70)

$$d\sigma^i_{(0,1)} = \Gamma^i_{i\iota}\bar{\chi}^\iota\psi^i \tag{7.79}$$

gli ι, i devono essere indici chirali e antichirali di $SO(16)$ $(i, \iota = 1\ldots 128)$; dunque la varietà scalare dev'essere del tipo

$$K = G/SO(16)\times SO(n) \quad \dim K = 128n; \tag{7.80}$$

tuttavia le condizioni precedenti sono compatibili sse $n = 1$ poichè non esistono gruppi semplici[31] G della dimensione richiesta $(\dim G = 128n + \dim SO(16) + \dim SO(n))$ tranne che per $n = 1$ in cui $G = E_8$ $(\dim G = 248)$; quindi il numero degli scalari (la dimensione della varietà complessa) è fissata. Lo stesso avviene in tutte le teorie con N massimale $(N = 16, 8, 4, 2$ in $D = 3, 5, 7, 9)$.

Nota: il fenomeno secondo il quale è impossibile ottenere teorie off-shell per N grande si può vedere facilmente nel caso del multipletto scalare in tre dimensioni. Infatti come per il caso di SYM c'è la possibilità di un' estensione off-shell se compaiono campi ausiliari nella parametrizzazione degli spinori χ^{ir}; quest'ultima è determinata dal settore (0,2) dell'identità di Bianchi $DP = 0$ che si scrive

$$D_{(-1,2)}P^{ir}_{(1,0)} + D_{(0,1)}P^{ir}_{(0,1)} = 0 \tag{7.81}$$

ovvero

$$\begin{aligned} &\tfrac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi\Sigma^{ir}_a - \bar{\psi}^i\Gamma^i_{i\iota}M^{\iota r}_j\psi^j = 0 \quad (M^{ir}_j \equiv D_j\chi^{ir}) \\ \Longleftrightarrow \quad &\tfrac{i}{2}\Sigma^{ir}_a\Gamma^a_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \Gamma^i_{i\iota}M^{\iota r}_{\alpha\beta j} = 0 \end{aligned} \tag{7.82}$$

con gli indici αi e βj simmetrizzati. L'espressione precedente vale per tutti gli N pari (ι e i sono indici chirali e antichirali di $SO(N)$); per gli N dispari semplicemente spariscono gli indici puntati.

Per $N = 1$ ed $N = 2$[32] tale identità ammette la possibilità di campi ausiliari:

$$\begin{cases} N = 1 & D_{(0,1)}\lambda^r = -\frac{i}{2}\Gamma^a\Sigma^r_a\psi + \tau^r\psi \\ \Rightarrow & \text{multipletto } (\sigma^r, \lambda^r, \tau^r) \quad 2r + 2r \text{ gradi di libertà reali} \\ N = 2 & D_{(0,1)}\lambda^{r-} = (\Sigma^{r+}_a\Gamma^a\Gamma^-_{j+} + \tau_j)\psi^j \\ \Rightarrow & \text{multipletto } (\sigma^{r+}, \lambda^{r-}, \tau^r) \quad 2r + 2r \text{ gradi di libertà complessi} \end{cases} \tag{7.83}$$

[31] Si veda la tabella nell'appendice A.

[32] Per $N = 2$ le rappresentazioni di $SO(N)$ sono la rappresentazione definente X^i e le due rappresentazioni unidimensionali complesse $X^\iota = X^+$, $X^i = X^-$.

Invece già per $N = 3$ i campi ausiliari spariscono: ciò si vede osservando che l'equazione (7.82), del tipo $X^i_{(\alpha i \beta j)} = 0$ contiene le rappresentazioni (1,4+2)+(3,2+6+4) e quindi fissa tutte le componenti di $M^i_{\alpha\beta i} = (1+3, 4+2)$.

7.9 L'accoppiamento con gli scalari nel caso D=3, N=1

Quando N e D sono piccoli il gruppo di simmetria degli spinori è molto semplice e la varietà scalare può essere molto generale. Il caso più semplice possibile avviene quando il gruppo degli automorfismi è banale, in $D = 3,\ N = 1$ (multipletti $(\sigma^r, \lambda^r),\ r = 1\ldots n$); la varietà scalare ha allora olonomia $H = SO(n)$ e corrisponde ad una generica varietà con connessione $SO(n)$ (convenzionalmente la si può prendere riemanniana, $DP^r = 0$).

La teoria è quindi descritta dall'algebra soffice[33]

$$\begin{cases} R^a{}_b = d\omega^a{}_b - \omega^a{}_c\omega^c{}_b \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ \varrho = \mathcal{D}\psi \\ P^i = P^i_{\mathrm{J}} d\sigma^j \\ X^i = D\chi^i \end{cases} \tag{7.84}$$

(P^i è la base della varietà scalare K: le funzioni P^i_{J} sono libere e determinano la metrica di K, $g_{\mathrm{IJ}} = \delta_{ij}P^i_{\mathrm{I}}P^j_{\mathrm{J}}$ [34]) e dalle identità di Bianchi

$$\begin{cases} \mathcal{D}R^a{}_b = 0 \\ \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - i\bar{\psi}\Gamma^a\varrho = 0 \\ \mathcal{D}\varrho + \frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\psi = 0 \\ DP^i = 0 \\ DX^i + R^\alpha{}_\beta\chi^{\beta i} - R^i{}_j\chi^j = 0; \end{cases} \tag{7.85}$$

si cerca allora una parametrizzazione invariante di Lorentz e di scala (χ e σ hanno rispettivamente peso -1/2 e 0), oltre che per trasformazioni $SO(n)$ locali e per diffeomorfismi della varietà scalare K. Assumendo il vincolo convenzionale $R^a = 0$ la parametrizzazione più generale possibile è[35]

$$\begin{cases} R = R_{(2,0)} + \bar{\theta}_c\psi v^c + \bar{\psi}K\psi \\ \varrho = \varrho_{(2,0)} + H_c\psi v^c \\ P^i = \Sigma^i_a v^a + \bar{\chi}^i\psi \\ X^i = X^i_a + M^i(\Sigma_{ab}, *)\psi \end{cases} \tag{7.86}$$

[33] In realtà la (7.84) è solo apparentemente soffice poichè sappiamo che le equazioni del moto impongono l'annullarsi delle curvature: il multipletto gravitazionale è non fisico, cioè privo di gradi di libertà on-shell.

[34] A differenza che nelle teorie precedenti in cui la struttura della varietà scalare era ben determinata (varietà omogenea G/H) con metrica fissata.

[35] La * in M indica la presenza di eventuali altri campi ausiliari da determinare.

L'imposizione delle identità di Bianchi gravitazionali dà la già vista parametrizzazione (7.29); l'imposizione delle identità sulle 0-forme bosoniche, che riscriviamo nella forma

Identità$-P$:

$$\begin{array}{ll} settore\ (0,2): & D_{(-1,2)}P^i_{(2,0)} + D_{(0,1)}P^i_{(1,0)} = 0 \\ settore\ (1,1): & D_{(0,1)}P^i_{(1,0)} + D_{(1,0)}P^i_{(0,1)} = 0 \end{array} \tag{7.87}$$

cioè

$$\begin{array}{l} \frac{i}{2}\Sigma^i_a \bar\psi \Gamma^a \psi + \bar\psi M^i \psi = 0 \\ D_{(0,1)}\Sigma^i_a v^a + \bar\psi X^i_a v^a = 0 \end{array} \tag{7.88}$$

fornisce la parametrizzazione off-shell già anticipata

$$M^i = \frac{i}{2}\Sigma^i_a \Gamma^a + \tau^i \mathbb{1} \tag{7.89}$$

e le derivate spinoriali di Σ

$$D_\alpha \Sigma^i_a = -X^i_{a\alpha}. \tag{7.90}$$

Se si annullano i campi ausiliari τ^i e si ricava σ in termini dei campi fisici ($\sigma = \bar\chi_i \chi^i$) la teoria diventa on-shell e le identità fermioniche

$$\begin{array}{ll} settore\ (0,2): & D_{(-1,2)}X^i_{(1,0)} + D_{(0,1)}X^i_{(0,1)} + R^\alpha_{(0,2)\beta}\chi^{i\beta} - R^i{}_j \chi^j = 0 \\ settore\ (1,1): & D_{(0,1)}X_{(1,0)} + D_{(1,0)}X_{(0,1)} + R^\alpha{}_{\beta(1,1)}\chi^{i\beta} - R^i{}_{j(1,1)}\chi^j = 0 \end{array} \tag{7.91}$$

non danno più le derivate spinoriali dei campi ausiliari bensì le equazioni del moto. Precisamente si ottengono un'equazione di tipo Dirac (settore (0,2))[36]

$$\begin{array}{l} \frac{i}{2}X^i_a \bar\psi \Gamma^a \psi + \frac{i}{2}\bar\psi X^i_a \Gamma^a \psi - \frac{1}{4}\bar\chi\bar\chi\bar\psi\Gamma_{ab}\psi\Gamma^{ab}\chi + \bar\psi R^{ij}{}_{kl}\chi^k\bar\chi^l\psi\chi_j = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{i}{2}X^\gamma_a \Gamma^a_{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\Gamma^{a\gamma}{}_{(\alpha}X_{a\beta)} - \chi^\alpha\chi_\alpha\Gamma^{ab}_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{ab\epsilon}\chi^\epsilon + R^{ij}{}_{kl}\chi^k_\alpha\chi^l_\beta X^\gamma_j = 0 \\ \Rightarrow \text{ contraendo } \beta \text{ e } \gamma \text{ con qualche conto} \\ \frac{3}{4}(i\Gamma^a D_a \chi)_\alpha = -6\chi^\beta\chi_\beta\chi_\alpha - R^{ij}{}_{kl}\chi^k_\alpha\chi^l_\gamma\chi^\gamma_j \end{array} \tag{7.92}$$

e le derivate spinoriali di X^i_a (settore (1,1))

$$D_\alpha \mathcal{X}^i_a = -\frac{i}{2}\Gamma^b_{\alpha\beta}D_a\Sigma_b + R^{ij}{}_{kl}\chi^k_\alpha\chi_{j\beta}\Sigma^l_a - \frac{1}{4}\theta^{cd}_{a\alpha}(\varrho_{ab})\Gamma_{cd\beta\gamma}\chi^\gamma \tag{7.93}$$

[36] Conviene notare che $R^{ab}_{0,2} = -\sigma\bar\psi\Gamma^{ab}\psi = -\bar\chi\chi\bar\psi\Gamma^{ab}\psi$ mentre $R^{ij}_{(0,2)} = R^{ij}{}_{kl}P^k_{(0,1)}P^l_{(0,1)} = R^{ij}{}_{kl}\bar\chi^k\psi\bar\chi^l\psi = \bar\psi R^{ij}{}_{kl}\chi^k\bar\chi^l\psi$.

indispensabili per ottenere un'equazione di tipo Klein-Gordon derivando spinorialmente l'equazione di Dirac (ciò equivale a contrarre l'equazione precedente con $i\Gamma^{ab\alpha\beta}$):

$$D^b\Sigma^i_b = \text{ combinazione di } \varrho_{ab}\chi^i, \Sigma^i\chi\chi; \tag{7.94}$$

non ci interessa dare la forma esplicita della (7.94): è comunque chiaro a priori che essa si ottiene con combinazioni dei campi a disposizione nella teoria che rispettano le invarianze di scala ($D^b\Sigma^i_b$ ha peso -2), di Lorentz ($D^b\Sigma^i_b$ è scalare), e della varietà scalare ($D_a\Sigma^i_a$ è un vettore per diffeomorfismi di K). In particolare la geometria di K entra nelle equazioni di Dirac e di Klein-Gordon tramite i tensori $R^{ij}{}_{kl}$, g_{mn} e le loro combinazioni, ma non nella parametrizzazione esterna.

7.10 Gli scalari in D=4, N=1

La teoria appena sviluppata si può considerare come un esempio didattico dell'accoppiamento degli scalari in teorie di supergravità, particolarmente semplice in seguito alle buone proprietà degli spinori in tre dimensioni. Cercare di trasportare gli stessi ragionamenti in quattro dimensioni è possibile, ma sorgono delle complicazioni.[37] Supponiamo per semplicità di continuare a lavorare con spinori di Majorana; allora la parametrizzazione di un campo scalare sarà sempre del tipo

$$d\sigma = \Sigma_a v^a + \bar{\chi}\psi; \tag{7.95}$$

in seguito all'esistenza della Γ_5, però, sono possibili anche parametrizzazioni $SO(1,3)-$ invarianti del tipo

$$d\sigma' = \Sigma'_a v^a - i\bar{\chi}\Gamma_5\psi. \tag{7.96}$$

È chiaro quindi che lo stesso spinore λ può entrare nella parametrizzazione di due campi diversi, σ scalare e σ' pseudoscalare: il supermultipletto materiale è quindi del tipo

$$(\sigma, \sigma', \chi) \quad (2+2) \text{ gradi on-shell.} \tag{7.97}$$

Tale supermultipletto può essere esteso off-shell: basta osservare che la parametrizzazione più generale possibile di χ, ricavata da $d^2\sigma = 0$ settore (0,2)

$$\frac{i}{2}\Sigma_a\bar{\psi}\Gamma^a\psi - \bar{\psi}M\psi = 0 \tag{7.98}$$

(si confronti con la (7.88a)) ammette i campi ausiliari $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ [38]

$$M = \frac{i}{2}\Sigma_a\Gamma^a - \frac{1}{2}\Sigma'_a\Gamma_5\Gamma^a + \mathcal{S} + i\mathcal{S}'\Gamma^5. \tag{7.99}$$

[37] In termini terra-terra è perchè ci sono più matrici Γ.
[38] Lo stesso si può dire per la $d^2\sigma' = 0$ settore (0,2): $\frac{i}{2}\Sigma'_a\bar{\psi}\Gamma^a\psi + i\bar{\psi}\Gamma_5 M\psi = 0$.

Il supermultipletto diventa più maneggevole nella notazione chirale (di Wess-Zumino [49])

$$
\begin{aligned}
& z = \sigma + i\sigma', \quad \mathcal{H} = \mathcal{S} + i\mathcal{S}' \\
& \chi_\pm = \tfrac{1\pm\Gamma_5}{2}\chi, \quad \psi_\pm = \tfrac{1\pm\Gamma_5}{2}\psi \\
& \bar\chi_\pm = \bar\chi\tfrac{1\pm\Gamma_5}{2}, \quad \bar\psi_\pm = \bar\psi\tfrac{1\pm\Gamma_5}{2}
\end{aligned}
\tag{7.100}
$$

in cui la parametrizzazione reonomica si scrive (volendo il fattore 2 è riassorbibile in χ)

$$
\begin{aligned}
& dz = Z_a v^a + 2\bar\chi_+\psi_+ \\
& \mathcal{D}\chi_+ = X_a v^a + \tfrac{i}{2}Z_a\Gamma^a\psi_- + \mathcal{H}\psi_+.
\end{aligned}
\tag{7.101}
$$

A questo punto è possibile sviluppare la teoria concretamente, considerando n supermultipletti (z^i, χ^i). Il gruppo di simmetrie sugli spinori è allora

$$H = U(1) \times U(n). \tag{7.102}$$

(il fattore $U(1)$ corrisponde alla simmetria chirale $\psi \to e^{-\frac{i}{2}\theta\Gamma_5}\psi$ e $U(n)$ alle simmetrie sugli spinori χ^i).

Tali simmetrie possono essere rese locali ammettendo un'opportuna geometria sulla varietà complessa scalare K[39].

In primo luogo K dev'essere una varietà di Kähler, cioè una varietà complessa con olonomia $U(n)$, ovvero con una connessione $Q^i{}_j$ a valori nell'algebra di Lie di $U(n)$,[40]

$$Q^+ = -Q \quad \Leftrightarrow \quad Q_{i^*j} = -Q_{ji^*} \quad \Leftrightarrow \quad D\eta_{i^*j} = 0 \tag{7.103}$$

su cui si impone la condizione solita

$$0 = DP^i = (DP^i)^* = DP^{i^*}. \tag{7.104}$$

$P^i = P^i_m dz^m + P^i_{m^*}dz^{m^*}$ e $P^{i^*} = (P^i)^*$ costituiscono il "vielbein" complesso da cui si ottiene la metrica hermitiana

$$g_{mn^*} = \frac{1}{2}(\eta_{ij^*}P^i_m P^{j^*}_{n^*} + \eta_{i^*j}P^{i^*}_m P^j_{n^*}) = g_{n^*m}; \tag{7.105}$$

in conseguenza alla "condizione di torsione nulla" (7.104) esiste la 2-forma invariante chiusa reale (tale 2-forma è invece identicamente nulla nelle varietà reali)

$$R^\otimes = iP_iP^i = ig_{mn^*}dz^m dz^{n^*}; \tag{7.106}$$

[39] La geometria delle varietà complesse è studiata in molti riferimenti; si vedano per esempio [7],[12],[21].

[40] Gli indici i e i^* si alzano ed abbassano con $\eta_{i^*j} = \delta_{ij}$ e la derivata covariante sulle $k-$forme è definita come $DX^i_{i^*} \equiv dX^i_{i^*} + Q^i{}_jX^j_{j^*} - (-1)^k X^i_{j^*}Q^{j^*}{}_{i^*}$.

la condizione $dR^{\otimes} = DP_iP^i - P_iDP^i = 0$ che si scrive anche $dg_{mn^*}dz^m dz^{n^*} = 0$ impone allora

$$\begin{aligned} &\partial_{[p}g_{m]n^*} = 0, \quad \partial_{[p^*}g_{|m|n^*]} = 0 \\ &\Rightarrow \text{ localmente } g_{mn^*} = \partial_m \partial_{n^*} G. \end{aligned} \tag{7.107}$$

Come conseguenza la metrica g_{mn^*} è completamente determinata da un'unica funzione reale $G(z, z^*) = G(z^*, z)$ detta potenziale di Kähler. Il potenziale G permette di definire anche una connessione $U(1)$, detta connessione di Kähler, ponendo

$$Q^{\otimes} = \frac{1}{2i}(\partial_m G dz^m - \partial_{m^*} G dz^{m^*}); \tag{7.108}$$

$Q^{\otimes}$ trasforma correttamente ($Q^{\otimes} \to Q^{\otimes} + d\Im m f$) per trasformazioni di Kähler[41]

$$G(z, z^*) \longrightarrow G(z, z^*) + f(z) + f(z^*), \ f \text{ olomorfa}. \tag{7.109}$$

È possibile usare tale connessione per rendere locale la simmetria chirale: basta definire sugli spinori (α e $\dot\alpha$ indicano gli indici chirali e antichirali)

$$\begin{array}{l} D\psi^{\alpha} = \mathcal{D}\psi^{\alpha} + \frac{i}{2}Q^{\otimes}\delta^{\alpha}_{\beta}\psi^{\beta} \\ D\psi^{\alpha} = \mathcal{D}\psi^{\dot\alpha} - \frac{i}{2}Q^{\otimes}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\psi^{\dot\beta} \end{array} \tag{7.110}$$

ovvero

$$D\psi = D\psi + \frac{i}{2}Q^{\otimes}\Gamma_5\psi \tag{7.111}$$

per rendere locale il cambio $\psi \to e^{-\frac{i}{2}\theta\Gamma_5}\psi$, $\theta = \Im m f$.

Si noti che la curvatura di $Q^{\otimes}$ coincide con la 2-forma $R^{\otimes}$: si parla allora di varietà di Kähler-Hodge.

7.11 L'accoppiamento in D=4, N=1

Svolti questi preliminari scriviamo l'algebra su cui si costruisce la teoria come[42]

$$\begin{cases} R^a{}_b = d\omega^a{}_b - \omega^a{}_c\omega^c{}_b \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar\psi\Gamma^a\psi \\ \varrho = D\psi \\ X^m = D\chi^m \\ \check{z}^m = dz^m; \end{cases} \tag{7.112}$$

[41] Si noti che preservano la metrica (7.107).

[42] Per compatibilità con le notazioni di [21] cap. IV.3 usiamo la base coordinata dz^m invece della base intrinseca P^i; dunque la connessione di Kähler $Q^i{}_j$ va sostituita con la sua espressione nella base coordinata $\Gamma^m{}_n = g^{mp^*}\partial g_{np^*}$ e la simmetria $U(n)$ non è più esplicita.

si hanno allora le identità di Bianchi

$$\begin{cases} \mathcal{D}R^a{}_b = 0 \\ \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - i\bar{\psi}\Gamma^a\varrho = 0 \\ D\varrho + R\psi - \frac{i}{2}R^{\otimes}\psi = 0 \\ DX^i + R\chi^i + \frac{i}{2}R^{\otimes}\chi^i - R^i{}_j\chi^j = 0 \\ d\breve{z}^i = 0. \end{cases} \tag{7.113}$$

È chiaro che la soluzione delle (7.113) darà la seguente parametrizzazione delle curvature, che rispetta tutte le invarianze della teoria (di scala, di Lorentz e della varietà scalare):

$$\begin{cases} R^a = 0 \\ R^{ab} = R^{ab}_{cd}v^c v^d + \bar{\theta}^{ab}_c\psi + iS\bar{\psi}_-\Gamma^{ab}\psi_- - iS^*\bar{\psi}_+\Gamma^{ab}\psi_+ - \frac{i}{4}T_c\bar{\psi}_-\Gamma_d\psi_+\varepsilon^{abcd} \\ \varrho = \varrho_{ab}v^a v^b + \frac{i}{8}T_a\Gamma^{ab}\psi v_b + S\Gamma_a\psi v^a \\ dz^i = Z^i_a v^a + \bar{\chi}^i\psi \\ D\chi^i = X^i_a v^a + iZ^i_a\Gamma^a\psi + \mathcal{H}^i\psi \\ T^a = \bar{\chi}\Gamma^a\chi, \;\; S = 0, \;\; \mathcal{H}^i = 0 \end{cases} \tag{7.114}$$

(per ricavare la parametrizzazione del settore gravitazionale, quasi identica alla (7.25), si risolvono l'identità$-T$ e l' identità$-\varrho$ settore (0,3); la parametrizzazione di DX^i si ricava invece dal settore (0,2) dell'identità$-dz$; il legame tra campi ausiliari e campi fisici è evidente da considerazioni dimensionali e di invarianza).

Per ricavare le equazioni del moto o si risolvono le identità fermioniche o si deriva un'azione costruita con le solite regole; essa sarà del tipo

$$I = I_{senza\ 0-forme} + I_{cinetica\ delle\ 0-forme} + I_{tutto\ il\ resto} \tag{7.115}$$

con[43]

$$I_{senza\ 0-forme} = \int R^{ab}v^c v^d + 4\bar{\varrho}\Gamma_5\Gamma_a\psi v^a \tag{7.117}$$

$$I_{cinetica\ delle\ 0-forme} = \int \begin{array}{l} a_1(Z_a dz - \frac{1}{4}Z_f Z^f v_a)v_b v_c v_d\varepsilon^{abcd} \\ +a_2 i\bar{\chi}\Gamma_a D\chi v_b v_c v_d\varepsilon^{abcd} \end{array} \tag{7.118}$$

$$I_{tutto\ il\ resto} = \int \begin{array}{l} b_1 Z_a\bar{\chi}\psi v_b v_c v_d\varepsilon_{abcd} + b_2 i dz\bar{\chi}\Gamma_{ab}\psi v^a v^b + \\ b_3 R^a v_a\bar{\chi}\Gamma_b\chi v^b + b_4\bar{\chi}\Gamma_a\chi\bar{\psi}\Gamma_b\psi v^a v^b + b_5\varepsilon_{abcd}\cdot \\ v^a v^b v^c v^d(\bar{\chi}\Gamma_a\chi\bar{\chi}\Gamma^a\chi + \bar{\chi}^i\Gamma_a\chi^{j^*}\bar{\chi}^k\Gamma^a\chi^{l^*}R_{j^*il^*k}) \end{array} \tag{7.119}$$

I coefficienti giusti si trovano imponendo C4) e C5) (compatibilità con la parametrizzazione reonomica e invarianza per supersimmetria).

[43] Per i termini della lagrangiana usiamo l' utile prodotto

$$XY \equiv \frac{1}{2}(g_{ij^*}X^iY^{j^*} + g_{i^*j}X^{i^*}Y^j) \tag{7.116}$$

che è certamente a valori reali $(XY)^*=(XY)$ e simmetrico $(XY)=(YX)$; inoltre soddisfa $XX = g_{ij^*}X^iX^{j^*} = |X|^2$.

7.12 Cenni sul fenomeno di Super Higgs

L'azione (7.115), come del resto la parametrizzazione (7.114), non è soddisfacente, in quanto dà luogo ad una teoria con uno stato di vuoto supersimmetrico;[44] invece dà un punto di vista fenomenologico è essenziale avere un meccanismo di tipo Higgs che rompa la supersimmetria e dia massa ad alcune particelle; queste ultime saranno da identificare in qualche maniera con quelle osservate sperimentalmente e descritte dal modello standard. A questo fine è necessaria l'introduzione di una costante dimensionale e di peso -1 che permetta l'esistenza di un termine di potenziale (è noto dal capitolo 2 che i potenziali sono del tipo $W = e^2 V$ con V funzione adimensionale che rispetta le simmetrie della varietà scalare). Quest'ultimo dà luogo nel vuoto ad un' equazione di Einstein del tipo

$$\mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = -2W_0\eta^a{}_b \tag{7.120}$$

(si confronti colla (2.75); qui qualche coefficiente cambia perchè usiamo le normalizzazioni di [21]) compatibile con uno spaziotempo di De Sitter, Anti De Sitter o Minkowsky a seconda del segno del potenziale $V_0 = V(z_0, z_0^*)$. La presenza di e (che dà luogo alla costante cosmologica se $V_0 \neq 0$, essendo $\Lambda = -4\bar{e}^2 = 2W_0$) permette di rompere la supersimmetria in quanto rende possibile una parametrizzazione con

$$\begin{cases} S = ief(z, z^*) \neq 0, \\ \mathcal{H}^i = ef^i(z, z^*) \neq 0; \end{cases} \tag{7.121}$$

l'identità$-\varrho$ settore (1,2) fissa[45]

$$f = e^{G/2} \tag{7.122}$$

mentre l'identità$-X$ settore (0,2) porge

$$f^i = 2e^{G/2}\mathcal{G}^i, \quad \mathcal{G}_i \equiv \partial_i G. \tag{7.123}$$

Tali parametrizzazioni <u>rompono</u> l'invarianza di Kähler e fanno cambiare la legge di supertrasformazione dei vari campi, rendendo possibile la presenza di vuoti non supersimmetrici, cioè con

$$\ell_\varepsilon\psi_0 = D\varepsilon + S_0 v_0^a \Gamma_a \varepsilon \neq 0 \quad \text{o} \quad \ell_\varepsilon\chi_0 = \mathcal{H}_0\varepsilon \neq 0. \tag{7.124}$$

[44] Si dice che uno stato di vuoto $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$(nel nostro caso $v = v_0$ di Minkowsky, $\psi \equiv 0, z \equiv z_0$, $\chi \equiv 0$) è supersimmetrico se è mandato in se stesso da una trasformazione di supersimmetria ($\ell_\varepsilon\mu_0 = 0$, $\ell_\varepsilon\lambda_0 = 0$). Ciò è sempre vero colla parametrizzazione (7.114).

[45] Si veda [21] pag. 963.

La richiesta di invarianza per supersimmetria nell'azione (7.115) usando la parametrizzazione con $e \neq 0$ fa nascere i nuovi termini [46]

$$\begin{aligned} I_{non\ Kahler-invariante} = c_1 \mathcal{R}e(S(G)\bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi)v^a v^b + ic_2\mathcal{H}(G)\bar{\chi}\Gamma_a\psi v_b v_c v_d \varepsilon^{abcd} \\ +c_3\varepsilon_{abcd}v^a v^b v^c v^d (m_{ij}(G)\bar{\chi}^i\chi^j + m_{i^*j^*}(G)\bar{\chi}^{i^*}\chi^{j^*} - W(G)) \end{aligned} \tag{7.125}$$

e in particolare i termini di Yukawa

$$m_{ij}(G) = \frac{e}{6}(\mathcal{G}_i\mathcal{G}_j + D_i\mathcal{G}_j) \tag{7.126}$$

e la forma del potenziale

$$W(G) = -\frac{2}{3}e^2 e^G(3 - |\mathcal{G}|^2) \tag{7.127}$$

sono completamente determinati in termini di G.

Rimandiamo per ulteriori approfondimenti a [21] cap. IV.5 e all'articolo originale [50]; osserviamo inoltre che per una trattazione attenta agli aspetti fenomenologici è necessario prendere in considerazione potenziali di Kähler invarianti per un gruppo di simmetrie locali da identificare con $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ o con un qualche gruppo di grande unificazione; questo comporta un ulteriore accoppiamento di Yang-Mills che si sovrappone a quello scalare ([21] cap. IV.4).

[46] I coefficienti giusti e tutti i dettagli si trovano in [21].

Capitolo 8

SUPERGRAVITÀ IN DIMENSIONE GRANDE

8.1 Introduzione

In questo capitolo ci occupiamo più in dettaglio delle teorie in dimensione $D = 11, 10, 9, 8, 7$ accennate nel capitolo 6. In particolare è assai importante la teoria in 10 dimensioni.

8.2 Supergravità in undici dimensioni

La supergravità in undici dimensioni è stata molto studiata in quanto, prima dell'avvento delle teorie di stringa, era considerata il miglior candidato ad un'unificazione di tutte le interazioni esistenti. Inoltre tale teoria è interessante di per sè poichè presenta diverse peculiarità . In primo luogo non esistono teorie in $D > 11$; in secondo luogo in $D = 11$ l'unico supermultipletto possibile è quello del gravitone e non sono possibili multipletti di materia o di Yang-Mills: dunque la teoria è necessariamente pura, cioè contiene solamente la gravità. Ciò è di per sè soddisfacente anche soltanto da un punto di vista puramente estetico. In terzo luogo la teoria presenta un meccanismo di compattificazione spontanea $M_{11} \to M_4 + M_7$ e scegliendo opportunamente la varietà compatta M_7 (la scelta più semplice è quella della 7-sfera) per riduzione dimensionale si possono ottenere quark e leptoni con gruppo di gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$: ciò tuttavia non è promettente come sembra, in quanto esistono delle difficoltà insormontabili (già citate nel capitolo 2):

1. è impossibile spiegare la chiralità;

2. compare una costante cosmologica enorme.

Per questi motivi la teoria $D = 11$ ha perso l'interesse direttamente fenomenologico in favore della $D = 10$, di cui parleremo meglio nel seguito. In questo paragrafo descriveremo invece la struttura algebrica della teoria a undici dimensioni, che costituisce un buon esempio di teoria costruita su una FDA di secondo tipo. Premettiamo alcune identità utili.[1]

$$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{32}(\Gamma_a\bar{\psi}\Gamma^a\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi + \frac{1}{5!}\Gamma_{abcde}\bar{\psi}\Gamma^{abcde}\psi) \quad \text{(Fierz)} \tag{8.1}$$

$$\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi\bar{\psi}\Gamma_b\psi = 0 \quad \text{(sostituisce la ciclica)} \tag{8.2}$$

$$\bar{\psi}\Gamma^{abcde}\psi\bar{\psi}\Gamma_e\psi = 3\bar{\psi}\Gamma^{[ab}\psi\bar{\psi}\Gamma^{cd]}\psi. \tag{8.3}$$

Usando la (8.2) si prova che è un cociclo

$$\Omega_A = \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi v_a v_b \quad (\delta_H\Omega = 0, \quad d\Omega_A = \bar{\varrho}\Gamma^{ab}\psi v_a v_b - \bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi v_a R_b) \tag{8.4}$$

ciò permette di definire la seguente FDA soffice di primo tipo F'

$$\begin{cases} R^a{}_b = d\omega^a{}_b - \omega^a{}_c\omega^c{}_b \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ \varrho = \mathcal{D}\psi \\ R^\square = dA - \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi v_a v_b \end{cases} \tag{8.5}$$

invariante di gauge ($A \longrightarrow A + d\varphi^\square$) e di scala ($A \longrightarrow w^3 A$); la 3-forma A si può pensare come una generalizzazione del campo elettromagnetico in 11 dimensioni.
Se si osserva che esiste anche il cociclo di secondo tipo

$$\Omega_B = \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma_{a_1\cdots a_5}\psi v^{a_1}\cdots v^{a_d} + \frac{15}{2}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi v_a v_b A + 15R^\square A \tag{8.6}$$

$$\delta_H\Omega_B = d(X\varphi^\square), \quad X = \frac{15}{2}\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi v_a v_b + 15R^\square \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned} d\Omega_B = \; & i\bar{\varrho}\Gamma_{a_1\cdots a_5}\psi v^{a_1}\cdots v^{a_5} + \tfrac{5}{2}i\bar{\psi}\Gamma_{a_1\cdots a_5}\psi R^{a_1}v^{a_2}\cdots v^{a_5} + \\ & 15R^\square R^\square + 15\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi v_a v_b R^\square \end{aligned} \tag{8.8}$$

si può estendere F' ad una FDA F'' di secondo tipo con curvatura

$$R^\otimes = dB - \Omega_B. \tag{8.9}$$

Ciò porta alle ulteriori invarianze $B \longrightarrow B + X\varphi^\square + d\phi^\otimes$, $B \longrightarrow w^6 B$; per rispettare il conto dei gradi di libertà B dev'essere una 6-forma ausiliaria, cioè funzione on-shell dei campi fisici: in pratica sarà

$$R^\otimes_{a_1\cdots a_7} \propto \varepsilon_{a_1\cdots a_7 b_1\cdots b_4} R^{\square b_1\cdots b_4}. \tag{8.10}$$

[1] Ricordiamo dalla tabella a pagina 75 che le matrici $C-$simmetriche in 11 dimensioni sono $\Gamma_a, \Gamma_{ab}, \Gamma_{abcde}$.

La costruzione esplicita della teoria avviene usando le identità di Bianchi

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}R^a{}_b = 0 \\ \mathcal{D}R^a + R^{ab}v_b - i\bar{\psi}\Gamma^a\varrho = 0 \\ \mathcal{D}\varrho + \frac{1}{4}R^{ab}\Gamma_{ab}\psi = 0 \\ dR^{\Box} + \bar{\varrho}\Gamma^{ab}\psi v_a v_b - \bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi R_a v_b = 0 \\ dR^{\otimes} + i\bar{\varrho}\Gamma_{a_1\cdots a_5}\psi v^{a_1}\cdots v^{a_5} + \frac{5}{2}i\bar{\psi}\Gamma_{a_1\cdots a_5}\psi R^{a_1}v^{a_2}\cdots v^{a_5} + \\ \quad 15R^{\Box}R^{\Box} + 15\bar{\psi}\Gamma^{ab}\psi v_a v_b R^{\Box} = 0 \end{array}\right. \tag{8.11}$$

o il metodo lagrangiano; la prima trattazione è più rapida. Infatti le invarianze della teoria suggeriscono subito la parametrizzazione

$$\left\{\begin{array}{l} R^a = 0 \\ R^{ab} = R^{ab}_{cd}v^c v^d + \bar{\theta}^{ab}{}_c\psi v^c + \bar{\psi}K^{ab}(F)\psi \\ \varrho = \varrho_{(2,0)} + H_a(F)\psi v^a \\ R^{\Box} = F_{a_1\cdots a_4}v^{a_1}\cdots v^{a_4} \\ R^{\otimes} = G_{a_1\cdots a_7}v^{a_1}\cdots v^{a_7} \end{array}\right. \tag{8.12}$$

Le identità di Bianchi ((8.11)a,b,c) sono le solite; in particolare riportiamo riscriviamo l'identità$-T$ settore (1,2):

$$\bar{\psi}K^{ab}\psi v_b - i\bar{\psi}\Gamma^a H_b\psi v^b = 0; \tag{8.13}$$

l'identità$-R^{\Box}$ si spezza nei seguenti settori non nulli

$$(5,0)\ D_{(1,0)}R^{\Box}_{(4,0)} = 0 \tag{8.14}$$

$$(4,1)\ D_{(0,1)}R^{\Box}_{(4,0)} - \bar{\psi}\Gamma_{ab}\varrho_{(2,0)}v^a v^b = 0 \tag{8.15}$$

$$(3,2)\ D_{(-1,2)}R^{\Box}_{(4,0)} - \bar{\psi}\Gamma_{ab}\varrho_{(1,1)}v^a v^b = 0 \tag{8.16}$$

mentre della $R^{\otimes}$ riportiamo i settori

$$(8,0)\ D_{(1,0)}R^{\otimes}_{(7,0)} + 4R^{\Box}_{(4,0)}R^{\Box}_{(4,0)} = 0 \tag{8.17}$$

$$(6,2)\ D_{(1,0)}R^{\otimes}_{(7,0)} - i\bar{\psi}\Gamma_{a_1\cdots a_5}\varrho_{(1,1)}v^{a_1}\cdots v^{a_5} + 15\bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi R^{\Box}_{(5,0)}v^a v^b = 0 \tag{8.18}$$

Dalla (8.16) si ottiene

$$2iF_{a_1\cdots a_4}\bar{\psi}\Gamma^{a_1}\psi v^{a_2}\cdots v^{a_4} - \bar{\psi}\Gamma_{ab}H_c\psi v^a v^b v^c = 0 \tag{8.19}$$

e poichè per rispettare la Lorentz-invarianza dev'essere

$$H_a(F) = aF_{ab_1b_2b_3}\Gamma^{b_1b_2b_3} + b\Gamma_{ab_1\cdots b_4}F^{b_1\cdots b_4} \tag{8.20}$$

risulta[2]

$$(a+8b)\Gamma_{ab_1b_2b_3}\bar{\psi}\Gamma^{a_1a_2b_1b_2b_3}\psi v_a v_{a_1} v_{a_2} + (2i-6a)F_{a_1\cdots a_4}\bar{\psi}\Gamma^{a_1}\psi v^{a_2}\cdots v^{a_4} \tag{8.21}$$

da cui $a = i/3, b = -i/24$. Dalla (8.18) si estrae

$$G_{a_1\cdots a_7} = \frac{1}{84}\varepsilon_{a_1\cdots a_7 b_1\cdots b_4}F^{b_1\cdots b_4} \tag{8.22}$$

dunque B è un campo ausiliario dato proprio dalla (8.10).
La (8.17) dà l'equazione di Maxwell

$$\mathcal{D}_a F^a{}_{a_1a_2a_3} + \frac{1}{96}F^{b_1\cdots b_4}F^{c_1\cdots c_4}\varepsilon_{b_1\cdots b_4c_1\cdots c_4a_1a_2a_3} = 0. \tag{8.23}$$

La (8.13) fissa completamente la parametrizzazione reonomica permettendo di ricavare

$$K^{ab} = \Gamma_{cd}F^{cdab} + \frac{1}{24}\Gamma^{aba_1\cdots a_4}F_{a_1\cdots a_4}; \tag{8.24}$$

dunque le supertrasformazioni sui campi fisici si scrivono

$$\begin{cases} \ell_\varepsilon v = i\bar{\varepsilon}\Gamma\psi \\ \ell_\varepsilon \psi = \mathcal{D}\varepsilon + \frac{i}{3}(\Gamma^{bcd}F_{abcd} - \frac{1}{8}\Gamma_{abcde}F^{bcde})\varepsilon v^a \\ \ell_\varepsilon A = \bar{\varepsilon}\Gamma_{ab}\psi v^a v^b. \end{cases} \tag{8.25}$$

Lo studio delle identità rimanenti dà le equazioni del moto[3]:

$$\begin{array}{l} \mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = 3F^{ac_1c_2c_3}F_{bc_1c_2c_3} - \frac{3}{8}\eta^a{}_b F^{c_1\cdots c_4}F_{c_1\cdots c_4} \\ \Gamma^{abc}\varrho_{bc} = 0 \end{array} \tag{8.26}$$

La trattazione lagrangiana è più lunga, e qui ne qui diamo solo qualche breve cenno, rimandando ad [21] cap.III. per una trattazione completa e dettagliata. Si parte dalla FDA (8.5) con aggiunta la curvatura $R^{\otimes}$ e si cerca un'azione geometrica del tipo

$$I(v,\psi,\omega,A,B) = \int \Lambda + \breve{\mu}^{\Lambda}\nu_{\Gamma} + \breve{\mu}^{\Lambda}\breve{\mu}^{\Pi}\nu_{\Lambda\Pi} \tag{8.27}$$

[2] Si sviluppano i prodotti $\Gamma_{ab}\Gamma_{(3)}$, $\Gamma_{ab}\Gamma_{(5)}$ con la (3.24) e si tiene conto dell'antisimmetria di C ,$C\Gamma_{(3)}$, $C\Gamma_{(7)}$.

[3] Queste ammettono la compattificazione spontanea in quattro dimensioni vista nel capitolo 2, se si considerano stati di vuoto in cui i fermioni si annullano, $\psi = 0$.

invariante di gauge e di scala. Si trova così , a meno di derivate totali, che l'azione si può mettere nella forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\tfrac{1}{9}R^{a_1a_2}v^{a_3}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} + \beta_1 iR^a v_a\bar{\psi}\Gamma^{b_1\cdots b_5}\psi v^{b_6}\cdots v^{b_{11}}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}\\ & +h_1\bar{\varrho}\Gamma_{c_1\cdots c_8}\psi v^{c_1}\cdots v^{c_8} + \tfrac{\gamma_1}{15}(R^{\otimes} + 15R^{\square}A)\bar{\psi}\Gamma ab\psi v^a v^b\\ & +ik_1R^{\square}\bar{\psi}\Gamma_{a_1\cdots a_5}\psi v^{a_1}\cdots v^{a_5} + ik_2R^{\square}\bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi v^a v^b A\\ & +a\bar{\psi}\Gamma^{a_1a_2}\psi\bar{\psi}\Gamma^{a_3a_4}v^{a_5}\cdots v^{a_{11}}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}+\\ & \tfrac{1}{4}\gamma_1\bar{\psi}\Gamma^{a_1a_2}\psi\bar{\psi}\Gamma^{a_3a_4}\psi v_{a_1}\cdots v_{a_4}A + \gamma_1)R^{\square}R^{\square}A + \gamma R^{\square}R^{\otimes}.\end{aligned} \tag{8.28}$$

La richiesta che le equazioni variazionali ammettano la soluzione di vuoto, che conviene scrivere nella forma

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta\mu} + \tilde{\nabla}\nu = 0 \tag{8.29}$$

dà

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\tfrac{1}{9}R^{a_1a_2}v^{a_3}\cdots v^{a_D}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} + \tfrac{7}{30}iR^a v_a\bar{\psi}\Gamma^{b_1\cdots b_5}\psi v^{b_6}\cdots v^{b_{11}}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}\\ & +2\bar{\varrho}\Gamma_{c_1\cdots c_8}\psi v^{c_1}\cdots v^{c_8} + kR^{\otimes}\bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi v^a v^b\\ & +i(k-84)R^{\square}\bar{\psi}\Gamma_{a_1\cdots a_5}\psi v^{a_1}\cdots v^{a_5} + (30k-840)R^{\square}\bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi v^a v^b A\\ & +\tfrac{1}{4}(1-\tfrac{k}{28})\bar{\psi}\Gamma^{a_1a_2}\psi\bar{\psi}\Gamma^{a_3a_4}v^{a_5}\cdots v^{a_{11}}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}+\\ & 15(\tfrac{k}{2}-14)\bar{\psi}\Gamma^{a_1a_2}\psi\bar{\psi}\Gamma^{a_3a_4}\psi v_{a_1}\cdots v_{a_4}A + (30k-840)R^{\square}R^{\square}A + \gamma R^{\square}R^{\otimes}.\end{aligned} \tag{8.30}$$

I parametri k e γ sono in realtà ininfluenti; infatti dalle equazioni variazionali

$$\begin{array}{ll}\delta_\omega I: & R^{a_1}v^{a_2}\cdots v^{a_9}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} = 0\\ \delta_B I: & (\gamma-2k)(\bar{\psi}\Gamma_{ab}\varrho v^a v^b - \bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi R^a v^b) = 0\end{array} \tag{8.31}$$

si ottiene

$$R^a = 0,\ \varrho = 0 \tag{8.32}$$

cioè una soluzione banale; per evitarlo dev'essere $\gamma = 2k$ ma in tal caso si possono raccogliere i termini in k in una derivata totale $(d(2AdB))$ e quindi eliminarli dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}|_{k=\gamma=0}. \tag{8.33}$$

Ciò come conseguenza porta alla scomparsa del campo B in I ; dunque è impossibile estrarre la sua equazione del moto dal principio d'azione. Questo risultato dice che la supergravità in undici dimensioni non ammette formulazione duale, cioè non è possibile sostituire la 3-forma A con una 6-forma B e considerare la seconda fondamentale piuttosto che la prima; è possibile costruire l'azione dall'algebra (8.5), trascurando completamente B, ma non è possibile costruirla trascurando A e tenendo B. L'introduzione di B è utile se si lavora con le identità di Bianchi, in quanto si possono derivare le equazioni del moto più semplicemente, ma in ogni caso non è indispensabile.

H) A questo punto per dare equazioni non banali al campo A si inseriscono delle 0-forme ausiliarie e un termine cinetico

$$\mathcal{L}_{KIN} = \alpha(F f^{a_1\cdots a_4} - \frac{7!4!}{11!} f_{b_1\cdots b_4} f^{b_1\cdots b_4}) v^{a_5}\cdots v^{a_d}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}. \tag{8.34}$$

Il principio di reonomia fissa il coefficiente incognito $\alpha = 2$;

si ritrova inoltra la parametrizzazione (8.12) (come nel caso quadridimensionale θ ha una forma diversa ma equivalente on-shell a quella ottenuta tramite le identità di Bianchi).

8.3 Supergravità D=10, N=1

La supergravità semplice in dieci dimensioni contiene i campi $(v, \psi, B, \chi, \sigma)$ e può essere accoppiata solo con dei multipletti di Yang-Mills (A, λ); ψ e λ sono spinori di Majorana-Weyl mentre χ è di Majorana- Anti-Weyl. In seguito alle proprietà delle matrici Γ in 10 dimensioni [4] valgono le seguenti utilissime identità algebriche:

$$\psi\bar{\psi} = \frac{1}{16}\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a + \frac{1}{32\cdot 5!}\bar{\psi}\Gamma_{abcde}\psi\Gamma^{abcde} \tag{8.35}$$

$$\bar{\psi}\Gamma_a\psi\Gamma^a\psi = 0 \tag{8.36}$$

$$\bar{\psi}\Gamma_{abcde}\psi\Gamma^a\psi = 0 \tag{8.37}$$

Il primo passo per la determinazione della teoria è la costruzione dell'algebra soffice; se si assume l'invarianza di scala $\sigma \longrightarrow \sigma + c$, $A \to e^{\frac{2}{3}c}A$, $e \to e^{-\frac{2}{3}c}e$ e si procede come al

[4] Ricordiamo dalla tabella a pagina 75 che le matrici $C-$simmetriche sono $\Gamma_a, \Gamma_{ab}, \Gamma_{abcde}$.

solito si ottiene

$$\begin{cases} R^a{}_b = d\omega^a{}_b - \omega^a{}_c\omega^c{}_b \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \equiv T^a \\ \varrho = \mathcal{D}\psi \\ H = dB - \frac{i}{2}e^{\frac{4}{3}\sigma}\bar{\psi}\Gamma^a\psi v_a + \beta Tr(AF - \frac{1}{3}A^3) \\ \breve{\sigma} = d\sigma \\ X = \mathcal{D}\chi \\ F = dA + AA \\ \Lambda = \mathcal{D}\lambda + [A, \lambda]. \end{cases} \tag{8.38}$$

Si noti che il campo B per consistenza deve scalare come $B \to e^{\frac{4}{3}c}B$: ciò spiega la presenza del fattore $e^{\frac{4}{3}\sigma}$ nel solito cociclo[5]

$$Y = Y_{(1,2)} = \frac{i}{2}e^{\frac{4}{3}\sigma}\bar{\psi}\Gamma^a\psi v_a. \tag{8.39}$$

In questo paragrafo vogliamo risolvere la teoria dal punto di vista delle identità di Bianchi, assumendo la parametrizzazione minimale (analoga a quella usata per la teoria $D = 3,\ N = 1$)

$$\begin{array}{l} R^a = T^a_{bc}(H, \chi\chi, \lambda\lambda)v^b v^c \\ \varrho = \varrho_{ab}v^a v^b + \Gamma_d M(T)v^d \\ R^{ab} = R^{ab}_{cd}v^c v^d + \bar{\psi}\theta^{ab}_c(\varrho_{ab})v^c + \bar{\psi}K^{ab}(T)\psi \\ \mathcal{D}\chi = X_a v^a + M(\Sigma, T)\psi \\ d\sigma = \Sigma_a v^a + \frac{1}{4}\bar{\chi}\psi \\ H = H_{abc}v^a v^b v^c + ae^{\frac{4}{3}\sigma}\bar{\chi}\Gamma^{ab}\psi v_a v_b. \end{array} \tag{8.40}$$

Si noti che sono possibili anche parametrizzazioni diverse; per esempio con

$$R^a_{(1,1)} = \bar{\chi}\Gamma^{ab}\psi v_b \neq 0; \tag{8.41}$$

tuttavia tramite ridefinizioni dei campi è sempre possibile imporre la (8.40) (l'unica ambiguità consiste nella possibilità di aggiungere una 1050[6] alla parametrizzazione di $T_{(0,2)}$; in tal caso però cambierebbe la legge di supertrasformazione del vielbein $\delta_\varepsilon v = i\bar{\varepsilon}\Gamma^a\psi$; rimandiamo a [21] e alla bibliografia ivi riportata per le dimostrazioni rigorose).

[5] Si noti che in seguito alla (8.37) c'è pure il cociclo $Z = Z_{(5,2)} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^{abcde}\psi v_a v_b v_c v_d v_e$; questo entra nella formulazione duale della teoria in cui invece di una 2-forma B c'è una 6-forma C con curvatura $G = dC - Z$. Tuttavia non ci occupiamo di tale problema (legato alla versione off-shell della teoria).

[6] È indispensabile conoscere le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz in 10 dimensioni riportate nella tabella in appendice B e in [9] pag. 104; la 1050 corrisponde al tensore $X_{([abcde]f)}$ con simmetria degli indici descritta dalla tabella di Young .

La risoluzione delle identità nel settore gravitazionale concettualmente procede come nel caso $D = 3, N = 1$ (le identità sono le stesse): tuttavia dal punto di vista pratico il calcolo è molto più complicato ed è necessario applicare pesantemente la tecnica della scomposizione in rappresentazioni irriducibili illustrata nell'appendice B; comunque tutti i calcoli (o quasi) si possono trovare in [21] capitolo VI, per cui ci limiteremo ad illustrare schematicamente il procedimento.

8.4 Soluzione delle identità bosoniche

Permettono di ricavare la parametrizzazione reonomica.[7]

Identità$-T$:[8]

$$DT + Rv + i\bar{\varrho}\Gamma\psi = 0 \tag{8.42}$$

cioè

$$\begin{aligned} &settore\ (0,3) : 0 = 0 \\ &settore\ (1,2) : D_{(-1,2)}T_{(2,0)} + R_{(0,2)}v + i\bar{\varrho}_{(1,1)}\Gamma\psi = 0 \quad (*) \\ &settore\ (2,1) : D_{(0,1)}T_{(0,2)} + R_{(1,1)}v = 0 \quad (+) \end{aligned} \tag{8.43}$$

Identità$-H$:[9]

$$d(H + Y) - \beta Tr(FF) = 0 \tag{8.44}$$

ovvero

$$\begin{aligned} &settore\ (0,4) : D_{(-1,2)}Y_{(1,2)} = 0 \text{ identità ciclica} \\ &settore\ (1,3) : D_{(-1,2)}H_{(2,1)} + D_{(0,1)}Y_{(1,2)} = 0 \quad (-) \\ &settore\ (2,2) : D_{(-1,2)}H_{(3,0)} + D_{(0,1)}H_{(2,1)} + D_{(1,0)}Y_{(1,2)} = 0 \quad (**) \\ &settore\ (3,1) : D_{(0,1)}H_{(3,0)} + D_{(1,0)}H_{(2,1)} + D_{(2,-1)}Y_{(1,2)} = 0 \quad (++) \end{aligned} \tag{8.45}$$

Identità$-d\sigma$:

$$d^2\sigma = 0 \tag{8.46}$$

$$\begin{aligned} &settore\ (0,2) : D_{(-1,2)}d\sigma_{(1,0)} + D_{(0,1)}d\sigma_{(0,1)} = 0 \quad (***) \\ &settore\ (1,1) : D_{(0,1)}d\sigma_{(1,0)} + D_{(1,0)}d\sigma_{(0,1)} = 0 \quad (+++) \end{aligned} \tag{8.47}$$

[7] Qui come al solito chiamiamo identità bosoniche le identità relative ai bosoni R, T, H, F, σ; sarebbe possibile però (e in un certo senso più giusto) chiamare identità bosoniche tutte quelle con un numero pari di indici spinoriali.

[8] Formalmente identica a quella della teoria tridimensionale.

[9] Diversa da quella tridimensionale per la presenza del campo σ in Y; la presenza dei gluoni invece non si fa sentire nella parametrizzazione reonomica in quanto nei settori (0,4) e (1,3) $Tr(FF) = 0$.

Identità $-F$[10]:

$$DF = 0 \tag{8.48}$$

$$\begin{array}{l} settore\ (0,3) : D_{(-1,2)}F_{(1,1)} = 0 \quad \text{identità ciclica} \\ settore\ (1,2) : D_{(-1,2)}F_{(2,0)} + D_{(0,1)}F_{(1,1)} = 0 \\ settore\ (2,1) : D_{(0,1)}F_{(2,0)} + D_{(1,0)}F_{(1,1)} = 0 \end{array} \tag{8.49}$$

La (*) permette di ricavare[11]

$$\begin{array}{l} \varrho_{(1,1)} = \frac{1}{36}\Gamma_d\Gamma_{abc}T^{abc}\psi v^d \\ R^{ab}_{(0,2)} = i\frac{5}{6}\bar{\psi}\Gamma_c\psi T^{abc} + \frac{i}{36}\bar{\psi}\Gamma^{abcde}\psi T_{cde} \end{array} \tag{8.50}$$

La (+) dà $R_{(1,1)}$ in termini di ϱ_{ab} e delle derivate spinoriali di T_{abc}, come avviene in $D = 3$;

$$\bar{\psi}\theta_{abc} = iD_{(0,1)}T_{abc} - 2i\bar{\psi}\Gamma_{[a}\varrho_{b]c} + i\bar{\psi}\Gamma_c\varrho_{ab} \tag{8.51}$$

l'espressione di T_{abc} in termini di H_{abc} è invece fornita dalla (**)[12]

$$T_{abc} = e^{-\frac{4}{3}\sigma}(-3H_{abc} + 4i\bar{\lambda}\Gamma_{abc}\lambda); \tag{8.52}$$

quest'ultima fissa anche la parametrizzazione esterna del dilatino:

$$D_{(0,1)}\chi = iZ_a\Gamma^a\psi + iZ_{abc}\Gamma^{abc}\psi \tag{8.53}$$

con

$$Z_a = \Sigma_a = D_a\sigma, \quad Z_{abc} = \frac{1}{6}T_{abc} + \frac{i}{288}\bar{\chi}\Gamma_{abc}\chi + \frac{i}{3}e^{-\frac{4}{3}\sigma}\bar{\lambda}\Gamma_{abc}\lambda. \tag{8.54}$$

(lo stesso vincolo su Z_a si ricava pure dalla (***)).
La parametrizzazione del gaugino λ, fissata dalle $F-$Bianchi, è la solita

$$D_{(0,1)}\lambda = -\frac{1}{4}F^{ab}\Gamma_{ab}\psi. \tag{8.55}$$

---

[10] In pratica già risolta alla fine del paragrafo (7.6).

[11] In realtà è necessario usare anche l'identità$-\varrho$ settore (0,3)

$$D_{(-1,2)}\,\varrho_{(1,1)} + R_{(0,2)}\,\psi = 0.$$

[12] La (-) fissa semplicemente $a = -\frac{1}{6}$.

8.5 Soluzione delle identità fermioniche

Permettono di ricavare le equazioni del moto.

Identità$-\varrho$:

$$D\varrho + R\psi = 0 \tag{8.56}$$

$$\begin{array}{l} settore\ (1,2) : D_{(-1,2)}\varrho_{(2,0)} + D_{(0,1)}\varrho_{(1,1)} + R_{(1,1)}\psi = 0 \quad (:) \\ settore\ (2,1) : D_{(0,1)}\varrho_{(2,0)} + R_{(2,0)}\psi = 0 \quad (::) \end{array} \tag{8.57}$$

Identità$-X$:

$$DX + R\chi = 0 \tag{8.58}$$

Identità$-\Lambda$:

$$D\Lambda + R\lambda - [F, \lambda] = 0. \tag{8.59}$$

La (:), dopo aver inserito la parametrizzazione determinata dalle identità bosoniche, dà le equazioni del dilatino (componente 16) e del gravitino (componente 144)

$$\Gamma^{ab}\varrho_{ab} = 0 \Rightarrow \Gamma^a X_a = -\frac{2}{9}\Gamma^{abc}\chi T_{abc} - \frac{4}{3}\Sigma^c\Gamma_c\chi - 8i\Gamma_{ef}F^{ef}\lambda e^{\frac{4}{3}\sigma} \tag{8.60}$$

$$\begin{array}{rl} \Gamma_{abc}\varrho^{bc} = 2\Gamma^c\varrho_{ca} = & -\frac{i}{81}(\Gamma_{efga}\chi T^{efg} - \Gamma^{ef}\chi T_{efa}) + \frac{3}{10}i(X_a + \frac{2}{3}\Sigma_a\chi) + \\ & \frac{i}{30}\Gamma_{ea}(X^e + \frac{2}{3}\Sigma^e\chi) + \frac{8}{5}(8\Gamma^e F_{ea} + \Gamma_{efa}\Gamma^{ef})\lambda e^{-\frac{4}{3}\sigma.} \end{array} \tag{8.61}$$

La (::) con un conto molto lungo fornisce le derivate spinoriali del gravitino e i vincoli[13]

$$D_c T^{cab} = 0, \quad R_S = \frac{2}{3}T^{abc}T_{abc}; \tag{8.62}$$

essi sono interpretati rispettivamente come le equazioni del moto del gravifotone B (T_{abc} contiene H_{abc})

$$(D^c - \frac{4}{3}\Sigma^c)(-3H_{cab} + 4i\bar{\lambda}\Gamma_{abc}\lambda) = 0 \tag{8.63}$$

e del dilatone σ (R_S contiene un termine $\Box_{cov}\sigma = D_a\Sigma^a$, come si è visto in (2.58))

$$\Box\sigma + \frac{4}{3}\Sigma_a\Sigma^a = 2e^{-\frac{4}{3}\sigma}Tr(F_{ab}F^{ab}) - \frac{1}{6}T_{abc}T^{abc}. \tag{8.64}$$

[13] Si trova inoltre che il tensore di Ricci è simmetrico, $\mathcal{R}_{[ab]} = 0$ (la cosa non è ovvia in presenza di torsione, come è illustrato nell'appendice B).

L' equazione del gravitone si determina eseguendo la derivata spinoriale dell' equazione del gravitino; si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^a{}_b - \tfrac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = \; & \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{10}\Box\sigma\eta^a_b - \Sigma^a\Sigma_b\right) + \tfrac{8}{9}\left(\tfrac{1}{10}\Sigma^c\Sigma_c\eta^a_b\right) - \tfrac{4}{15}\eta^a_b T^{efg}T_{efg} \\ & - e^{-\frac{4}{3}\sigma}\left(\tfrac{4}{5}F^{ef}F_{ef}\eta^a_b - 8F^{ac}F_{bc}\right);\end{aligned} \tag{8.65}$$

analogamente si ricavano le equazioni dei gluoni derivando quelle dei gluini, come si è fatto nel paragrafo (7.5)

$$\Gamma^a\Lambda_a + \frac{1}{6}\Gamma^{abc}T_{abc} = 0 \tag{8.66}$$

$$D_a F^{ab} = 4i\bar{\lambda}\Gamma^b\lambda - 2i\bar{\varrho}^{bc}\Gamma_c\lambda. \tag{8.67}$$

Per stabilire il significato fisico della teoria e dare previsioni sperimentali si deve eseguire una compattificazione da $D = 10, N = 1$ in $D = 4, N = 1$ accoppiata; questo procedimento fisserà il potenziale di Kähler e le altre ambiguità di quest'ultima teoria. Tuttavia il processo di compattificazione è assai complicato in quanto la ricerca di soluzioni del tipo $M_{10} = M_4 \times M_6$ con M_4 spazio di Minkowsky impone (r, s, t indici di M_6)

$$R_S = \frac{2}{3}T^{rst}T_{rst}. \tag{8.68}$$

La (8.68) esclude la possibilità di compattificazioni con $M_6 = G/H$ varietà omogenea 6-dimensionale. Infatti usando su G/H la connessione riemanniana $\tilde{\omega}^{rs} = \omega^{rs} + T^{rst}v_t$ si ottiene uno scalare di curvatura negativo

$$R_S = \frac{1}{6}T^{rst}T_{rst} = -\frac{1}{6}\sum T_{rst}T_{rst} < 0 \tag{8.69}$$

mentre tutti gli spazi G/H compatti hanno R_S positivo (nelle convenzioni che usiamo in questo capitolo). Per questo motivo nella compattificazione su M_6 non è possibile trascurare i modi massivi. Inoltre la varietà compatta M_6 deve avere una geometria piuttosto complicata in quanto si dimostra ([47]) che per ridursi ad una teoria $D = 4$, $N = 1$ ragionevole è necessario che M_6 sia complessa e con olonomia $SU(3)$ (ovvero Ricci-piatta); non si conoscono esplicitamente potenziali di Kähler in grado di dare metriche Ricci-piatte anche se comunque certamente questi esistono per un teorema congetturato da Calabi e provato da Yau.

Non vogliamo però approfondire ulteriormente la questione, per la quale rimandiamo alla bibliografia [23],[24],[48].

8.6 La teoria MAFS in dieci dimensioni.

La teoria SUGRA-SYM in $D = 10, N = 1$ descritta nel paragrafo (8.3) è stata studiata per la prima volta, nel formalismo di Noether, da Chaplin e Manton [34], che ne hanno costruito l'azione, le equazioni del moto e le supertrasformazioni. Tale teoria è particolarmente interessante in relazione alle superstringhe, quando è accoppiata ad un gruppo di Yang-Mills $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$. Infatti essa costituisce la teoria effettiva della stringa eterotica, cioè il suo limite a bassa energia; inoltre presenta una caratteristica notevole: mediante il meccanismo di Green-Schwartz, è possibile cancellare le anomalie (Anomaly Free Supergravity, AFS)[14], così come avviene per la teoria genitrice di superstringa.

La tecnica, come si è accennato nel capitolo 6, è quella di modificare l'algebra differenziale con il termine di Chern-Simons di Lorentz

$$\Omega_L = Tr(\omega R - \frac{1}{3}\omega^3) \equiv \omega_{ab}R^{ab} - \frac{1}{3}\omega_{ab}\omega^{bc}\omega_c{}^a \tag{8.70}$$

scrivendo

$$H = dB - \frac{i}{2}e^{\frac{4}{3}\sigma}\bar{\psi}\Gamma^a\psi v_a + \beta\Omega_{YM}(A) - \gamma\Omega_L(\omega). \tag{8.71}$$

La prova dell'esistenza e la determinazione esplicita della parametrizzazione reonomica per $\gamma \neq 0$ poggia sul teorema BPT (Bonora, Pasti, Tonin) che permette di risolvere l' identità di Bianchi

$$d(H + Y) - \beta Tr(FF) + \gamma Tr(RR) = 0 \tag{8.72}$$

come nel caso precedente $d(H' + Y) - \beta Tr(FF) = 0$, per lo meno nei settori (0,4) e (1,3), che sono gli unici di interesse per la determinazione della parametrizzazione esterna di H. Infatti vale la seguente proprietà: è possibile scrivere[15]

$$Tr(RR) = dX + K \tag{8.73}$$

con X e K gauge-invarianti e

$$K_{(0,4)} = K_{(1,3)} = 0. \tag{8.74}$$

Si noti che la 4-forma K dev'essere chiusa (differenziare la (8.72)) e che quindi è un cociclo di "d".

[14] Non ci interessa approfondire in questa sede il discorso sulle anomalie, per il quale rimandiamo alla tesi [29] capitolo 7. Diciamo soltanto che la cancellazione delle anomalie è possibile per i gruppi citati e fissa il rapporto γ/β.

[15] Si noti che certamente non può essere $K = 0$ in quanto $Tr(RR) = d\Omega_L(\omega)$ e il termine di Chern-Simons, non essendo gauge-invariante, non è un X accettabile.

In seguito al teorema BPT la (8.72) si riscrive

$$d(H+Y+\gamma X)-\beta TrFF+\gamma K=0 \tag{8.75}$$

e basta ridefinire $H'=H+\gamma X$ per ottenere, nei settori (0,4) e (1,3), un'equazione equivalente a quella della supergravita' pura

$$d(H'+Y)=0; \tag{8.76}$$

la parametrizzazione reonomica per $\gamma\neq 0$ si ottiene allora da quella per $\gamma=0$ scrivendo

$$\begin{cases} H_{(0,3)}=H'_{(0,3)}-\gamma X_{(0,3)} \\ H_{(1,2)}=H'_{(1,2)}-\gamma X_{(1,2)} \\ H_{(2,1)}=H'_{(2,1)}-\gamma X_{(2,1)}. \end{cases} \tag{8.77}$$

Il calcolo esplicito di X e K è molto lungo e pesante[16]; qui ci limitiamo a impostarlo. Assumendo il vincolo $X_{(0,3)}=0$ la (8.73) si scrive

$$\begin{aligned} &Tr(RR)_{(0,4)}=D_{(-1,2)}X_{(1,2)} \\ &Tr(RR)_{(1,3)}=D_{(0,1)}X_{(1,2)}+D_{(-1,2)}X_{(2,1)} \\ &Tr(RR)_{(2,2)}=D_{(1,0)}X_{(1,2)}+D_{(0,1)}X_{(2,1)}+D_{(-1,2)}X_{(3,0)}+K_{(2,2)} \\ &Tr(RR)_{(3,1)}=D_{(1,0)}X_{(2,1)}+D_{(0,1)}X_{(3,0)}+D_{(2,-1)}X_{(1,2)}+K_{(3,1)} \\ &Tr(RR)_{(4,0)}=D_{(1,0)}X_{(3,0)}+D_{(2,-1)}X_{(2,1)}+K_{(4,0)} \end{aligned} \tag{8.78}$$

Estraendo $K_{(2,2)}$ dalla (8.78c) e applicando l'operatore coomologico $D_{(-1,2)}$ ($D^2_{(-1,2)}=0$) si ottiene

$$D_{(-1,2)}K_{(2,2)}=0 \tag{8.79}$$

(si usano le (8.78a,b) e le proprietà (5.19)); dunque $K_{(2,2)}$ è un cociclo di $D_{(-1,2)}$ e quindi combinandolo col cociclo $D_{(-1,2)}X_{(3,0)}$ si ottiene un qualcosa della forma [17]

$$\begin{aligned} D_{(-1,2)}X_{(3,0)}+K_{(2,2)} &\equiv iW^{(1)}_{abc}\bar\psi\Gamma^a\psi v^b v^c+W^{(5)}_{abc}\bar\psi\Gamma^{abcde}\psi v_d v_e \\ &=Tr(RR)_{(2,2)}-D_{(0,1)}X_{(2,1)}-D_{(1,0)}X_{(1,2)} \end{aligned} \tag{8.80}$$

[16] Tanto che che portarlo a compimento fino in fondo si sono recentemente usate tecniche informatiche (cioè un programma di manipolazione simbolica: si veda l'articolo di I. Pesando e P. Frè [23]).

[17] Gli unici cocicli di tipo (2,2) di $D_{(-1,2)}$ sono

$$\bar\psi\Gamma^a\psi W^{(1)}_{abc}v^b v^c \text{ e } \bar\psi\Gamma^{abcde}\psi W^{(5)}_{abc}v_d v_e.$$

mentre la forma esplicita di X e K per pure considerazioni dimensionali sarà del tipo

$$\begin{cases} X_{\alpha\beta\gamma} = 0 \text{ (peso -3/2)} \\ X_{\alpha\beta e} \sim D_{[d}T_{abc]}\Gamma^{abcd}{}_{\alpha\beta e} + T_{abe}T^{abd}\Gamma_{d\alpha\beta} + \cdots \text{(peso -2)} \\ X_{\alpha ab} \sim (\Gamma_{[a}D^c\varrho_{b]c})_\alpha + T_{abc}\varrho^a_\alpha + \cdots \text{ (peso -5/2)} \\ X_{abc} \sim W_{abc} \sim \frac{1}{36}\Box T_{abc} + TR + DTT + \cdots \text{ (peso -3)} \end{cases} \tag{8.81}$$

e si può ricavare esplicitamente risolvendo le (8.78).[18] Qui ci basta osservare che X_{abc} contiene certamente un termine in $\Box T_{abc}$ in conseguenza all'identità (3,1) se si sfrutta il fatto che $X_{(1,2)}$ contiene le derivate prime di T_{abc} ($D_{[d}T_{abc]}$).

La presenza del termine $\gamma \neq 0$ cambia non soltanto la parametrizzazione reonomica, ma anche le equazioni del moto: in particolare la (**) si scrive

$$D_{(-1,2)}H_{(3,0)} + D_{(0,1)}H_{(2,1)} + D_{(1,0)}Y_{(1,2)} + \gamma(D_{(-1,2)}X_{(3,0)} + K_{(2,2)}) = 0; \tag{8.82}$$

questa si spezza in

$$\frac{3}{2}H_{abc} + e^{\frac{4}{3}\sigma}(\frac{1}{3}T_{abc} + Z_{abc} - \frac{i}{288}\bar{\chi}\Gamma_{abc}\chi) - i\bar{\lambda}\Gamma_{abc}\lambda + \gamma W^{(1)}_{abc} = 0 \tag{8.83}$$

e

$$e^{\frac{4}{3}\sigma}(\frac{1}{36}T_{abc} + \frac{i}{64\cdot 27}\bar{\chi}\Gamma_{abc}\chi - \frac{1}{6}Z_{abc}) - \frac{i}{6}\bar{\lambda}\Gamma_{abc}\lambda + \gamma W^{(5)}_{abc} = 0 \tag{8.84}$$

da cui

$$T_{abc} = e^{-\frac{4}{3}\sigma}(-3H_{abc} + 4i\bar{\lambda}\Gamma_{abc}\lambda - 2\gamma(W^{(1)}_{abc} + 6W^{(5)}_{abc})). \tag{8.85}$$

e

$$Z_{abc} = \frac{1}{6}T_{abc} + \frac{i}{288}\bar{\chi}\Gamma_{abc}\chi + e^{-\frac{4}{3}\sigma}(-\frac{i}{3}\bar{\lambda}\Gamma_{abc}\lambda + 6\gamma W^{(5)}_{abc}). \tag{8.86}$$

La (8.85) è un'equazione differenziale per la torsione ($W_{abc} = W^{(1)}_{abc} + 2W^{(5)}_{abc}$ contiene termini del tipo $\Box T_{abc}$) che si può risolvere solo perturbativamente ponendo

$$T_{abc} = T^{(\gamma=0)}_{abc} + \gamma^1 T^{(1)}_{abc} + \gamma^2 T^{(2)}_{abc} + \cdots \tag{8.87}$$

Per un meccanismo simile a quello illustrato nel capitolo 2, tale ansatz dà luogo ad infinite equazioni differenziali e si ottiene così una teoria non locale. Inoltre il campo T dà luogo a dei ghosts (si veda [31]) ; tuttavia ciò non è preoccupante visto che la MAFS va pensata solo come teoria effettiva (unitarietà e rinormalizzabilità sono richieste solo per la teoria genitrice, che è quella della superstringa eterotica).

[18] Si veda [21] pag. 1912 oppure [22].

8.7 Cenni al caso non minimale

La soluzione delle identità di Bianchi determinata nei paragrafi precedenti si dice soluzione minimale ed è la più semplice soluzione possibile; tuttavia essa non è unica. Il motivo è dovuto ad una certa indeterminazione su H: supponiamo infatti di prendere

$$H' = H + dZ, \quad (dZ)_{(0,4)} = (dZ)_{(1,3)} = 0; \tag{8.88}$$

in tali condizioni anche H' è soluzione dell'identità (8.72). In seguito alla richiesta $(dZ)_{(0,4)} = (dZ)_{(1,3)} = 0$ si hanno varie informazioni sulla parametrizzazione più generale possibile (per le dimostrazioni si veda [21]).

1. La parametrizzazione più generale possibile di H' è del tipo

   $$H'_{(0,3)} = \bar{\psi}\phi^{\underline{672}}_{abcde}\bar{\psi}\Gamma^{abcde}\psi \tag{8.89}$$

   con $\phi^{\underline{672}}_{abcde}$ non derivata spinoriale di una $\pi^{\underline{126}}$ e

   $$D_{(0,1)}\phi^{\underline{672}} \; non \text{ contenente una } 2772; \tag{8.90}$$

   inoltre $H_{(1,2)}$ contiene una 210 e la parte 1440 della sua derivata spinoriale è da identificare con le derivate spaziali di $\phi^{\underline{672}}$.

2. La soluzione dei vincoli stabiliti al punto 1 a tutt'oggi non è nota; comunque la presenza di una 672 non nulla permette di introdurre termini di ordine arbitrariamente alto nelle derivate spaziali, spiegando così la non località tipica della teoria di stringa genitrice (anche mantenendo $\gamma = 0$!).

8.8 Supergravità in 9,8 e 7 dimensioni

In questo paragrafo ci occupiamo delle teorie minimali in $D = 9, 8, 7$; esse presentano delle caratteristiche comuni e possono essere trattate contemporaneamente. In tutte queste teorie esistono[19]:

- un gravitone v;

[19] In queste dimensioni l'unico accoppiamento possibile è con supermultipletti scalari del tipo

$$\begin{array}{ll} (A^r, \lambda^r, \sigma^{ir}) & (D = 9) \\ (A^r, \lambda^r, \sigma^{ir}) & (D = 8) \\ (A^r, \lambda^{ir}, \sigma^{ir}) & (D = 7), \end{array} \tag{8.91}$$

$i = 1$ in $D = 9$, $i = 1, 2$ in $D = 8$, $i = 1, 2, 3$ in $D = 7$.

- uno o più gravitini ψ^i (sono due solo in $D = 7$);
- dei campi vettoriali A^I (m nel multipletto del gravitone [20] ed n nei multipletti scalari);
- dei campi spinoriali λ^{ir} nei multipletti scalari;
- dei campi scalari σ^{ir};
- un dilatone σ;
- un dilatino χ;
- un gravifotone (2-forma) B.

L'idea è che i campi scalari parametrizzino una varietà scalare $K = G/H$ con una $H-$connessione in grado di rendere locali le simmetrie $SO(m)^{21} \times SO(n)$ sui campi spinoriali

$$\begin{cases} D=9 & \lambda^r \longrightarrow \Lambda^r{}_s\lambda^s & H = SO(n) \\ D=8 & \lambda^r \longrightarrow e^{-\frac{i}{2}\theta\Gamma_9}\Lambda^r{}_s\lambda^s & H = U(1)\times SO(n) \\ D=7 & \lambda^{ir} \longrightarrow \Lambda^i{}_\kappa\Lambda^r{}_s\lambda^{\kappa s} & H = Usp(2)\times SO(n); \end{cases} \tag{8.92}$$

ciò impone

$$\begin{cases} D=9 & K = SO(1,n)/SO(n) & (\dim K = n) \\ D=8 & K = SO(2,n)/SO(2)\times SO(n) & (\dim K = 2n) \\ D=7 & K = SO(3,n)/SO(3)\times SO(n) & (\dim K = 3n) \end{cases} \tag{8.93}$$

La base P e la connessione Q della varietà scalare si costruiscono con il metodo illustrato nel capitolo 2 per $SO(m,n)/SO(m)\times SO(n)$ e Q permette di definire le derivate $H-$covarianti

$$\begin{cases} D=9 & D\lambda^r = \mathcal{D}\lambda^r + Q^r{}_s\lambda^s \\ D=8 & D\lambda^r = \mathcal{D}\lambda^r + Q^r{}_s\lambda^s + \frac{i}{2}Q^{\otimes}\Gamma_9\lambda^r \\ D=7 & D\lambda^{ri} = \mathcal{D}\lambda^{ri} + Q^r{}_s\lambda^{si} + Q^i{}_\kappa\lambda^{r\kappa}. \end{cases} \tag{8.94}$$

Se si rende locale un sottogruppo $(n+m)-$dimensionale $S \subset G$ è possibile pensare i campi vettoriali come campi di gauge non abeliani; la base P e la connessione Q vanno allora sostituite con $P(A)$ e $Q(A)$ e diventa possibile il termine il termine di Chern-Simons[22]

$$\Omega(A) = Tr(AF - \frac{1}{3}A^3) \tag{8.95}$$

[20] $m = 1,2,3$ in $D = 9,8,7$.

[21] Per $m = 1,2,3$ $SO(m)$ è isomorfo a $\{\mathbb{1}\}, U(1), Usp(2)$.

[22] Nel caso abeliano invece $\Omega(A) = \sum_{\mathcal{I}} A^{\mathcal{I}} dA^{\mathcal{I}}$.

che va inserito in H; l'algebra differenziale completa è allora del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} R^a{}_b = d\omega^a{}_b - \omega^a{}_c\omega^c{}_b \\ R^a = \mathcal{D}v^a - \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^a\psi \\ \varrho^i = D\psi^i \\ F^I = dA^I + \frac{1}{2}c^I_{JK}A^JA^K, I = (i,r) \\ \Lambda = D\lambda \\ H = dB - \Omega(A) \\ P^i{}_r = L^i{}_I dL^I{}_r \\ X^r = D\chi^r. \end{array}\right. \tag{8.96}$$

Tali teorie si risolvono imponendo opportune parametrizzazioni reonomiche e sfruttando intensivamente le proprietà degli spinori, delle matrici Γ , e le identità di Fierz in 7,8,9 dimensioni. Il significato fisico viene esplicitato cercando opportune compattificazioni che diano come prodotto una supergravità $D = 4, N = 1$ accoppiata con uno specifico potenziale di Kähler. Compattificazioni di questo tipo sono possibili (si veda la bibliografia citata più sotto) in quanto diventano possibili nella lagrangiana termini di potenziale proporzionali alla costante di accoppiamento (o alle costanti di accoppiamento se S si spezza in fattori semplici) e; tali termini sono del tipo

$$W(\sigma, \sigma^{ir}) = \bar{e}^2 e^{-\sigma} C^2(\sigma^{ir}) \tag{8.97}$$

essendo C^2 una qualche espressione $S-$invariante quadratica nelle costanti di struttura "boosted" definite nel capitolo 2; [23] il fattore e^σ serve per assicurare l'invarianza di scala per $\sigma \longrightarrow \sigma + c,\ A \longrightarrow e^{-\frac{c}{2}}A,\ e \longrightarrow e^{+\frac{c}{2}}e$; questa a sua volta è essenziale per la ricerca di compattificazioni di Minkowsky, cioè con $\mathcal{R}_{ab} = 0$.[24]

La forma esatta del potenziale si ottiene costruendo un ansatz per il lagrangiano e richiedendo l'invarianza per supersimmetria, come si è fatto in 4 dimensioni.

Nota: il procedimento appena usato è generale e si può applicare, con qualche modifica, anche ad altre teorie. Si confronti per esempio con la $D = 4, N = 3$ trattata in [21] capitolo IV.7.

[23] Per un'espressione esplicita rimandiamo agli articoli [35], [36] per le dimensioni 7 e 8; in dimensione 9 non esiste un potenziale opportuno ([37]).

[24] Si sfrutta il meccanismo visto nel capitolo 2.

Appendice A

APPUNTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

A.1 Convenzioni e trucchi utili

In questa appendice riportiamo le convenzioni da noi seguite assieme a qualche trucco e qualche formula di grande utilità nella pratica.

1. Indici simmetrizzati e antisimmetrizzati.

$$\begin{array}{l} (abc) \equiv \frac{1}{3!}(abc + cab + bca + acb + bac + cba) \\ [abc] \equiv \frac{1}{3!}(abc + cab + bca - acb - bac - cba) \end{array} \tag{A.1}$$

   e analoghe per più indici. Espressioni del tipo $(abc|de|f)$ e simili indicano che gli indici $abcf$ vanno simmetrizzati mentre gli indici d ed e no.

   È utilissima la scomposizione[1]

$$3X_{[abc]} = X_{a[bc]} + 2X_{[bc]a}; \tag{A.2}$$

   essa si generalizza come segue:

$$(n+1)X_{[aa_1\cdots a_n]} = X_{a[a_1\cdots a_n]} - nX_{[a_1|a|a_2\cdots a_n]}; \tag{A.3}$$

2. Sul tensore metrico.

[1] Vale anche per indici simmetrizzati.

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} + & & & \\ & - & & \\ & & \ddots & \\ & & & - \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

$$\eta^{ab} = (\eta_{ab})^{-1} \tag{A.5}$$

$$\det \eta = (-1)^{D-1}. \tag{A.6}$$

η permette di alzare e abbassare gli indici. Definiamo anche

$$\eta^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_k} \equiv \eta^{[a_1}_{[b_1} \cdots \eta^{a_k]}_{b_k]}; \tag{A.7}$$

vale

$$\eta^{a_1 \cdots a_k}_{a_1 \cdots a_k} = \binom{D}{k}. \tag{A.8}$$

3. Sul simbolo di Ricci.

$$\varepsilon^{012 \cdots D-1} \equiv 1 \tag{A.9}$$

$$\varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = (-1)^{D-1} \varepsilon^{a_1 \cdots a_D} \tag{A.10}$$

$$\varepsilon_{a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_{D-k}} \varepsilon^{c_1 \cdots c_k b_1 \cdots b_{D-k}} = (-1)^{D-1} k!(D-k)! \eta^{c_1 \cdots c_k}_{a_1 \cdots a_k}. \tag{A.11}$$

4. Formule con tre indici.

   Sommando tre volte l'equazione

$$\mathcal{D} g_{\tilde{a}\tilde{b}} = \partial_{\tilde{c}} g_{\tilde{a}\tilde{b}} - g_{\tilde{d}\tilde{b}} \Gamma^{\tilde{d}}_{\tilde{a}\tilde{c}} - g_{\tilde{a}\tilde{d}} \Gamma^{\tilde{d}}_{\tilde{b}\tilde{c}} = 0 \tag{A.12}$$

   con gli indici ciclati si può provare la formula di Christoffel

$$\Gamma^{\tilde{a}}_{\tilde{b}\tilde{c}} = \frac{1}{2} g^{\tilde{a}\tilde{d}} (\partial_{\tilde{a}} g_{\tilde{d}\tilde{b}} + \partial_{\tilde{b}} g_{\tilde{d}\tilde{a}} - \partial_{\tilde{d}} g_{\tilde{a}\tilde{b}}). \tag{A.13}$$

   In maniera simile si dimostra che se $\omega_{[ab]c}$ è un oggetto con i primi due indici antisimmetrici e $T^{a[bc]}$ è un oggetto con gli ultimi due indici antisimmetrici l'equazione

$$\theta^a_{[bc]} = T^a_{bc} \tag{A.14}$$

   è equivalente a

$$\theta_{abc} = 2T_{[b|c|a]} - T_{cab}. \tag{A.15}$$

5. Forme differenziali. [2]

Nel testo a volte usiamo la normalizzazione

$$\alpha = \frac{1}{k!}\alpha_{a_1\cdots a_k} v^{a_1}\cdots v^{a_k} \tag{A.16}$$

a volte la normalizzazione di [21]

$$\alpha = \alpha_{a_1\cdots a_k} v^{a_1}\cdots v^{a_k}; \tag{A.17}$$

in questa appendice usiamo la (A.16); indichiamo l'elemento di volume con

$$\begin{array}{l} \eta \equiv v^0\cdots v^{D-1} = \frac{(-1)^{D-1}}{D!}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} v^{a_1}\cdots v^{a_D} \\ (v_{a_1}\cdots v_{a_D} = \varepsilon_{a_1\cdots a_D}\eta) \end{array} \tag{A.18}$$

e definiamo

$$\begin{array}{l} {}^*v_{a_1} \equiv \frac{1}{(D-1)!}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} v^{a_2}\cdots v^{a_D} \\ (v_{a_1}\cdots v_{a_{D-1}} = (-1)^{D-1}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}\ {}^*v_{a_D}); \end{array} \tag{A.19}$$

in generale

$$\begin{array}{l} {}^*(v_{a_1}\cdots v_{a_k}) \equiv \frac{1}{(D-k)!}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} v^{a_{k+1}}\cdots v^{a_D}, \\ v_{a_1}\cdots v_{a_{D-k}} = (-1)^{D-1}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}\ {}^*(v^{a_{D-k+1}}\cdots v^{a_D}). \end{array} \tag{A.20}$$

A.2 Qualche applicazione

6. Le equazioni di Einstein si deducono dall'espressione

$$R^{a_1a_2} v^{a_3}\cdots v^{a_{D-1}}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} = 0 \tag{A.21}$$

Dim:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}R^{a_1a_2}_{b_1b_2} v^{a_3}\cdots v^{a_{D-1}}\varepsilon_{a_1\cdots a_D} = 0 \\ \\ \frac{1}{2}R^{a_1a_2}_{b_1b_2}(-1)^{D-1}\varepsilon^{b_1b_2a_3\cdots a_{D-1}a}\varepsilon_{a_1\cdots a_D}\ {}^*v_a = 0 \\ \\ \frac{1}{2}3!(D-3)!R^{a_1a_2}_{b_1b_2}\eta^{b_1b_2a}_{a_1a_2a_D}\ {}^*v_a = 0 \\ \\ (D-3)!R^{a_1a_2}_{b_1b_2}(\eta^{b_1b_2a}_{a_1a_2a_D} - 2\eta^{b_1ab_2}_{a_1a_2a_D})\ {}^*v_a = 0 \\ \\ (D-3)!(R_S\eta^a{}_{a_D} - 2\mathcal{R}^a{}_{a_D})\ {}^*v_a = 0 \\ \\ \Rightarrow \quad \mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\mathcal{R}_S eta^a{}_b = 0. \end{array} \tag{A.22}$$

[2] Il prodotto esterno ^ è sottointeso.

7. È poi utile la formula

$$\mathcal{R}^a{}_b - \frac{1}{2}\eta^a{}_b R_S = \mathcal{T}^a{}_b \Longleftrightarrow \mathcal{R}^a{}_b = \mathcal{T}^a{}_b - \frac{1}{D-2}\mathcal{T}^c{}_c \eta^a{}_b \tag{A.23}$$

che si prova contraendo gli indici.

8. L'equazione della torsione si deduce da

$$T^{a_2} v^{a_3} \cdots v^{a_{D-1}} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0. \tag{A.24}$$

Dim:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} T^{a_2}_{b_1 b_2} v^{b_1} v^{b_2} v^{a_3} \cdots v^{a_{D-1}} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} = 0 \\
&\tfrac{1}{2} 3!(D-3)! T^{a_2}_{b_1 b_2} (\eta^{b_1 b_2 a}_{a_1 a_2 a_D} - 2\eta^{b_1 a b_2}_{a_1 a_2 a_D})^* v_a = 0 \\
&(D-32)!(T^{a_2}_{[a_1|a_2|}\eta^a_{a_D]} - 2T^a_{a_1 a_D}) = 0 \\
&\Rightarrow \text{ contraendo } a \text{ e } a_1 \; T^a_{ba} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^a_{bc} = 0.
\end{aligned} \tag{A.25}$$

9. Se esistono campi spinoriali la torsione è non nulla; tuttavia, poichè si può riscrivere l'equazione della torsione

$$\mathcal{D}v^a = dv^a + (\omega^a{}_{bc} v^c) v^b = \frac{1}{2} T^a_{bc} v^b v^c \neq 0 \tag{A.26}$$

come

$$\mathcal{D}' v^a = 0, \quad \omega'_{abc} = \omega_{abc} + \frac{1}{2} T_{[ab]c}, \tag{A.27}$$

anche se ω non è riemanniana è sempre ridefinibile in termini di una connessione ω' riemanniana. In tal caso si può scrivere

$$\omega_{abc} = \Omega_{[ab]c} - \frac{1}{2}\Omega_{cab}, \; \Omega_{abc} \equiv v^{\tilde{b}}_b v^{\tilde{c}}_c \partial_{[\tilde{b}} v_{\tilde{c}]a} \tag{A.28}$$

La ridefinizione $\omega' = \omega + \Delta\omega$ fa comunque cambiare il tensore di curvatura che diventa

$$R' = d\omega' + \omega'\omega' = R + \mathcal{D}\Delta\omega + \Delta\omega\Delta\omega. \tag{A.29}$$

A.3 Gruppi classici

In questo paragrafo ricordiamo qualche nota sulla classificazione dei gruppi di Lie; essa si basa sul seguente teorema:

entro ampie ipotesi qualsiasi gruppo di Lie si può ottenere come prodotto diretto dei seguenti gruppi fondamentali (eventualmente moltiplicati per dei fattori $U(1)$ e/o per un gruppo discreto):

Gruppi di Lie semplici e compatti

Gruppo	Rango	Numero dei parametri
$A_l = SU(l+1)$	$l > 0$	$l^2 + 2l = 3, 8, 15, 24, \ldots$
$B_l = SO(2l+1)$	$l > 1$	$2l^2 + l = 10, 21, 36, \ldots$
$C_l = Usp(2l)$	$l > 1$	$2l^2 + l = 10, 21, 36, \ldots$
$D_l = SO(2l)$	$l > 2$	$2l^2 - l = 15, 28, 45, \ldots$
E_6	6	78
E_7	7	133
E_8	8	248
F_4	4	52
G_2	2	14

I gruppi A_l, B_l, C_l, D_l si dicono gruppi classici, i gruppi E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 gruppi eccezionali. In particolare i gruppi più semplici possibili (di dimensione minore di 16) sono $SU(2), SU(3), Usp(4), SU(4)$.

Appendice B

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI DEI GRUPPI

B.1 Introduzione

In questa appendice raccogliamo alcune nozioni di teoria della rappresentazione dei gruppi. Le note qui riportate saranno utilissime per sviluppare i calcoli tipici delle teorie di supergravità. Per la bibliografia rimandiamo a [5],[9],[10],[11].

B.2 Rappresentazioni tensoriali e tabelle di Young

In generale data una rappresentazione n-dimensionale (complessa)

$$X_i \longrightarrow X_j \Lambda^j{}_i \tag{B.1}$$

di un gruppo H[1], è possibile costruire altre rappresentazioni considerando oggetti con più indici:

$$X_{a_1 \cdots a_k} \longrightarrow X_{b_1 \cdots b_k} \Lambda^{b_1}{}_{a_1} \cdots \Lambda^{b_k}{}_{a_k}. \tag{B.2}$$

Tali rappresentazioni (tensoriali) non sono però irriducibili, cioè ammettono sottospazi invarianti. Supponiamo per esempio di lavorare con due soli indici:

$$X = X^{ij}. \tag{B.3}$$

Vi sono certamente due sottospazi invarianti:

[1] I gruppi che entrano nelle teorie di (super) gravità sono il gruppo di Lorentz e il gruppo degli automorfismi definito nel capitolo 3: interessano quindi le rappresentazioni dei gruppi classici $SO(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$.

1. lo spazio dei tensori simmetrici $X_{ij} = X_{(ij)}$;

2. lo spazio dei tensori antisimmetrici $X_{ij} = X_{[ij]}$;

(le relazioni di simmetria-antisimmetria sono $GL(n)-$invarianti).

Lavorando con più indici sono possibili diversi tipi di sottospazi invarianti a seconda di quali e quanti indici si simmetrizzano (antisimmetrizzano).

Uno studio sistematico delle proprietà di simmetria dei tensori è possibile nel formalismo delle tabelle di Young che si può trovare descritto in varie referenze (noi abbiamo seguito [5] pag. 104).

Una tabella di Young è costituita da al più $n-1$ righe e da varie colonne (quante se ne vogliono) le cui lunghezze l_i decrescono (o restano uguali) dall'alto in basso; si dice che un tensore $X_{i_1\cdots i_{l_1};\cdots;i_1\cdots i_{l_m}}$ con k indici è descritto dalla tabella $[l_1\cdots l_m]$ con k quadratini se ha le seguenti proprietà:

1. gli indici orizzontali sono simmetrizzati;

2. gli indici verticali sono successivamente antisimmetrizzati.

Per esempio $X_{i_1 i_2;i_3}$ soddisfa

$$X_{ij;k} = X_{(ij);k}, \quad X_{ij;k} = X_{[i|j|;k]}, \quad X_{ij;k} = X_{i[j;k]} \tag{B.4}$$

e si può rappresentare colla tabella $\begin{smallmatrix}\square\square\\ \square\end{smallmatrix}$. Si definisce pure la tabella a zero righe e zero colonne

$$\bullet$$

corrispondente agli scalari (tensori a zero componenti); si noti che è possibile definire tabelle a n righe se si intende

$$\begin{smallmatrix}\square\\ n\\ \square\end{smallmatrix} = \bullet \tag{B.5}$$

in quanto un tensore n-antisimmetrico in uno spazio a n dimensioni corrisponde ad uno scalare; tabelle con più di n righe si intendono identicamente nulle.

Il numero delle componenti distinte di $X_{i_1\cdots i_{l_1};\cdots;i_1\cdots i_{l_m}}$ è la dimensione della rappresentazione $[l_1\cdots l_m]$ di H; tale numero si può calcolare facilmente con il metodo delle distanze e degli uncini spiegato in [5]; in particolare per le tabelle più semplici si trova

$$
\begin{aligned}
&\dim \ydiagram{1} = n\\
&\dim \ydiagram{1,1} = n(n-1)/2\\
&\dim \ydiagram{2} = n(n+1)/2\\
&\dim \ydiagram{1,1,1} = n(n-1)(n-2)/6\\
&\dim \ydiagram{2,1} = n(n+1)(n-1)/3\\
&\dim \ydiagram{3} = n(n+1)(n+2)/6\\
&\dim \ydiagram{1,1,1,1} = n(n-1)(n-2)(n-3)/4!\\
&\dim \ydiagram{2,1,1} = n(n+1)(n-1)(n-2)/8\\
&\dim \ydiagram{2,2} = n^2(n^2-1)/12\\
&\dim \ydiagram{3,1} = n(n+1)(n+2)(n+1)/8\\
&\dim \ydiagram{4} = n(n+1)(n+2)(n+3)/4!
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

Nota: in tutti i ragionamenti svolti finora si è trascurata la rappresentazione complessa coniugata $X_{i^*} \longrightarrow X_{j^*}\Lambda^{j^*}{}_{i^*}$; i ragionamenti sviluppati per gli indici i valgono però anche per gli indici i^* e la dimensioni delle rappresentazioni non cambiano; nel formalismo di Young la rappresentazione coniugata è rapprentata da una tabella che si ottiene come negli esempi in figura (per $n = 5$):

$$
(\ydiagram{1})^* \equiv \ydiagram{1,1,1,1}, \qquad (\ydiagram{3,1,1,1})^* \equiv \ydiagram{3,2,2,2}; \tag{B.7}
$$

(la seconda tabella ruotata di 180 gradi e sommata alla prima forma un rettangolo con n righe).

B.3 Rappresentazioni irriducibili

In generale non è detto che il sottospazio invariante associato ad una tabella di Young costituisca una rappresentazione irriducibile di H; supponiamo per esempio che H sia il gruppo ortogonale $SO(P, D-P)$; in tal caso sull'insieme dei tensori simmetrici si può imporre la condizione $H-$invariante[2] di avere traccia nulla

$$
\eta_{ab} X^{ab} = 0 \tag{B.8}
$$

diminuendo così la dimensione della rappresentazione irriducibile. Diamo qualche esempio concreto:

[2] In generale su generici oggetti con indici in qualche rappresentazione di H si possono imporre delle condizioni $H-$invarianti (cioè definire sottospazi invarianti) se esistono degli oggetti $H-$invarianti: per il gruppo metrico tali oggetti sono il tensore metrico η_{ab}, il simbolo di Ricci $\varepsilon_{a_1 \cdots a_D}$, le matrici $\Gamma_{(k)}$ e le matrici A, B, C.

- dimensione della rappresentazione irriducibile associata a $X^{(ab)}$:

$$\dim \square\!\square = \frac{D(D+1)}{2} - 1; \tag{B.9}$$

- dimensione della rappresentazione irriducibile associata a $X^{(abc)}$:

$$\dim \square\!\square\!\square = \frac{D(D+1)(D+2)}{3!} - D; \tag{B.10}$$

- dimensione della rappresentazione irriducibile associata a $X^{ab;c}$:

$$\dim \begin{smallmatrix}\square\!\square\\ \square\end{smallmatrix} = \frac{D(D^2-1)}{3} - D; \tag{B.11}$$

- dimensione della rappresentazione irriducibile associata a $X^{ab;cd}$:

$$\dim \begin{smallmatrix}\square\!\square\\ \square\!\square\end{smallmatrix} = \frac{D^2(D^2-1)}{12} - \frac{D(D+1)}{2}; \tag{B.12}$$

- dimensione della rappresentazione irriducibile associata a $X^{ab;c;d}$:

$$\dim \begin{smallmatrix}\square\!\square\\ \square\\ \square\end{smallmatrix} = \frac{D(D^2-1)(D-2)}{8} - \frac{D(D-1)}{2.} \tag{B.13}$$

Nota: pel gruppo $SO(n)$ in certi casi è anche possibile imporre la condizione di autodualità (si veda il capitolo 2); in tali casi la dimensione della rappresentazione irriducibile va dimezzata.

B.4 Rappresentazione fermioniche del gruppo di Lorentz

Nelle teorie di supergravità si fa un pesante uso delle rappresentazioni fermioniche del gruppo di Lorentz, cioè di oggetti con indici vettoriali e un indice spinoriale (equivalentemente con un numero dispari di indici spinoriali, in quanto nel caso pari essi si possono accoppiare e ridurre a indici vettoriali tramite le identità di Fierz); per questo motivo in questo paragrafo ricaveremo le dimensioni delle rappresentazioni più diffuse.

La rappresentazione fermionica più semplice è la spinoriale-vettoriale $\Xi_{a\alpha}$; la condizione di irriducibilità ("di traccia") è in tal caso sostituita da una sorta di ortogonalità colle matrici Γ_a (condizione $SO(1,D-1)-$ invariante) già anticipata nelle (3.153)

$$\Gamma^{a\alpha}_{\beta}\Xi_{a\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dim \Xi_{a\alpha} = \Delta(D-1). \tag{B.14}$$

Lo stesso ragionamento si può applicare alle rappresentazioni con due indici bosonici

$$\Xi_{(ab)\alpha} - D\Delta \text{ condizioni di traccia } = \Delta(D(D+1)/2 - D) \tag{B.15}$$

$$\Xi_{[ab]\alpha} - D\Delta \text{ condizioni di traccia } = \Delta(D(D-1)/2 - D); \tag{B.16}$$

nella pratica sono molto diffuse le rappresentazioni del tipo $\Xi_{[a_1 \cdots a_k]\alpha}$; la condizione di irriducibilità

$$\Gamma^{a\alpha}_{\beta}\Xi_{a_1 \cdots a_k \alpha} = 0; \tag{B.17}$$

corrisponde a dare $\binom{D}{k-1}$ condizioni su $\Xi_{a_1 \cdots a_k \alpha}$: dunque la dimensione della rappresentazione è

$$\dim \Xi_{a_1 \cdots a_k \alpha} = \binom{D}{k} - \binom{D}{k-1}. \tag{B.18}$$

Valgono inoltre

$$\dim X^{([ab]c)\alpha} = \Delta(\frac{D(D^2-1)}{3} - D^2 + 1) \tag{B.19}$$

$$\dim X^{(abc)\alpha} = \Delta(\frac{D(D+1)(D+2)}{6} - \frac{D(D+1)}{2}) \tag{B.20}$$

e si può quindi costruire la seguente tabella, in cui si usano spinori chirali irriducibili e le rappresentazioni autoconiugate sono indicate con una †:

Rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz in D=3...11

Tensore	Simmetria bosonica	Dimensione								
X^a	$\ydiagram{1}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X^α	●	2	2	4	4	8	8	16	16	32
$X^{[ab]}$	$\ydiagram{1,1}$	3	6	10	15	21	28	36	45	55
$X^{(ab)}$	$\ydiagram{2}$	5	9	14	20	27	35	44	54	65
$X^{a\alpha}$	$\ydiagram{1}$	4	6	16	20	48	56	128	144	320
$X^{[abc]}$	$\ydiagram{1,1,1}$	1	4	10	10†	35	56	84	120	165
$X^{ab;c}$	$\ydiagram{2,1}$	5	16	35	64	105	160	231	320	429
$X^{(abc)}$	$\ydiagram{3}$	7	16	30	50	77	112	156	210'	275
$X^{[ab]\alpha}$	$\ydiagram{1,1}$	4	4	20	20	112	160	432	560	1408
$X^{(ab)\alpha}$	$\ydiagram{2}$	6	12	40	60	168	224	576	720	1760
$X^{[abcd]}$	$\ydiagram{1,1,1,1}$	-	1'	5	15	35	70	126	210	330
$X^{ab;c;d}$	$\ydiagram{2,1,1}$	2	9	35	45†	189	350	594	945	1430
$X^{ab;cd}$	$\ydiagram{2,2}$	5	10	35	84	168	300	499	770	1144
$X^{abc;d}$	$\ydiagram{3,1}$	7	30	81	175	330	567	910	1386	2025
$X^{(abcd)}$	$\ydiagram{4}$	9	25	55	105	182	294	450	660	935
$X^{[abc]\alpha}$	$\ydiagram{1,1,1}$	2	6	20	36	112	224	768	1200	3520
$X^{ab;c\alpha}$	$\ydiagram{2,1}$	4	10	64	140	512	840	2560	3696	10240
$X^{(abc)\alpha}$	$\ydiagram{3}$	8	20	80	140	448	672	1920	2640	7040

Nota 1: in $D = 4, 8$ è possibile usare anche le rappresentazioni di Majorana che sono reali ed hanno dimensione doppia delle rappresentazioni chirali (complesse):

$$\begin{aligned}
&\dim X^{\alpha} = 4, 16\\
&\dim X^{a\alpha} = 12, 112\\
&\dim X^{[ab]\alpha} = 8, 320\\
&\dim X^{(ab)\alpha} = 24, 448\\
&\dim X^{[abc]\alpha} = 12, 448\\
&\dim X^{[ab]\|c\alpha} = 20, 1680\\
&\dim X^{(abc)\alpha} = 40, 1344
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Nota 2: le rappresentazioni di $SO(N)$ sono molti simili a quelle di $SO(1, N-1)$ tranne che per le diverse condizioni di realtà[3] e autodualità (possibile per $N = 4, 8$):

[3] Si veda [15].

Proprietà degli spinori di $SO(N)$

N = 2,6,10	la rappresentazione spinoriale è complessa
N = 3,4,5,11	la rappresentazione spinoriale è pseudoreale
N = 7,8,9	la rappresentazione spinoriale è reale

B.5 Decomposizione del prodotto di rappresentazioni del gruppo metrico

Il prodotto diretto di rappresentazioni del gruppo di Lorentz si può decomporre in rappresentazioni irriducibili in maniera abbastanza semplice se si tiene conto delle condizioni di traccia e di ortogonalità colle matrici Γ.

Si considerino i seguenti esempi in 10 dimensioni (per quanto si è detto nel capitolo 3 gli spinori chirali si possono indicare con indici X^α e gli spinori antichirali con $X_\alpha = X^{\dot\alpha}C_{\dot\alpha\alpha}$).

1. Due indici vettoriali:

$$X^{ab} = X^{[ab]} + X^{(ab)} + X\eta^{ab} \quad (10 \times 10 = 45 + 54 + 1) \tag{B.22}$$

   Tale esempio è generalizzabile a D dimensioni : $D \times D = \frac{D(D-1)}{2} + (\frac{D(D+1)}{2} - 1) + 1$.

2. Un indice vettoriale ed uno spinoriale:

$$\Xi^{a\alpha} = \Xi^{a\alpha} + \Gamma^{a\alpha\beta}\Xi_\beta \quad (10 \times 16^+ = 144^- + 16^-) \tag{B.23}$$

   In D dimensioni $D \times \Delta = \Delta(D-1) + \Delta$.

3. Due indici spinoriali:

$$\begin{array}{ll} X^{\alpha\beta} = \Gamma^{\alpha\beta}_a X^a + \Gamma^{\alpha\beta}_{abc}X^{abc} + \Gamma^{\alpha\beta}_{abcde}X^{abcde} & (16^+ \times 16^+ = 10 + 120 + 126) \\ X^\alpha{}_\beta = C^\alpha{}_\beta X + \Gamma^\alpha{}_{\beta ab}X^{ab} + \Gamma^\alpha{}_{\beta abcd}X^{abcd} & (16^+ \times 16^- = 1 + 45 + 210) \end{array} \tag{B.24}$$

   Tale decomposizione corrisponde alle identità di Fierz e dipende pesantemente dalla dimensione e dal tipo di spinori utilizzati.

In generale valgono le seguenti tabelle:

Prodotti di $SO(1,2) \sim SU(2) \sim Usp(2)$

$3 \times 3 = 1 + 3 + 5$
$3 \times 2 = 2 + 4$
$2 \times 2 = 1 + 3$
$4 \times 2 = 3 + 5$
$4 \times 3 = 2 + 4 + 6$

Prodotti di $SO(1,3)$ con notazione di Majorana

$$\boxed{\begin{array}{c} 4 \times 4 = 1 + 6 + 9 \\ 4 \times 4_M = 12 + 4_M \\ 4_M \times 4_M = 1 + 1' + 4 + 4' + 6 \\ 4_M \times 16 = 24 + 20 + 12 + 8 \\ 4 \times 6 = 16 + 4 + 4' \\ 4_M \times 6 = 12 + 8 + 4_M \\ 4 \times 8 = 20 + 12 \\ 4 \times 9 = 16 + 16' + 4 \\ 4 \times 12 = 24 + 12 + 8 + 4 \\ 6 \times 6 = 10 + 9 + 9' + 6 + 1 + 1' \\ 6 \times 9 = 30 + 9 + 9' + 6 \end{array}}$$

Prodotti di $SO(1,4) \sim Usp(2,2)$

$$\boxed{\begin{array}{c} 5 \times 5 = 1 + 10 + 14 \\ 5 \times 4 = 4 + 16 \\ 4 \times 4 = 1 + 5 + 10 \end{array}}$$

Prodotti di $SO(1,5) \sim SU(2,2)$

$$\boxed{\begin{array}{c} 6 \times 6 = 1 + 15 + 20 \\ 6 \times 4^+ = 20^- + 4^- \\ 6 \times 4^- = 20^+ + 4^+ \\ 4^+ \times 4^+ = 6 + 10 \\ 4^+ \times 4^- = 1 + 15 \\ 4^+ \times 10^- = 36^- + 4^- \\ 4^- \times 10^- = 20' + 20'' \\ 6 \times 10 = 15 + 45 \end{array}}$$

Prodotti di $SO(1,6)$

$$\boxed{\begin{array}{c} 7 \times 7 = 1 + 21 + 27 \\ 7 \times 8 = 8 + 48 \\ 8 \times 8 = 1 + 7 + 21 + 35 \end{array}}$$

Prodotti di $SO(1,7)$ con spinori di Majorana

$$\boxed{\begin{array}{c} 8 \times 8 = 1 + 28 + 35 \\ 8 \times 16 = 16 + 112 \\ 16 \times 16 = 1 + 1' + 8 + 8' + 28 + 28' + 56 + 56' + 70 \end{array}}$$

Prodotti di $SO(1,8)$

$$\boxed{\begin{array}{c} 9 \times 9 = 1 + 36 + 44 \\ 9 \times 16 = 16 + 128 \\ 16 \times 16 = 1 + 9 + 36 + 84 + 126 \end{array}}$$

Prodotti di $SO(1,9)$

$$\boxed{\begin{array}{c} 10 \times 10 = 1 + 45 + 54 \\ 10 \times 16^{+} = 16^{-} + 144^{-} \\ 10 \times 16^{-} = 16^{+} + 144^{+} \\ 16^{+} \times 16^{+} = 10 + 120 + 126 \\ 16^{+} \times 16^{-} = 1 + 54 + 210 \\ 45 \times 10 = 10 + 120 + 320 \\ 45 \times 16 = 16 + 144 + 560 \\ 45 \times 45 = 1 + 45 + 54 + 210 + 770 + 1386 \end{array}}$$

Prodotti di $SO(1,10)$

$$\boxed{\begin{array}{c} 11 \times 11 = 1 + 55 + 65 \\ 11 \times 32 = 32 + 320 \\ 32 \times 32 = 1 + 11 + 55 + 165 + 330 + 462 \end{array}}$$

Tabelle molto più dettagliate si possono trovare in [9] (però solo per $SU(4)$, $SO(7)$, $SO(8)$, $SO(9)$, $SO(10)$).

Spesso servono anche scomposizioni più complicate: riportiamo qualche esempio in quattro dimensioni usando spinori di Majorana.[4]

1. Supponiamo di voler scomporre la rappresentazione di dimensione 80 $(80 = \frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot 4)$ $X_{(\alpha\beta\gamma)}{}^{a}$; si ha

$$\begin{aligned} X_{(\alpha\beta\gamma)}{}^{a} &= \Gamma^{f}_{(\alpha\beta} X_{f\gamma)}{}^{d} + \Gamma^{fg}_{(\alpha\beta} X_{fg\gamma)}{}^{d} && (20 \times 4 = 12 \times 4 + 8 \times 4) \\ X_{c\gamma}{}^{d} &= X_{[c\gamma}{}^{d]} + X_{(c\gamma}{}^{d)} + \eta_{c}{}^{d} X_{\gamma} + \Gamma_{c\gamma}{}^{\delta} X_{\delta}{}^{d} && (12 \times 4 = 8 + 24 + 4_{M} + 12) \\ X_{fg\gamma}{}^{d} &= X_{[fg\gamma}{}^{d]} + X_{([fg]\ \gamma}{}^{d)} && (8 \times 4 = 12 + 20) \end{aligned}$$

e quindi

$$80 = 20 \times 4 = 24 + 20 + 2 \cdot 12 + 8 + 4_{M}. \tag{B.25}$$

[4] Tali esempi sono utilizzati nel capitolo 7.

2. Un altro esempio interessante è la scomposizione della rappresentazione di dimensione 40 $T_{(\alpha\beta)}{}^{\epsilon}$:

$$\begin{aligned} T_{(\alpha\beta)}{}^{\epsilon} &= \Gamma^{a}_{\alpha\beta} X_a{}^{\epsilon} + \Gamma^{ab}_{\alpha\beta} X_{ab}{}^{\epsilon} && (10 \times 4_M = 4 \times 4_M + 6 \times 4_M) \\ X_a{}^{\epsilon} &= Y_a{}^{\epsilon} + \Gamma_a^{\epsilon\delta} Y_\delta && (4 \times 4_M = 12 + 4_M) \\ Y_{ab}{}^{\epsilon} &= Z_{ab}{}^{\epsilon} + \Gamma_a^{\epsilon\delta} Z_{b\delta} + \Gamma_{ab}^{\epsilon\delta} X_\delta && (6 \times 4_M = 8 + 12 + 4_M) \end{aligned}$$

e quindi risulta

$$10 \times 4_M = 2 \cdot 12 + 8 + 4_M + 4_M. \tag{B.26}$$

B.6 Equazioni con molti indici

La decomposizione in rappresentazioni irriducibili è utilissima nella risoluzione di equazioni con molti indici. Come esempio didattico consideriamo le equazioni di Dirac e di Rarita-Schwinger in 10 dimensioni.

La prima si scrive

$$i\Gamma^{a\alpha\beta}\mathcal{D}_a\lambda_\beta = 0 \tag{B.27}$$

ed è del tipo

$$\Xi^{\alpha} = 0 \tag{B.28}$$

cioè impone dei vincoli sulla rappresentazione 16^{+}; poichè la (B.27) contiene il tensore-spinore

$$\mathcal{D}_a\lambda_\beta = \Lambda_{a\beta} + \Gamma_{a\beta\gamma}\Lambda^{\gamma} \quad (10 \times 16^{-} = 144^{+} + 16^{+}) \tag{B.29}$$

la componente irriducibile 144 resta completamente libera.

Consideriamo ora l'equazione di Rarita-Schwinger

$$i\Gamma^{abc\gamma\delta}\mathcal{D}_b\psi_{c\delta} = 0; \tag{B.30}$$

essa è del tipo

$$\Xi^{a\gamma} = 0 \tag{B.31}$$

e quindi dà informazioni sulla 16 e sulla 144; poichè contiene il tensore-spinore[5]

$$D_{[b}\psi_{c]\delta} = \varrho_{bc\delta} + \Gamma_{[b\gamma\delta}\varrho^{\delta}_{c]} + \Gamma_{bc\delta\gamma}\varrho^{\gamma} \quad ((10 \times 144)_{antisim} = 560 + 144 + 16) \tag{B.32}$$

lascia completamente libera la componente irriducibile 560.

Il contenuto delle equazioni con molti indici, e quindi la loro soluzione, cambia pesantemente a seconda della dimensione D. In particolare l'equazione di Rarita-Schwinger in tre dimensioni determina completamente il gravitino [6] :

$$\Gamma^{abc\gamma\delta}\mathcal{D}_b\psi_{c\delta} \sim 3 \times 2 = 4 + 2, \quad \mathcal{D}_{[b}\psi_{c]\delta} \sim 3 \times 2 = 4 + 2; \tag{B.33}$$

questo non è che un altro modo per dire che il gravitino in tre dimensioni non possiede gradi di libertà fisici: l'equazione del moto lo determina completamente (e impone $\mathcal{D}\psi = 0$ nel vuoto). Un ragionamento analogo vale per il gravitone: il tensore di Riemann

$$R^{[ab]}{}_{[cd]} = R_{[cd]}{}^{[ab]} \sim (3 \times 3)_{sim} = 1 + 5 \tag{B.34}$$

è completamente determinato dal tensore di Ricci

$$\mathcal{R}_{ab} \sim \ (3 \times 3)_{sim} \sim 1 + 5. \tag{B.35}$$

In dimensione $D > 3$ il tensore di Riemann invece contiene ben più informazioni del tensore di Ricci. Supponiamo per esempio di lavorare in $D = 10$: si può allora scrivere

$$\begin{aligned} R^{ab}{}_{cd} \ &= R^{abcd}(\ydiagram{2,2}) + R_{abcd}(\ydiagram{1,1,1,1}) + R_{abcd}(\ydiagram{2,1,1}) + R_{[a[c}(\ydiagram{1,1})\eta_{b]d]} + R_{[a[c}(\ydiagram{2})\eta_{b]d]} + \\ &R(\bullet)\eta_{abcd} \quad (45 \times 45 = 770 + 210 + 945 + 45 + 54 + 1) \end{aligned} \tag{B.36}$$

e l'identità di Bianchi $R^a_{[bcd]} = 0$ $(10 \times 120 = 210 + 945 + 45)$ riduce le componenti di R^{ab}_{cd} a 770+54+1=825[7] (tra l'altro ciò assicura che sia $R^{ab}{}_{cd} = R_{cd}{}^{ab}$); in particolare il fatto che R^{ab}_{cd} non contenga la componente 45 corrisponde a dire che il tensore di Ricci $\mathcal{R}_{ab} = 54 + 1$ è simmetrico. Si noti che tutto questo non è assicurato in presenza di torsione:

$$\mathcal{D}T^a = R^a{}_b v^b \Rightarrow R^a_{bcd} = D_{[b}T^a_{cd]} + T^e_{[bc}T^a_{ed]} \tag{B.37}$$

e quindi

$$3\mathcal{R}_{[bd]} = 3R^a_{[bad]} = 2D_{[b}T^a_{ad]} - D_aT^a_{bd} + 2T^e_{[ba}T^a_{ed]} - T^e_{bd}T^a_{ea} \neq 0; \tag{B.38}$$

se però la torsione soddisfa $T_{abc} = T_{[abc]}$ e $D_aT^{abc} = 0$, come accade nella supergravità in 10 dimensioni, la simmetria del tensore di Ricci è assicurata.

---

[5] Se non si antisimmetrizzano gli indici b e c la decomposizione assume la forma più generale $10 \times 144 = 560 + 720 + 144 + 16$ con la rappresentazione 720 corrispondente a $\varrho_{(bc)\delta}$.

[6] In tre dimensioni le rappresentazioni più semplici sono la 3 (X^a oppure $X^{[ab]} = \varepsilon^{ab}_c X^c$), la 2 ($X^\alpha$) e la 4 ($X^a_\alpha$); a differenza del caso $D = 10$ la posizione degli indici (in alto o in basso) non conta poichè esiste il tensore invariante $C_{\alpha\beta}$.

[7] Questo è in perfetto accordo colla formula che dà il numero delle componenti indipendenti di $R^{ab}{}_{cd}$ in tutte le dimensioni, $N = D^2(D^2-1)/12$ ([3] pag. 143).

B.7 Teorie estese

Di solito le teorie fisiche contengono N spinori λ^i caratterizzati da un ulteriore indice i a valori in una rappresentazione del gruppo degli automorfismi (si veda il capitolo 3). In tal caso le rappresentazioni di $SO(1, D-1)$ e $Aut(D, N)$ vanno distinte. Per fissare le idee illustriamo il caso $D = 3$, $Aut(3, 8) = SO(8)$.

$SO(8)$ ha tre rappresentazioni reali equivalenti X^i, X^ι, X^i; gli indici i si alzano e abbassano con δ_{ij}, gli indici ι con $C_{\iota\kappa} = \delta_{\iota\kappa}$ e gli indici i con $C_{i\dot\kappa} = \delta_{i\dot\kappa}$; sono simmetriche le matrici $\Gamma^{i_1\cdots i_4}_{(\iota\kappa)}$ e $\Gamma^{i_1\cdots i_4}_{(i\dot\kappa)}$, antisimmetriche le matrici $\Gamma^{ij}_{[\iota\kappa]}$ e $\Gamma^{ij}_{[i\dot\kappa]}$; le rappresentazioni irriducibili più semplici sono le seguenti:

Rappresentazioni irriducibili di $SO(8)$

Tensore	Dimensione
X^i	8
X^ι	8^+
X^i	8^-
$X^{[ij]}$	28
$X^{(ij)}$	35
$X^{i_1\cdots i_4+}$	35^+
$X^{i_1\cdots i_4-}$	35^-
$x^{[ijk]}$	56
$X^{i\iota}$	56^-
X^{ii}	56^+
$X^{(ijk)}$	112
$X^{i_1\cdots i_4 i}$	112^+
$X^{i_1\cdots i_4\iota}$	112^-
X^{iji}	160^+
$X^{ij\iota}$	160^-
$X^{ij;k}$	160
X^{ijki}	224^-
$X^{ijk\iota}$	224^+

La decomposizione dei prodotti diretti di rappresentazioni irriducibili procede come nella tabella seguente[8]

[8] Illustriamo per esemplificare la deduzione di qualche semplice prodotto:

$$\begin{array}{ll} 8 \times 8^- = 56^+ + 8^+ : & \hat{X}^{ii} = X^{ii} + \Gamma^{ii\kappa} X_\kappa \\ 8^+ \times 8^- = 56 + 8 : & \hat{X}^{\iota i} = \Gamma^{\iota i}_{ijk} X^{ijk} + \Gamma^{\iota i}_{i} X^i \\ 28 \times 8^+ = 160^+ + 56^+ + 8^+ : & \hat{X}^{[ij]\iota} = X^{ij\iota} + \Gamma^{[i\iota}{}_{\dot\kappa} X^{j]\dot\kappa} + \Gamma^{iji}{}_{\kappa} X^\kappa \end{array} \tag{B.39}$$

Prodotti diretti delle rappresentazioni di $SO(8)$

$$\boxed{\begin{array}{c} 8 \times 8 = 1 + 28 + 35 \\ 8 \times 8^{+} = 8^{-} + 56^{-} \\ 28 \times 8 = 8 + 56 + 160 \\ 35 \times 8 = 8 + 112 + 160 \\ 35 \times 8^{+} = 56^{-} + 224^{-} \end{array}}$$

Una tabella più completa si trova in [9] pag.101.

Sfruttando la tabella (B.7) è possibile risolvere facilmente equazioni con indici $SO(8)$; tipicamente in teorie di supergravità si hanno equazioni del tipo

$$X_{(\underline{\alpha}\underline{\beta})} = 0, \quad \underline{\alpha} = \alpha i,\ \underline{\beta} = \beta j; \tag{B.40}$$

gli indici multipli $\underline{\alpha}$ sono simmetrizzati se

- i e j sono simmetrizzati e α e β sono simmetrizzati;
- i e j sono antisimmetrizzati e α e β sono antisimmetrizzati.

Dunque si può scrivere

$$\begin{aligned} X_{(\alpha i\beta j)} = \quad & \text{rappr.simmetriche in } \alpha\beta \times \text{rappr.simmetriche in } ij\ + \\ & \text{rappr.antisimmetriche in } \alpha\beta \times \text{rappr.antisimmetriche in } ij \end{aligned} \tag{B.41}$$

ovvero[9]

$$\begin{aligned} & X_{(\alpha i\beta j)} = \Gamma^{a}_{\alpha\beta}(X_{a(ij)} + X_{a}\eta_{ij}) + C_{\alpha\beta}X_{[ij]} \\ & ((2,8) \times (2,8))_{sim} = (3, 35+1) + (1, 28). \end{aligned} \tag{B.42}$$

Se vi sono tre coppie di indici simmetrizzate si ha

$$\begin{aligned} & X_{(\alpha i\beta j\gamma k)} = \Gamma^{a}_{(\alpha\beta}X_{a\gamma)(ijk)} + C_{\alpha\beta}X_{\gamma[ij]k} + \Gamma^{a}_{\alpha\beta}X_{ai\gamma}\eta_{jk} + C_{\alpha\beta}X_{a[i}\eta_{j]k} \\ & ((2,8) \times (2,8) \times (2,8))_{sim} = (4, 112) + (2, 160) + (4, 8) + (2, 8). \end{aligned} \tag{B.43}$$

Le formule precedenti sono utili nella costruzione della teoria $D = 3,\ N = 8$ trattata nel capitolo 7.

[9]Nella scrittura (m, n) m indica la dimensione della rappresentazione di $SO(1,2)$, n la dimensione della rappresentazione di $SO(8)$.

Appendice C

SUPERALGEBRA DI POINCARÈ

C.1 Introduzione

In questa appendice, dopo aver dedotto l'estensione supersimmetrica più generale possibile della superalgebra di Poincarè in tutte le dimensioni, daremo la classificazione di tutte le sue rappresentazioni unitarie irriducibili interessanti, cioè in pratica daremo tutti i possibili candidati[1] a supermultipletti on-shell. Qui diamo una visione semplificata e più vicina alle nostra impostazione geometrica di quanto si può trovare in [15].

C.2 La superalgebra di Poincarè ∀ D, ∀ N

.

Nel capitolo 4 si è determinata la superalgebra di Poincarè in alcune dimensioni e per determinati N mediante contrazione di Inönu-Wigner di opportuni supergruppi semplici. In questo paragrafo vogliamo costruire la superalgebra in tutte le dimensioni e per ogni N, in base a pure considerazioni formali.

L'idea è quella di aggiungere all'algebra di Poincarè

$$[J^{ab}, J_{cd}] = -4\eta^{[a}{}_{[c}J_{d]}{}^{b]}, \quad [J_{ab}, P_c] = P_d(S_{ab})^d{}_c, \quad [P_a, P_b] = 0 \tag{C.1}$$

dei generatori fermionici $Q_{\alpha i}$ spinoriali

$$[J_{ab}, Q_{\alpha i}] = Q_{\beta i}(\Sigma_{ab})^\beta{}_\alpha \tag{C.2}$$

[1]Parliamo di candidati poichè per essere sicuri che un certo insieme di campi formi un supermultipletto è necessario dare delle regole di supertrasformazione sensate e queste non sono stabilite a priori.

e inerti rispetto alle traslazioni

$$[P_a, Q_{\alpha i}] = 0 \tag{C.3}$$

con opportune leggi di anticommutazione. Per le proprietà delle rappresentazioni del gruppo di Lorentz e per le caratteristiche di covarianza e di simmetria delle matrici Γ^a e C illustrate nel capitolo 3 tali leggi devono essere le seguenti[2]

$$D = 3: \quad \{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = i\Gamma^a_{\alpha\beta} P_a \delta_{ij} + C_{\alpha\beta} Z_{ij}, \quad Z_{ij} = Z_{[ij]} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned} D = 4: \quad & \{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = C_{\alpha\beta} Z_{ij}, \quad \{Q_{\dot\alpha i}, Q_{\dot\beta j}\} = C_{\dot\alpha\dot\beta} Z_{ij}, \\ & \{Q_{\alpha i}, Q_{\dot\beta j}\} = i\Gamma^a_{\alpha\dot\beta} P_a, \quad Z_{ij} = Z_{[ij]} \end{aligned} \tag{C.5}$$

$$D = 5: \quad \{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = i\Gamma^a_{\alpha\beta} P_a \Omega_{ij} + C_{\alpha\beta} Z_{ij}, \quad Z_{ij} = Z_{[ij]} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned} D = 6 \quad & \{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = i\Gamma^a_{\alpha\beta} P_a \Omega^+_{ij}, \quad \{Q^\alpha{}_i, Q^\beta{}_j\} = i\Gamma^{a\alpha\beta} P_a \Omega^-_{ij} \\ & \{Q_{\alpha i}, Q^\beta{}_j\} = C_\alpha{}^\beta Z_{ij}, \; Z_{ij} = Z_{ij} \end{aligned} \tag{C.7}$$

$$D = 7: \quad \{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = i\Gamma^a_{\alpha\beta} P_a \Omega_{ij} + C_{\alpha\beta} Z_{ij}, \quad Z_{ij} = Z_{(ij)} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned} D = 8: \quad & \{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = C_{\alpha\beta} Z_{ij}, \quad \{Q_{\dot\alpha i}, Q_{\dot\beta j}\} = C_{\dot\alpha\dot\beta} Z_{ij}, \\ & \{Q_{\alpha i}, Q_{\dot\beta j}\} = i\Gamma^a_{\alpha\dot\beta} P_a, \quad Z_{ij} = Z_{(ij)} \end{aligned} \tag{C.9}$$

$$D = 9: \quad \{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = i\Gamma^a_{\alpha\beta} P_a \delta_{ij} + C_{\alpha\beta} Z_{ij}, \quad Z_{ij} = Z_{(ij)} \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned} D = 10: \quad & \{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = i\Gamma^a_{\alpha\beta} P_a \delta_{ij}, \quad \{Q^\alpha{}_i, Q^\beta{}_j\} = i\Gamma^{a\alpha\beta} P_a \delta_{ij} \\ & \{Q_{\alpha i}, Q^\beta{}_j\} = C_\alpha{}^\beta Z_{ij}, \quad Z_{ij} = Z_{ij}. \end{aligned} \tag{C.11}$$

Le proprietà si ripetono in dimensione D mod 8. Si noti che nella costruzione delle regole si sono inserite delle cariche Z_{ij} con indici nel gruppo degli automorfismi (simmetrie interne) descritto nel capitolo 3[3]

$$Aut(D, N) = \begin{cases} SO(N_+) \times SO(N_-) & D = 2, 10 \\ SO(N) & D = 3, 11 \\ SU(N) \times U(1) & D = 4, 8 \\ Usp(N) & D = 5, 7 \\ Usp(N_+) \times Usp(N_-) & D = 6; \end{cases} \tag{C.12}$$

le Z_{ij} (con determinate proprietà di simmetria sugli indici i e j dipendenti dalle proprietà di simmetria di $C_{\alpha\beta}$ e del tutto libere in $D = 2, 6, 10, \cdots$) vanno pensate come inerti per trasformazioni di Poincarè e come tensori per $Aut(D, N)$; indicando con I_{ij} i generatori di quest'ultimo si ha che in generale la superalgebra di Poincarè $N-$estesa $ISO(1, D-1/N)$ è caratterizzata da

[2] Ω_{ij} indica la matrice simplettica che si deve inserire per avere una condizione di realtà in $D = 5, 7$ (in $D = 6$ vi sono due matrici $\Omega^\pm$: una per la rappresentazione chirale ed una per la rappresentazione antichirale).

[3] È il gruppo che agisce sugli indici i degli spinori: $Q^{\alpha i} \to \Lambda^i{}_j Q^{\alpha j} \iff [I_{ij}, Q^{\alpha k}] \sim Q^\alpha_i \delta^k_j$.

- generatori bosonici J_{ab} corrispondenti alle trasformazioni di Lorentz
- generatori bosonici I_{ij} corrispondenti alle simmetrie interne
- generatori bosonici Z_{ij} corrispondenti a cariche centrali commutanti [4]
- generatori bosonici P_a corripondenti alle traslazioni D-dimensionali
- generatori fermionici $Q_{i\alpha}$ corrispondenti a supertraslazioni

e le regole di commutazione sono del tipo

$$\begin{aligned}
&[J,J]=J\\
&[J,P]=P\\
&[P,P]=0\\
&[I,I]=I\\
&[Z,Z]=0\\
&[J,I]=0\\
&[P,I]=0\\
&[J,Z]=0\\
&[P,Z]=0\\
&[I,Z]=Z\\
&[J,Q]=Q\\
&[P,Q]=0\\
&[I,Q]=Q\\
&[Z,Q]=0\\
&\{Q,Q\}=P+Z.
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Nota: la più generale estensione supersimmetrica possibile del gruppo di De Sitter, $G = ISO(1, D-1, \bar{e}/N)$ si può ottenere nello stesso modo in cui si è ottenuta $SO(1, D-1/N)$, tenendo conto della presenza della costante dimensionale $\bar{e}$ ($\bar{e}$ ha peso -1, J peso 0, P e Z peso -1, Q peso -1/2); sono allora possibili le seguenti regole di commutazione

$$\begin{aligned}
&[P_c, P_d] = -\bar{e}^2 J_{cd}\\
&[Z^{ij}, Z_{kl}] \sim \bar{e}\delta^i_k\delta^j_l\\
&[P_a, Q_{\alpha i}] = \bar{e}Q_{\beta i}(\tfrac{\Gamma^a}{2i})^\beta{}_\alpha
\end{aligned} \tag{C.14}$$

(i commutatori restanti non cambiano rispetto al caso di Poincarè) più quelle corrispondenti a $\{Q_{\alpha i}, Q_{\alpha j}\}$ che conterranno un termine $\bar{e}J_{ab}\Gamma^{ab}_{\alpha\beta}$. I dettagli dipenderanno dalle dimensione e dal tipo di spinori utilizzati (esempi in 3, 4 e 5 dimensioni sono già stati dati nel capitolo 4).

[4] Più correttamente sono cariche centrali se la superalgebra non viene estesa al gruppo degli automorfismi.

C.3 Supersimmetria rigida di Poincarè

Per quanto si è detto nel capitolo 4 si vuole che nel vuoto lo spaziotempo sia equivalente a un superspazio supersimmetrico $K = G/H$ con $G = ISO(1, D-1, \bar{e}/N)$ e $H = SO(1,D) \times Aut(D,N))$; in queste note ci limitiamo al caso $\bar{e}$ =0. Se $L(x^A)$ è una rappresentazione matriciale di G/H (per esempio $L(x^A) = \exp(C_A x^A)$ con C_Γ generatori della rappresentazione aggiunta, equivalenti ai coefficienti di commutazione) si ottengono base e connessione di K tramite la

$$\mu = \bar{L} dL = T_a v^a + T_\alpha \psi^\alpha + T_\mathcal{A} \omega^\mathcal{A}. \tag{C.15}$$

L'equazione di Maurer-Cartan fissa allora le curvature $\breve{T}^a$, $\breve{\varrho}^\alpha$, $\breve{R}^\mathcal{A}$ [5]

$$\begin{aligned} 0 = d\mu + \mu\mu &= T_a dv^a + T_\alpha d\psi^\alpha + T_\mathcal{A} d\omega^\mathcal{A} + \\ & [T_\mathcal{A}, T_b]\omega^\mathcal{A} v^b + [T_\mathcal{A}, T_\beta]\omega^\mathcal{A}\psi^\beta + [T_a, T_\beta] v^a \psi^\beta + \\ & \tfrac{1}{2}[T_a, T_b] v^a v^b + \tfrac{1}{2}\{T_\alpha, T_\beta\}\psi^\alpha\psi^\beta + \tfrac{1}{2}[T_\mathcal{B}, T_\mathcal{C}]\omega^\mathcal{B}\omega^\mathcal{C} \\ &= T_a(dv^a + c^a_{\mathcal{A}b}\omega^\mathcal{A} v^b + \tfrac{1}{2} c^a_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta) + T_\alpha(d\psi^\alpha + c^\alpha_{\mathcal{A}\beta}\omega^\mathcal{A}\psi^\beta) \\ & + T_\mathcal{A}(d\omega^\mathcal{A} + \tfrac{1}{2} c^\mathcal{A}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\omega^\mathcal{B}\omega^\mathcal{C} + \tfrac{1}{2} c^\mathcal{A}_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta) \\ &= T_a \breve{T}^a + T_\alpha \breve{\varrho}^\alpha + T_\mathcal{A}\breve{R}^\mathcal{A}; \end{aligned} \tag{C.16}$$

che in presenza di supergravità vengono assunte non nulle e determinate da un'azione invariante per $H-$trasformazioni locali e per supersimmetria.

Nel vuoto invece (o a livello linearizzato) si vuole avere invarianza globale per l'intero gruppo di super Poincarè; ciò impone che i campi contenuti nella teoria ospitino rappresentazioni unitarie irriducibili (r.u.i.) di $ISO(1, D-1/N)$.

C.4 Rappresentazioni infinito-dimensionali della superalgebra di Poincarè

La teoria delle r.u.i. della superalgebra di Poincarè è ben fondata e permette di dimostrare che [6]

[5] Stiamo scrivendo la formulazione duale delle relazioni di commutazione (C.13).

[6] Si veda l'articolo [15] da cui abbiamo estratto le tabelle che seguono.

1. le r.u.i. della superalgebra di Poincarè si spezzano in r.u.i. dell'algebra di Poincarè [7] costituite da multipletti di campi a spin diversi e con la stessa massa [8];

2. la struttura dei supermultipletti (on-shell) è fissata dalla dimensione delle possibili rappresentazioni irriducibili del gruppo di isotropia [9];

---

[7] Le r.u.i. dell'algebra di Poincarè sono ben note e sono di soli 5 tipi (si devono escludere le rappresentazioni con spin > 2 in quanto non danno luogo a teorie di campo locali interagenti consistenti):

- rappresentazione scalare (spin 0):

$$P_a\sigma = \partial_a\sigma, \quad J_{ab}\sigma = 2x_{[a}\partial_{b]}\sigma; \tag{C.17}$$

- rappresentazione spinoriale (spin $\frac{1}{2}$):

$$P_a\lambda_\alpha = \partial_a\lambda\alpha, \quad J_{ab}\lambda_\alpha = 2x_{[a}\partial_{b]}\lambda_\alpha + (\Sigma_{ab})_{\alpha\beta}\lambda^\beta; \tag{C.18}$$

(ci sono varie rappresentazioni spinoriali a seconda del tipo di spinori possibili nella dimensione D.)

- rappresentazione vettoriale (spin 1):

$$P_aA_b = \partial_aA_b, \quad J_{ab}A_c = 2x_{[a}\partial_{b]}A_c + (S_{ab})_{cd}A^d; \tag{C.19}$$

- rappresentazione spinoriale-vettoriale (spin $\frac{3}{2}$):

$$P_a\psi_{c\alpha} = \partial_a\psi_{c\alpha}, \quad J_{ab}\psi_{c\alpha} = 2x_{[a}\partial_{b]}\psi_{c\beta} + (S_{ab})_{cd}\psi^d_\alpha + (\Sigma_{ab})_{\alpha\beta}\psi^\beta_c; \tag{C.20}$$

- rappresentazione tensoriale (spin 2):

$$P_ah_{cd} = \partial_ah_{cd}, \quad J_{ab}h_{cd} = 2x_{[a}\partial_{b]}h_{cd} + (S_{ab})_{ce}h^e{}_d + (S_{ab})_{de}h_c{}^e. \tag{C.21}$$

Notiamo infine che è possibile generalizzare la rappresentazione vettoriale alla rappresentazione su $k-$forme

$$P_aA_{b_1\cdots b_k} = \partial_aA_{b_1\cdots b_k}, \quad J_{ab}A_{b_1\cdots b_k} = 2x_{[a}\partial_{b]}A_{b_1\cdots b_k} + S^b_{aba_1}A_{ba_2\cdots b_k} + \cdots.$$

[8] Tutti i campi di un supermultipletto hanno la stessa massa in quanto P^2 rimane un invariante di Casimir anche per il supergruppo di Poincarè, cioè commuta con tutto; a noi in particolare interesserà solo il caso non massivo con $P^2 = 0$.

[9] Ricordiamo che nel caso di Poincarè lo spazio $\mathcal{H}$ delle rappresentazioni a massa nulla, cioè con $P^2 = 0$, è generato dalla base continua

$$\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_k(x) = \Phi_ke^{-ik\cdot x} \;:\; k^2 = 0\} \tag{C.22}$$

che diagonalizza P:

$$P_a\Phi = -ik_a\Phi. \tag{C.23}$$

A meno di trasformazioni di Lorentz $\mathcal{E}$ è equivalente alla base

$$\bar{\mathcal{E}} = \{\mathcal{E}_k(x) = \Phi_ke^{-ik\cdot x} \;:\; k^a = (k, 0, \ldots, 0, k)\} \tag{C.24}$$

(invece nel caso massivo ci si può ridurre alla base in cui $P\Phi = (im, 0, \ldots 0)\Phi$).

$I(D,N) = SO(D-2) \times Aut(D,N)$ (per rappresentazioni di tipo luce) o $I(D,N) = SO(D-1) \times Aut(D,N)$ (per rappresentazioni massive di cui non ci occuperemo)

3. se si impone che i supermultipletti contengano al massimo campi di spin 2 il numero di rappresentazioni accettabili diventa finito e non molto grande (qualche decina). Tali rappresentazioni sono state tutte classificate in [15], da cui estraiamo la seguente tabella semplificata.[10]

Contenuto in campi delle r.u.i. della superalgebra di Poincarè

Estensioni possibili	Supermultipletti per N minimale
$D=3, N=1\cdots16$	$(A^{\underline{1}}, \lambda^{\underline{1}})$ $(\sigma^{\underline{1}}, \lambda^{\underline{1}})$
$D=4, N=1\cdots8$	$(v^{\underline{2}}, \psi^{\underline{2}})$ $(A^{\underline{2}}, \lambda^{\underline{2}})$
$D=5, N=2,4,6,8$	$(v^{\underline{5\times1}}, \psi^{\underline{4\times2}}, A^{\underline{3\times1}})$ $(A^{\underline{3\times1}}, \lambda^{\underline{2\times2}}, \sigma^{\underline{1\times1}})$ $(\lambda^{\underline{2\times2}}, \sigma^{\underline{1\times4}})$
$D=6, N_+ + N_- \leq 8$	$(v^{\underline{9\times1}}, B^{\underline{3\times1}}, \psi^{\underline{6\times2}})$ $(B^{\underline{3\times1}}, \lambda^{\underline{2\times2}}, \sigma^{\underline{1\times1}})$ $(A^{\underline{4\times1}}, \lambda^{\underline{2\times2}})$ $(\lambda^{\underline{2\times2}}, \sigma^{\underline{2\times2}})$
$D=7, N=2,4$	$(v^{\underline{1\times4}}, B^{\underline{10\times1}}, \sigma^{\underline{1\times1}}, A^{\underline{5\times3}}, \lambda^{\underline{4\times2}, \underline{16\times2}})$ $(A^{\underline{5\times1}}, \sigma^{\underline{1\times3}}, \lambda^{\underline{4\times2}})$
$D=8, N=1,2$	$(v^{\underline{20}}, B^{\underline{15}}, A^{\underline{12}}, \sigma^{\underline{1}}, \lambda^{\underline{8}}, \psi^{\underline{40}})$ $(A^{\underline{6}}, \phi^{\underline{2}}, \lambda^{\underline{8}})$
$D=9, N=1,2$	$(v^{\underline{27}}, B^{\underline{21}}, A^{\underline{7}}, \sigma^{\underline{1}}, \lambda^{\underline{8}}, \psi^{\underline{48}})$ $(A^{\underline{7}}, \sigma^{\underline{1}}, \lambda^{\underline{8}})$
$D=10, N_+ + N_- \leq 2$	$(v^{\underline{35}}, B^{\underline{28}}, \sigma^{\underline{1}}, \lambda^{\underline{8}}, \psi^{\underline{56}})$ $(A^{\underline{8}}, \lambda^{\underline{8}})$
$D=11, N=1$	$(v^{\underline{44}}, A^{\underline{84}}, \psi^{\underline{128}})$

Si noti come il caso $D=3$ sia degenere: non esiste il multipletto del gravitone; il caso $D=11$ invece contiene solo il multipletto del gravitone e non ne sono possibili altri.

Per la sua importanza riportiamo anche una tabella con le rappresentazioni di $ISO(1,3/N)$ per ogni N accettabile ($N = 1 \ldots 8$); qui il gruppo di isotropia è $SO(2) \times SU(N) \times U(1)$, con $SO(2)$ che corrisponde all'elicità della particella. Si noti come al crescere di N la

---

La base $\bar{\mathcal{E}}$ è definita a meno di trasformazioni che lasciano k nella forma (C.24), cioè a meno di trasformazioni $SO(D-2)$ (il ragionamento evidentemente vale solo per $D > 2$) con

$$\Lambda^a{}_b = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \Lambda^r{}_s & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \; r, s = 1, \ldots, D-1. \tag{C.25}$$

$SO(D-2)$ è detto gruppo di isotropia e le dimensioni delle sue rappresentazioni danno i gradi di libertà fisici delle rappresentazioni del gruppo di Poincarè; per esempio la rappresentazione vettoriale A_a è individuata da $D-2$ campi fisici A_r mentre la rappresentazione tensoriale h_{ab} è individuata dai campi h_{rs} (che sono $(D-2)(D-2+1)/2 - 1 = D(D-3)/2$); lo stesso vale per le rappresentazioni spinoriale ($\lambda\alpha \sim \lambda_\rho$ con $\Delta/2$ gradi) e spinoriale-vettoriale ($\psi_{a\alpha} \sim \psi_{r\rho}$ con $(D-2-1) \times \Delta/2$ gradi).

[10] L'espressione $X^{\underline{m \times n}}$ indica un campo com $m \times n$ gradi di libertà on-shell; m è la dimensione della rappresentazione di $SO(D-2)$, n la dimensione della rappresentazione di $Aut(D,N)$ (non banale solo se $N > 1$).

teoria diventi sempre più vincolata: in particolare per $N > 4$ sono possibili solo supergravità pure, cioè non ci sono supermultipletti oltre a quello del gravitone, come del resto avviene in $D = 11$. Qui però compare un numero fissato di campi scalari che parametrizzano un'opportuna varietà G/H; il caso più importante è quello massimale, per il quale rimandiamo a [21] pag. 1115.

Contenuto in campi delle r.u.i. della superalgebra di Poincarè in D=4.

$N=2$	$(v^{\underline{2}}, \psi_i^{\underline{2\times 2}}, A^{\underline{2}})$	$(A^{\underline{2}}, \lambda_i^{\underline{2\times 2}}, z^{\underline{2}})$ $(\chi^{\underline{2}}, z^{\underline{2}})$
$N=3$	$(v^{\underline{2}}, \psi_i^{\underline{2\times 3}}, A_i^{\underline{2\times 3}}, \lambda^{\underline{2}})$	$(A^{\underline{2}}, \lambda_i^{\underline{2\times 3}}, \lambda^{\underline{2}}, z_i^{\underline{2\times 3}})$
$N=4$	$(v^{\underline{2}}, \psi^{\underline{2\times 4}}, A_{ij}^{\underline{2\times 6}}, \lambda_i^{\underline{2\times 4}}, z^{\underline{2}})$	$(A^{\underline{2}}, \lambda_i^{\underline{2\times 4}}, \sigma_{ij}^{\underline{6}})$
$N=5$	$(v^{\underline{2}}, \psi_i^{\underline{2\times 5}}, A_{ij}^{\underline{2\times 10}}, \lambda_{ijk}^{\underline{2\times 10}}, \lambda^{\underline{2}}, z_i^{\underline{2\times 5}})$	
$N=6$	$(v^{\underline{2}}, \psi_i^{\underline{2\times 6}}, A_{ij}^{\underline{2\times 15}}, \lambda_{ijk}^{\underline{2\times 20}}, z_{ij}^{\underline{30}})$	
$N=7$	$(v^{\underline{2}}, \psi_i^{\underline{2\times 7}}, \psi^{\underline{2}}, A_{ij}^{\underline{2\times 21}}, A_i^{\underline{2\times 7}}, \lambda_{ijk}^{\underline{2\times 35}}, z_{ijk}^{\underline{2\times 35}})$	
$N=8$	$(v^{\underline{2}}, \psi_i^{\underline{2\times 8}}, A_{ij}^{\underline{2\times 28}}, \sigma_{ijkl}^{\underline{70}})$	

Dalle tabelle precedenti si deduce il contenuto in campi di tutti le possibili candidate a teorie di supergravità; per costruire effettivamente tali teorie però è necessario costruire un'azione consistente o alternativamente risolvere le identità di Bianchi on-shell, in modo da avere sia le equazioni del moto che le supertrasformazioni.

Bibliografia

[1] Bjorken-Drell," Relativistic quantum field", Mac Grow-Hill (1964)

[2] Mandl-Shaw, "Quantum field theory", Wiley and Sons (1984)

[3] Weinberg, "Gravitation and Cosmology", J. Wiley and Sons (1972)

[4] Wald, "General Relativity", The University of Chicago (1984)

[5] Chung and Li,"Gauge theory of elementary particle physics", Oxford Science Publications

<u>Geometria differenziale e teoria dei gruppi</u>

[6] A. Trautmann, "Differential Geometry for physicists", Stony Brook Lectures, Bibliopolis (1984)

[7] Yano-Kon "Structures on manifolds", Series in pure mathematics, World Scientific 1984

[8] Y. Choquet-Bruhat e C. De Witt-Morette, "Analisis, Manifold and Physics" Voll. 1

[9] R. Slansky, "Group Theory for unified model building", Physics Reports 79 (1981) 1

[10] Hamermesh,"Group Theory", Addison-Wesley 1960

[11] Elliott-Dawber, "Symmetry in physics", McMillan Press 1979

<u>Spinori, superalgebre e supervarietà</u>

[12] Y. Choquet-Bruhat e C. De Witt-Morette, "Analisis, Manifold and Physics" Voll. 2

[13] Rittemberg,"A guide to Lie superalgebras", VI international colloquium on group theoretical methods in Phisics 1977, 3

[14] Nahm,"Supersymmetries and their representations", Nuclear Physics B135 (1978) 149

[15] J. Strathdee, "Extended Poincarè Supersimmetry", International Journal of Modern Physics A Vol.2 No.1 (1987) 273

Group Manifold approach

[16] Frè, "D = 4, N = 1 supersimmetric Yang-Mills theory", Il Nuovo Cimento 30 (1981) 507

[17] Frè, "Remarks on D = 4, N = 2 supersimmetric Yang-Mills theories", Nuclear Phisics B187 (1981) 376

[18] Frè, "Supergravity D = 4, N = 2,3", Nuclear Physics B186 (1981) 44-60

[19] D'Auria, Frè, Maina, Regge, "Technique for the analysis of Bianchi identities", Annals of Phisics 139, 93-135 (1982)

[20] D'Auria-Frè, "Consistent supergravity in D = 6, N = 2 without action invariance", Physics Letters 128B (1983),44

[21] Castellani, D'Auria, Frè, "Supergravity and Superstrings", World Scientific (1991)

[22] Frè, preprint on Stonybrook

[23] Frè-Pesando "Completion of the 10D program: field equations", Classical and Quantum Gravity 9 (1992) 823

[24] A.Ribon,"Teoria effettiva in quattro dimensioni della stringa eterotica", tesi di Laurea (1993), Università di Padova

SuperSpace Approach

[25] Salam, Strathdee Phys.Rev. D11 (1975) 1521

[26] Dragon, Z. Phys. C2 (1979) 29

[27] Gates, Grisaru, Rocek, Siegel, "Superspace: one thousand and one lessons in Supersymmetry", Frontiers in Physics - Benjamin publishing company (1983)

[28] Wess-Bagger, "Supersimmetry and Supergravity" Princeton (1983)

[29] K.Lechner, "Supergravità in dieci dimensioni priva di anomalie", tesi di laurea (1986), Università di Padova

[30] Bonora, Pasti, Tonin, "Chiral anomalies in higher dimensional supersymmetric theories", Nuclear Physics B286 (1987) 150-174

[31] Bonora, Bregola, Lechner, Pasti, Tonin, "Anomaly Free supergravity and super Yang-Mills theories in ten dimensions", Nuclear Physics B296 (1988) 877

[32] Lechner, Pasti, Mod. Phys. Lett. A4 (1989) 1721

Component approach

[33] Marcus-Schwarz,"Field theories that have no manifestly Lorentz-invariant formulation", Phys. Lett. 115 B (1982) 111

[34] Chaplin-Manton, "Unificaton of Yang-Mills theory and supergravity in ten dimensions", Physical Letters 120B (1983) 105

[35] Bergshoeff, Koh, Sezgin, "Yang-Mills-Einstein supergravity in D = 7, N = 2", Physical Review D (1985) 1353

[36] Salam-Sezgin, "D = 8, N = 1 supergravity: matter coupling, gauging and Minkowsky compactification", Physics Letters 154B (1985) 37

[37] Gates,Nishino,Sezgin, "Supergravity in D = 9, N = 1 and its coupling to the noncompact $\sigma-$model", Classical and Quantum gravity 3 (1986) 21

[38] Nishino-Sezgin, "The complete D = 6, N = 2 supergravity with matter and Yang-Mills couplings", Nuclear Physics B278 (1986) 353-379

[39] G. Sierra, "N = 2 Maxwell-Matter-Einstein supergravities in D = 5,4,3", Physics Letters 157B (1985), 379

[40] Marcus-Schwarz, "3-dimensional supergravity theories", Nuclear Physics B228 (1983) 145

[41] "Supergravities in diverse dimensions", edited by Salam-Sezgin, World Scientific (1989)

Compattificazione e teorie di Kaluza-Klein

[42] Scherk-Schwarz, "How to get masses from extra dimensions", Nuclear Physics B153 (1979) 61

[43] Castellani, Romans, Warner, "Symmetries of coset spaces and Kaluza-Klein supergravity", Annals of Physics, 157 (1984) 394

[44] Salam-Sezgin,"Chiral compactification on Minkwosky $\times S^2$ of $D = 6,\ N = 2$ Einstein-Maxwell supergravity", Physics Letters, 147B, 47

[45] Salam-Sezgin,"D = 8, N = 2 supergravity", Nuclear Physics B258 (1985) 284-304

[46] Duff, Nilsson, Pope, "Kaluza-Klein supergravity", Physics Reports 130 (1986) 1

[47] Candelas et al., Nuclear Physics 258B (1985) 46

[48] Witten, "Dimensional reduction of superstring models", Physics Letters 155B (1985) 151

Supergravità in 4 dimensioni

[49] Wess-Zumino, "Supergauge transformations in four dimensions", Nucl. Phys. B70 39 (1974)

[50] Cremmer,Julia,Scherk,Ferrara,Girardello,van Nieuwenhuizen, "Spontaneous symmetry breaking and Higgs effect in supergravity without cosmological constant", Nuclear Physics B147 (1979) 105

[51] Witten-Bagger, "Matter couplings in D = 4, N = 2 supergravity", Nuclear Physics (1983)

[52] Nilles, Physics Reports 110 (1984) 1

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare va agli amici Kurt Lechner ed Anthony Candiello per la grande disponibilità nei miei riguardi, per i preziosi consigli e per gli utilissimi suggerimenti.