UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

DIPARTIMENTO DI FISICA “GALILEO GALILEI”

TESI DI PERFEZIONAMENTO

INVARIANZA BRST E QUANTIZZAZIONE DI TEORIE DI YANG-MILLS

MICHELE SIMIONATO

ANNO ACCADEMICO 1993-1994

Indice

Capitolo 1

Simmetrie quantistiche

In questo lavoro ci occuperemo del problema di estendere al caso quantistico la trattazione classica delle teorie di campo relativistiche con simmetrie locali. Ci interessa in particolare osservare se le simmetrie classiche sono o non sono trasportabili al caso quantistico e quali sono le conseguenze fisiche dell'esistenza o non esistenza di dette simmetrie. In particolare studieremo approfonditamente la quantizzazione covariante delle teorie di gauge che fornisce una guida per la trattazione quantistica di tutte le simmetrie. Alla fine del capitolo daremo qualche generalità sulle anomalie.

1.1 Note sulla quantizzazione canonica

Come è noto si procede alla quantizzazione di una teoria classica su dei campi ϕ [1] descritti da un'azione Poincarè-invariante sostituendo ai campi stessi degli operatori[2] $\hat{\phi}$ soddisfacenti le relazioni di commutazione canoniche. Se i campi sono liberi, cioè se soddisfano equazioni differenziali lineari, la procedura di quantizzazione permette di costruire gli stati del sistema tramite il metodo di Fock; se i campi sono interagenti, cioè soddisfano equazioni non lineari, la teoria viene descritta perturbativamente, spezzando l'azione totale in una parte libera ed una parte di interazione

$$I(\phi) = I_0(\phi) + gI_1(\phi). \tag{1.1}$$

[1] In questo paragrafo i campi ϕ vanno pensati come campi scalari o spinoriali; in quest'ultimo caso, com'è noto, è sufficiente sostituire le regole di commutazione con regole di anticommutazione per avere una teoria sensata, cioè soddisfacente il principio di microcausalità e con hamiltoniana definita positiva.

[2] Più precisamente si considerano distribuzioni a valori operatoriali.

L'idea è che inizialmente per $t \longrightarrow -\infty$ i campi siano liberi[3] e che poi subiscano un'interazione localizzata in una regione compatta dello spaziotempo; in seguito essi tornano in una condizione di assenza di interazione per $t \longrightarrow +\infty$. Gli stati asintotici, liberi, sono stati di Fock, e quindi ben noti; l'ampiezza di transizione da un fissato stato iniziale ad un fissato stato finale in seguito alla presenza dell'interazione si può ricavare in ambito hamiltoniano col ragionamento di Dyson [2] e in ambito lagrangiano col ragionamento di Bogoliubov[4] [9]: in ogni caso si trova che l'ampiezza di transizione è data dalla matrice S di scattering,

$$S = T\exp(igI_1), \quad A(-\infty,+\infty) = < +\infty|S| - \infty > . \tag{1.2}$$

La matrice S si calcola perturbativamente dalla definizione di $T-$prodotto

$$S = T\exp(ig\int \mathcal{L}_1) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \frac{(ig)^n}{n!} T(\mathcal{L}_1(x_1)\cdots\mathcal{L}_1(x_n)) \tag{1.3}$$

troncando la serie ad un ordine fissato. Com'è noto introducendo la (1.3) nella (1.2) e sfruttando il teorema di Wick si ottengono le regole di Feynman, le quali permettono di tradurre sotto forma grafica i termini della matrice S che contribuiscono ad un dato processo. Nella pratica poi, per descrivere un certo processo, si disegnano direttamente i grafici di Feynman corrispondenti (fino ad un ordine prefissato) e si estraggono da questi le espressioni che permettono di calcolare esplicitamente l'elemento di matrice. Il grosso problema[5] della teoria dei campi è che tipicamente i grafici contenenti dei loop danno luogo ad integrali divergenti: è quindi necessario possedere una prescrizione che permetta di interpretare fisicamente tali infiniti. È possibile dare una tale prescrizione solo su una classe piuttosto ristretta di modelli, detti modelli rinormalizzabili.

In questi modelli gli infiniti, che possono essere trattati previa un'opportuna regolarizzazione degli integrali divergenti (per esempio la regolarizzazione dimensionale a cui faremo sempre riferimento), possono essere riassorbiti mediante l'introduzione di opportuni controtermini nella lagrangiana, i quali hanno la <u>stessa forma</u> dei termini

[3] Questa approssimazione funziona bene per l'interazione debole e l'interazione elettromagnetica, mentre non è valida per l'interazione forte; ciò nonostante per semplicità continueremo ad adottare questo punto di vista per qualunque teoria quantistica.

[4] Quest'ultimo ragionamento si fonda soltanto su condizioni di grande generalità come il principio di causalità e l'invarianza di Poincarè.

[5] E direi anzi <u>il</u> problema della meccanica quantistica relativistica.

presenti nella lagrangiana di partenza. Ciò significa che se la lagrangiana iniziale si può spezzare in vari termini

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \cdots \tag{1.4}$$

è possibile aggiungere ad essa dei controtermini

$$\delta\mathcal{L}_i = (Z_i - 1)\mathcal{L}_i \tag{1.5}$$

ed ottenere una lagrangiana rinormalizzata

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_I + \delta\mathcal{L} = Z_1\mathcal{L}_1 + Z_2\mathcal{L}_2 + Z_3\mathcal{L}_3 + \cdots \tag{1.6}$$

con la stessa forma della lagrangiana di partenza[6] ma in grado di dare luogo ad ampiezze di transizione in cui gli infiniti si cancellano, cioè a probabilità di transizione finite. I coefficienti $Z_i(\tau, \mu)$ (di rinormalizzazione) si possono ricavare ad ogni ordine perturbativo e sono funzioni del parametro di regolarizzazione τ e di un parametro arbitrario μ dipendente dalla procedura di regolarizzazione (questa necessariamente introduce una scala di massa). Chiaramente le Z_i devono contenere delle singolarità nel limite in cui il parametro di regolarizzazione τ va a zero, per cui i campi e i parametri nudi sono singolari nel limite $\tau \longrightarrow 0$. Inoltre affinchè essi non dipendano dal parametro μ, si deve assumere una dipendenza da μ nei parametri della lagrangiana di partenza $\mathcal{L}_I$; si ottiene quindi il famoso fenomeno del running coupling constant: le costanti non sono fisse ma dipendono dall'energia a cui si svolge il processo.

Concludiamo osservando che la richiesta di rinormalizzabilità vincola in maniera estremamente forte le possibili interazioni di una teoria quantistica (per esempio la teoria non può contenere costanti di dimensione negativa[7]); in particolare ragionamenti basati sul conteggio di potenze degli integrali divergenti [8] (che devono essere

[6] Ciò si vede meglio se si riscalano i campi ϕ e le costanti λ della teoria tramite le Z, ottenendo i campi e i parametri nudi ϕ_B e λ_B; in funzione di tali oggetti infatti la lagrangiana rinormalizzata ha proprio l'identica forma della lagrangiana di partenza (le funzioni Z sono state riassorbite)

$$\mathcal{L}_R(\phi, \partial_a\phi, Z, \lambda) = \mathcal{L}_I(\phi_B, \partial_a\phi_B, \lambda_B) = \mathcal{L}_B$$

e si dice anche lagrangiana nuda.

[7] In particolare le teorie gravitazionali, che contengono la costante G di dimensione -2, non sono rinormalizzabili in quanto nascono controtermini di ordini superiori nelle curvature; l'idea allora è quella di estendere la teoria dotandola di nuove simmetrie (per esempio supersimmetrie) in grado di cancellare le divergenze e dare una teoria (sperabilmente) finita.

[8] Ricordiamo che in quattro dimensioni il grado di divergenza superficiale di un diagramma con L loop, I_B linee interne bosoniche e I_F linee interne fermioniche è

$$D = 4L - 2I_B - I_F;$$

riconducibili a poche divergenze primitive fondamentali) forniscono la seguente forma per l'azione più generale possibile contenente solo campi a spin 0 e $\frac{1}{2}$ [9] (in quattro dimensioni):

$$\begin{aligned} I(\phi,\psi) &= \tfrac{1}{2}\partial_a\phi^{\mathcal{I}}\partial^a\phi_{\mathcal{I}} - \tfrac{1}{2}m^2\phi^{\mathcal{I}}\phi_{\mathcal{I}} + i\bar{\psi}^i\gamma^a\partial_a\psi_i - m'\bar{\psi}^i\psi_i \\ &\quad -\tfrac{\lambda}{4!}(\phi^{\mathcal{I}}\phi_{\mathcal{I}})^2 - \lambda'\bar{\psi}^i T_{\mathcal{I}i}{}^j\psi_j\phi^{\mathcal{I}}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.2 Quantizzazione con metodi funzionali

Il metodo canonico appena illustrato costituisce la formulazione standard della teoria dei campi quantistici relativistici; tuttavia per risolvere molti problemi (soprattutto in teorie con simmetrie) spesso è molto più comodo adottare l'approccio funzionale di Feynman. Com'è noto l'idea è quella di calcolare le ampiezze di transizione non più direttamente attraverso la matrice S definita in termini degli operatori di campo

la condizione affinchè il grado non aumenti al crescere del numero dei vertici è che i vertici elementari della teoria, con n_B rami bosonici e n_F rami fermionici soddisfino la disequazione (si veda [8])

$$n_B + \frac{3}{2}n_F \leq 4;$$

le uniche possibilità sono allora $n_B = 4,\ n_F = 0$ (interazione $\lambda\phi^4$) e $n_B = 1,\ n_F = 2$ (interazione di Yukawa). Si noti che in assenza di simmetrie globali che la impediscano è possibile anche l'interazione di tipo ϕ^3 con $n_B = 3,\ n_F = 0$.

[9] L'azione (1.7) descrive un sistema di campi spinoriali $\bar{\psi}_i$, su cui agisce un gruppo G di trasformazioni lineari (tipicamente $G = SU(N)$; i suoi generatori $T_{\mathcal{I}}$ sono allora matrici hermitiane a traccia nulla), che interagiscono mediante dei campi scalari $\phi^{\mathcal{I}}$ a valori nella rappresentazione aggiunta di G. In particolare se il gruppo di simmetria è $SU(2)$ la teoria appena illustrata può descrivere l'interazione di Yukawa di un nucleone $\psi^i = (p,\ n)$ con un pione $\phi^{\mathcal{I}} = (\pi^+,\ \pi^0,\ \pi^-)$.

dalla (1.3), ma attraverso l'integrale funzionale[10]

$$A(+\infty,-\infty)=\int_{\phi(-\infty)=\phi_1}^{\phi(+\infty)=\phi_2}[d\phi]e^{iI(\phi)+iJ\cdot\phi} \tag{1.8}$$

il cui quadrato esprime la probabilità di transizione dallo stato $|\phi_1(\vec{x},-\infty)>$ allo stato $|\phi_2(\vec{x},+\infty)>$ in seguito all'azione delle correnti esterne classiche ($\mathcal{C}-$numeriche) J

$$A(+\infty,-\infty)=<\phi_2|T\exp(iJ\cdot\phi)|\phi_1>\ . \tag{1.9}$$

La scrittura (1.8) deve essere intesa in maniera puramente formale; infatti rigorosamente essa dovrebbe essere scritta come limite di infinite integrazioni, ottenuto considerando uno spaziotempo euclideo costituito da una scatola di lato L suddivisa in N cubetti quadridimensionali di lato ℓ e prendendo alla fine la continuazione analitica del risultato nel tempo immaginario; in formule

$$\begin{aligned} A_{eucl}(+\infty,-\infty) &= \lim_{l\to 0,L\to\infty}\int d\phi(x_1)\cdots d\phi(x_N)e^{-\sum_j(\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)+J\phi)_{x_j}\ell^4} \\ &= \lim_{l\to 0,L\to\infty}\Pi_{j=1}^N\int d\phi_j e^{-[\mathcal{L}(\phi(x_j),\partial\phi(x_j))+J(x_j)\phi(x_j)]\ell^4}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

e il limite è definito a meno di una costante di normalizzazione eventualmente infinita che entra nella misura $[d\phi]$. Niente assicura a priori che l'espressione (1.10) sia ben definita e anzi certamente il limite $l\longrightarrow 0$ dà luogo a divergenze ultraviolette che devono essere riassorbite (se possibile) tramite la rinormalizzazione, mentre di solito le (eventuali) divergenze infrarosse del limite termodinamico $L\longrightarrow\infty$ sono meno pericolose. Nell'integrale funzionale dunque va in genere sostituita l'azione

[10]Nel seguito useremo notazioni condensate: con ϕ indichiamo tutti i campi $\phi^I(x)$ di una teoria e con J tutte le correnti $J_I(x)$ ad essi associate; inoltre nei casi non ambigui sottointendiamo la somma sugli indici I e l'integrazione sulle coordinate x; in particolare abbreviamo

$$\phi\cdot J\equiv\int d^4x\phi^I(x)J_I(x).$$

Questa notazione è molto comoda quando si eseguono derivate funzionali; per esempio si può abbreviare $\frac{\delta W}{\delta J}=\int[d\phi]e^{iI(\phi)+i\phi\cdot J}i\phi$ in luogo di

$$\frac{\delta W}{\delta J_I(x)}=\int[d\phi]e^{iI(\phi)+i\int d^4y\phi^I(y)J_I(y)}i\phi^I(x).$$

nuda (infinita) se si vogliono ottenere probabilità di transizione finite. In pratica interessano le transizioni vuoto-vuoto, che definiscono il funzionale W

$$W(J) = \int [d\phi] e^{iI(\phi)+i\phi\cdot J} =< 0|T\exp(iJ\cdot\phi)|0 >; \tag{1.11}$$

W è importante in quanto permette di calcolare le funzioni di Green della teoria[11]

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = i^{-n}\frac{\delta^n W}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \tag{1.12}$$

che esplicitamente si scrivono

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \int [d\phi] e^{iI(\phi)}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n); \tag{1.13}$$

nella descrizione operatoriale si ha invece

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) =< 0|T(\phi(x_1)\cdots\phi(x_n))|0 > . \tag{1.14}$$

In entrambe le notazioni è immediato verificare che le funzioni di Green hanno buone proprietà di trasformazione rispetto alle simmetrie della teoria e in particolare sono Poincarè-invarianti (pertanto dipendono solo dai quadrati delle differenze, $G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \mathcal{G}^{(n)}((x_i-x_j)^2))$. Ricordiamo inoltre che le espressioni (1.14) possono essere rappresentate graficamente nel caso della teoria libera sfruttando la scomposizione $\phi = \phi^{(-)} + \phi^{(+)}$ in operatori di creazione e distruzione; in tal caso

[11]Si noti che la definizione (1.12) permette di scrivere W nella forma esplicitamente non locale

$$W(J) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\int d^4x_n G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n).$$

inoltre si può ottenere un' espressione esplicita per W[12]:

$$\begin{aligned} W_{libero}(J) &= \int[d\phi]e^{-\frac{i}{2}\phi\cdot\Omega_0\phi+iJ\cdot\phi} \\ &= \int[d\phi]e^{-\frac{i}{2}(\phi\cdot\Omega_0\phi-2J\cdot\phi+\bar{\Omega}_0J\cdot J-\bar{\Omega}_0J\cdot J)} \\ &= \int[d\phi]e^{-\frac{i}{2}[(\phi-\bar{\Omega}_0J)\cdot\Omega_0(\phi-\bar{\Omega}_0J)-\bar{\Omega}_0J\cdot J]} \\ &= \int[d\phi]e^{-\frac{i}{2}\phi\cdot\Omega_0\phi+\frac{i}{2}J\cdot\bar{\Omega}_0J} \\ &= e^{-\frac{i}{2}J\cdot\Delta_FJ}W_{libero}(0) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Per la teoria libera la dipendenza da J è banale e tutte le funzioni di Green si trovano come prodotti di propagatori di Feynman $\Delta_F(x-y) = -\Omega_0^{-1}(x,y) = -iG^{(2)}(x,y)$[13]; nel caso interagente W si può ottenere come serie formale sfruttando

---

[12] La teoria libera si può scrivere sempre nella forma $I_0(\phi) = -\frac{1}{2}\phi\cdot\Omega_0\phi$ con $\Omega_0 = \Omega_0^+$ operatore d'onda ($\Omega_0 = \Box + m^2$ nel caso dei campi scalari e $\Omega_0 = -i\gamma^a\partial_a + m$ nel caso dei campi spinoriali); per campi a spin più grande Ω_0 presenta delle ambiguità legate al gauge-fixing scelto (il gauge fixing è indispensabile per assicurare l'invertibilità di Ω_0 e quindi l'esistenza di $\bar{\Omega}_0 = \Omega_0^{-1}$). Torneremo su questo problema nel prossimo paragrafo.

[13] Poichè il propagatore libero inverte l'operatore d'onda (a meno di un fattore $-i$) risulta

$$\int d^4z\Omega_0(y,z)G^{(2)}(z,x) = -i\delta(y-x);$$

in generale si ha che le funzioni di Green libere soddisfano equazioni del tipo

$$\begin{aligned} \int d^4z\Omega_0(y,z)G^{(n+1)}(z,x_1,\ldots,x_n) &= -i\delta(y-x_1)G^{(n-1)}(x_2,\ldots,x_n)+\cdots \\ &\quad -i\delta(y-x_n)G^{(n-1)}(x_1,\ldots,x_{n-1}); \end{aligned} \tag{1.16}$$

la dimostrazione si fa sfruttando l'invarianza per traslazioni $\phi \longrightarrow \phi+\varepsilon f$ dell'integrale funzionale e il fatto che nella teoria libera $\frac{\delta I}{\delta\phi} = \Omega_0\phi$:

$$\begin{aligned} W(J) &= \int[d\phi]\exp(iI(\phi)+iJ\cdot\phi) = \int[d\phi]\exp(iI(\phi)+i\tfrac{\delta I}{\delta\phi}\varepsilon f+iJ\cdot\phi+iJ\cdot\varepsilon f) \\ &= \int[d\phi]\exp(iI(\phi)+iJ\cdot\phi)[1+i\varepsilon(\Omega_0\phi\cdot f+J\cdot f)]; \end{aligned}$$

da questa si ottiene la relazione (poichè $f(y)$ è una funzione arbitraria)

$$\int[d\phi]\exp(iI(\phi)+iJ\cdot\phi)[(\Omega_0\phi+J)(y)] = 0;$$

derivando rispetto alle correnti e ponendo poi $J=0$ si ottengono le (1.16). Nel caso interagente $\frac{\delta I}{\delta\phi} = \Omega_0\phi + \frac{\delta I_1}{\delta\phi}$ e quindi bisogna sommare al primo membro della (1.16) un termine $\int[d\phi]e^{iI(\phi)}i^n\frac{\delta I_1}{\delta\phi(y)}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)$.

il trucco

$$W(J) = \int [d\phi] e^{iI_0(\phi)+igI_1(\phi)+iJ\cdot\phi} = e^{igI_1(\frac{\delta}{\delta iJ})} W_{libero}(J) \tag{1.17}$$

e sviluppando l'esponenziale funzionale. Equivalentemente si può studiare lo sviluppo di Wick associato alla scrittura operatoriale

$$W(J) = e^{igI_1(\frac{\delta}{\delta iJ})} < 0|T\exp(iJ\cdot\phi)|0> = < 0|T\exp(iJ\cdot\phi + igI_1(\phi))|0> \tag{1.18}$$

(si noti che ora i campi ϕ sono campi liberi e quindi scomponibili in operatori di creazione e distruzione); se si vuole mantenere la normalizzazione $W(0) = 1$ si deve dividere per la fase $< S >_0 = < 0|T\exp(igI_1(\phi))|0 >$ (tale divisione va intesa in senso euristico in quanto le divergenze della matrice S rendono non ben definite le quantità su cui si opera, a meno di non rinormalizzare) ottenendo

$$W(J) = \frac{< 0|T\exp(iJ\cdot\phi)S|0 >}{< 0|S|0 >} \tag{1.19}$$

da cui si estraggono le funzioni di Green

$$G^{(n)}(x_1, \cdots x_n) = \frac{< 0|T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)S|0 >}{< 0|S|0 >} \tag{1.20}$$

(formula di Gell Mann-Low). Le espressioni precedenti danno tutte le funzioni di Green della teoria; se però interessano solo le funzioni di Green connesse (che entrano nei diagrammi di Feynman) è conveniente passare al funzionale

$$Z(J) = -i\ln W(J) \tag{1.21}$$

generatore delle funzioni di Green connesse

$$G_c^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = i^{-n+1} \left. \frac{\delta^n Z}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} \right|_{J=0} . \tag{1.22}$$

Nel caso libero risulta in maniera immediata

$$Z_0 = Z_{libero}(J) = -\frac{1}{2} J\cdot\Delta_F J \tag{1.23}$$

e quindi l'unica funzione di Green connessa non nulla è il propagatore di Feynman $G_c^{(2)} = i\Delta_F$ (Z è un oggetto locale). Nel caso interagente da Z si deducono perturbativamente i diagrammi di Feynman. Basta infatti applicare la definizione (1.21) all'espressione (1.17) e sviluppare in serie il logaritmo[14]; più esplicitamente si ottiene

$$\begin{aligned} Z &= -i\ln[e^{igI_1}e^{iZ_0}] = -i\ln[e^{iZ_0}e^{-iZ_0}(e^{igI_1}-1+1)e^{iZ_0} \\ &= -i\ln[e^{iZ_0}(e^{-iZ_0}(e^{igI_1}-1)e^{iZ_0}+1)] \\ &= Z_0 - i(\varepsilon - \tfrac{\varepsilon^2}{2} + \tfrac{\varepsilon^3}{3} - \cdots) \end{aligned} \tag{1.24}$$

avendo posto $\varepsilon(J) = e^{-iZ_0(J)}(e^{igI_1(\frac{\delta}{\delta iJ})}-1)e^{iZ_0(J)}$; a questo punto sviluppando quest'espressione in potenze di g si ottengono i vari contributi alle ampiezze di Feynman ([8]).

Z inoltre è importante in quanto permette di definire (introdotti i campi classici $\phi_{cl} = \frac{\delta Z}{\delta J}$) il funzionale generatore delle funzioni di Green irriducibili ad una particella (vertici propri 1PI che non si possono sconnettere tagliando una sola linea interna)

$$\Gamma(\phi_{cl}) = Z(J(\phi_{cl})) - \phi_{cl}\cdot J(\phi_{cl}), \tag{1.25}$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \left.\frac{\delta^n\Gamma}{\delta\phi_{cl}(x_1)\cdots\delta\phi_{cl}(x_n)}\right|_{\phi_{cl}=0}. \tag{1.26}$$

Γ si dice azione effettiva della teoria in quanto si può espandere in potenze di $\hbar$[15]

$$\Gamma(\phi_{cl}) = I(\phi_{cl}) + \hbar\Gamma^{(1)}(\phi_{cl}) + \hbar^2\Gamma^{(2)}(\phi_{cl}) + \cdots \tag{1.27}$$

e a livello $\hbar = 0$ coincide con l'azione di partenza; tale risultato si trasporta a tutti gli ordini se la teoria è libera

$$\Gamma_{libera}(\phi_{cl}) = I(\phi); \tag{1.28}$$

in tal caso Γ ammette un' espressione locale (in caso contrario Γ deve contenere le derivate a tutti gli ordini di ϕ_{cl}) in quanto tutti i vertici propri sono nulli tranne

$$\Gamma^{(2)}(x,y) = \Omega_0(x,y) \tag{1.29}$$

[14]Ricordiamo che $\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \cdots$.

[15]Un grafico di Feynman con $L = I - V + 1$ loop contiene $\hbar$ alla potenza L; dunque un'approssimazione ad $\hbar^L$ corrisponde ad un'approssimazione a L loop.

che corrisponde all'inverso del propagatore (a meno di un segno).

Il funzionale Γ è molto importante per vari motivi; per esempio su di esso si basano i ragionamenti che portano all'equazione del gruppo di rinormalizzazione [16]

$$[-s\frac{\partial}{\partial s}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}+m(\gamma_m-1)\frac{\partial}{\partial m}-n\gamma_d+4-n]\tilde{\Gamma}^{(n)}_R(sp,m,\lambda,\mu)=0 \tag{1.30}$$

e su di esso assumono una forma particolarmente semplice delle notevoli identità valide se la teoria presenta delle simmetrie (identità di Ward-Takahashi e di Slavnov-Taylor). Visto che in questo lavoro la nostra attenzione è rivolta sulle simmetrie e sulla loro implementazione quantistica dedicheremo una particolare attenzione a quest'ultimo aspetto. Premettiamo però alcune considerazioni di carattere generale.

1.3 Teorie con simmetrie locali

La costruzione finora delineata funziona bene per teorie non contenenti simmetrie locali, cioè per teorie con campi scalari e spinoriali ma non con campi vettoriali (associati alle simmetrie di gauge), nè con un tensore metrico[17] (associato alla general covarianza) nè con campi spinoriali-vettoriali (associati alle supersimmetrie locali). In tutti questi casi infatti la procedura di quantizzazione (canonica o funzionale) non è direttamente applicabile. Il motivo di questa affermazione è chiaro: in una teoria con N_C campi e N_L simmetrie locali solo $N_C - N_L$ campi sono fisicamente significativi; se dunque la teoria è descritta da N_C equazioni del tipo

$$\Omega(\phi^i)=J^i \tag{1.31}$$

[16]Nella (1.30) si sono usate le abbreviazioni

$$\beta(\lambda)=\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu},\quad \gamma_m(\lambda)=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial\ln m^2}{\partial\mu},\quad \gamma_d(\lambda)=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial\ln Z}{\partial\mu};$$

le funzioni β regolano l'andamento delle costanti di accoppiamento coll'energia, le funzioni γ_m l'andamento delle masse e le funzioni γ_d l'andamento dei vertici propri (la loro presenza è legata alla "dimensione anomala" delle $\tilde{\Gamma}^{(n)}_R$); le tre funzioni si possono ricavare ordine per ordine dalla procedura di rinormalizzazione e dipendono dalla procedura di sottrazione scelta (noi qui abbiamo usato la prescrizione in cui non dipendono dalla massa). Per ulteriori ragguagli rimandiamo a [8] pag. 179.

[17]La metrica $g_{\tilde{a}\tilde{b}}$ può essere sostituita da un vierbein (tetrade) $v^a_{\tilde{a}}$ e una connessione $\omega_{\tilde{a}a}{}^b(v)$; in tal caso si ha invarianza anche per trasformazioni di Lorentz locali.

l'operatore Ω deve proiettare a zero le N_L configurazioni equivalenti e quindi non può essere invertibile[18]. Tale situazione naturalmente non può essere accettata a livello quantistico in quanto non esisterebbe più il propagatore (definito, a livello linearizzato, come l'inverso dell'operatore d'onda Ω_0 dalla (1.15)) ed è pertanto necessario introdurre una procedura che modifichi le equazioni (1.31) rendendole invertibili. Tale procedura (gauge-fixing) necessariamente deve rompere l'invarianza ed è quindi richiesto un qualche meccanismo che permetta in seguito di recuperare l'invarianza della teoria classica a livello quantistico. Il meccanismo consiste nel restringere gli stati fisici della teoria con un vincolo opportuno: esempi di come si opera saranno dati nel seguito; in questo paragrafo vogliamo invece studiare più in dettaglio le proprietà classiche del sistema (1.31) e considerare alcuni esempi concreti di gauge fixing.

Le teorie di cui ci occuperemo sono le seguenti tre:

1. Teorie con simmetrie di gauge[19]

$$D_a F^{ab} = J^b; \tag{1.32}$$

[18]Inoltre l'invarianza di Ω impone N_L vincoli differenziali sulle correnti J (conservazioni covarianti). Il caso piu' semplice e' quello di Yang-Mills in cui le equazioni invarianti $D_a F^{ab} = J^b$ comportano, come condizione per un accoppiamento consistente, $D_a J^a = 0$; lo stesso vale per le equazioni di Einstein in cui le identita' di Bianchi impongono la conservazione covariante del tensore energia-impulso.

[19]Per le teorie di gauge usiamo le convenzioni seguenti, molto simili a quelle di [6]:

$$D_a\phi = \partial_a\phi - iA^{\mathcal{A}}T_{\mathcal{A}}\phi$$

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a + A_a \times A_b$$

$$D_a F_{bc} = \partial_a F_{bc} + A_a \times F_{bc}$$

$$(A \times F)^{\mathcal{A}} = [A, F]^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{BC}} A^{\mathcal{B}} F^{\mathcal{C}}$$

$$A \cdot F = \int d^4x Tr(AF) = \int d^4x A^{\mathcal{A}} F_{\mathcal{A}}$$

$$\delta A = D\varepsilon, \quad \delta F = -\varepsilon \times F, \quad \delta\psi = i\varepsilon^{\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}}\psi$$

La costante di accoppiamento g è stata riassorbita in A (se si vuole posta uguale ad 1) in quanto i ragionamenti svolti non sono perturbativi e pertanto non è necessario nè conveniente scriverla esplicitamente.

2. Teorie con simmetrie di coordinate[20]

$$\mathcal{R}_{\tilde{a}\tilde{b}} - \frac{1}{2} g_{\tilde{a}\tilde{b}} R_S = J_{\tilde{a}\tilde{b}}; \tag{1.33}$$

3. Teorie con simmetrie fermioniche locali[21]

$$i\gamma^{abc}\partial_b \psi_c = J^a. \tag{1.34}$$

Studiamo ora le proprietà delle equazioni (1.32),(1.33),(1.34). Come si è detto una teoria contenente N_C campi ϕ e invariante per N_L trasformazioni locali[22] contiene soltanto $N_G = N_C - N_L$ di gradi di libertà indipendenti; come conseguenza, se si hanno N_C equazioni invarianti su tali campi, non tutte le equazioni possono essere dinamiche, ma solo $N_C - N_L$ devono dare l'evoluzione temporale dei campi, mentre le rimanenti N_L devono essere dei vincoli. In concreto nelle teorie da noi esaminate i vincoli sono dati da[23]

$$D_i F^{i0} = J^0 \tag{1.35}$$

[20] $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ sono indici curvi, $\mathcal{R}_{\tilde{a}\tilde{b}}$ è il tensore di Ricci, R_S lo scalare di curvatura e $J_{\tilde{a}\tilde{b}} = -8\pi G \mathcal{T}_{\tilde{a}\tilde{b}}$ corrisponde al tensore energia-impulso della materia. Indichiamo inoltre con e il determinante $e = |\det g_{\tilde{a}\tilde{b}}|^{\frac{1}{2}} = \det v^a_{\tilde{a}}$ e con κ^2 la costante $8\pi G$.

[21] Nella (1.34) $\psi = \psi^\alpha_a$ corrisponde ad una 1-forma spinoriale di Majorana e le matrici $\gamma^{abc} = \gamma^{[a}\gamma^b\gamma^{c]}$ sono date dalla formula $i\gamma^{abc} = -\varepsilon^{abcd}\gamma_5\gamma_d$. La teoria di Rarita-Schwinger libera non ha interesse di per sè ma è importante quando è accoppiata con la gravità in maniera da ottenere una teoria di supergravità

$$I(\psi, v) = \int d^4 x e [\frac{1}{2\kappa^2} R_S(v) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_a \gamma^{abc} \mathcal{D}_b \psi_c]$$

invariante per le supersimmetrie locali $\psi \longrightarrow \psi + 2\kappa^{-1}\mathcal{D}\varepsilon$, $v^a \longrightarrow v^a + i\kappa\bar{\varepsilon}\gamma^a\psi$; l'estensione della simmetria fermionica dal caso libero $\psi \longrightarrow \psi + 2\kappa^{-1}d\varepsilon$ al caso gravitazionale modificando d con $\mathcal{D}$ e dando una trasformazione di supersimmetria non banale a v^a è l'unica maniera conosciuta per dare interazioni quantisticamente consistenti al campo di spin $\frac{3}{2}$ (si veda [14]).

[22] Per i campi vettoriali $N_C = 4$, $N_L = 1$; per i campi spinoriali-vettoriali $N_C = 12$, $N_L = 4$; per il tensore metrico $N_C = 10$, $N_L = 4$; per il vierbein $N_C = 16$, $N_L = 6 + 4$.

[23] Nelle (1.35)-(1.37) gli indici i valgono $i = 1, 2, 3$. è evidente che nel caso del campo fermionico ψ le equazioni (1.37) sono vincoli, visto che non contengono le derivate temporali di ψ; nel caso dei campi bosonici A e g le equazioni del moto (1.32) e (1.33)(del secondo ordine) danno l'evoluzione dinamica se permettono di esprimere le derivate seconde rispetto al tempo di tutti i campi in funzione delle loro derivate prime, dei campi stessi e delle correnti; è chiaro che ciò non avviene per le equazioni (1.35) e (1.36) che non contengono le derivate temporali seconde (la prova è immediata per l'equazione (1.35); per l'equazione (1.36) basta osservare che in seguito all'identità di Bianchi $D^{\tilde{b}}(\mathcal{R}_{\tilde{b}\tilde{a}} - \frac{1}{2}g_{\tilde{b}\tilde{a}}R_S) = 0$ risulta $D^0(\mathcal{R}_{0\tilde{a}} - \frac{1}{2}g_{0\tilde{a}}R_S) = -D^i(\mathcal{R}_{i\tilde{a}} - \frac{1}{2}g_{i\tilde{a}}R_S)$ e poichè il secondo membro contiene al massimo derivate seconde rispetto al tempo allora $\mathcal{R}_{0\tilde{a}} - \frac{1}{2}g_{0\tilde{a}}R_S$ contiene al massimo derivate prime rispetto al tempo).

$$\mathcal{R}_{\tilde{a}0} - \frac{1}{2} g_{\tilde{a}0} R_S = J_{\tilde{a}0} \tag{1.36}$$

$$i\Gamma^{0ij}\partial_i\psi_j = J^0. \tag{1.37}$$

Tali vincoli restringono le possibili configurazioni iniziali $\phi|_{t=0}$ (e anche $\partial_t\phi|_{t=0}$ per i campi bosonici che soddisfano equazioni del secondo ordine). Le restanti $N_C - N_L$ equazioni dinamiche non possono dare le derivate temporali di tutti i campi, ma anzi restano N_L campi con derivate temporali indeterminate (esplicitamente sono libere le derivate seconde di A_0 e di $g_{0\tilde{a}}$ e le derivate prime di ψ_0). Per risolvere completamente una teoria con simmetrie locali è quindi necessario specificare le derivate temporali mancanti, mediante una condizione che rompa l'invarianza locale.

1. Una buona condizione nel caso delle simmetrie di gauge è per esempio il gauge-fixing covariante

$$\partial^a A_a = 0; \tag{1.38}$$

derivando rispetto al tempo la (1.38) infatti si ottengono le derivate temporali seconde del campo A^0 che non venivano date dalle (1.32). Alternativamente le derivate mancanti si possono ottenere direttamente dall'equazione (1.32) (che qui riscriviamo per semplicità nel caso linearizzato, ovvero nel caso abeliano, ma lo stesso ragionamento vale in generale)

$$(\Box\eta^{ab} - \partial^a\partial^b)A_b = J_b \tag{1.39}$$

che a causa del vincolo (1.38) assume la forma di Klein-Gordon

$$\Box A_a = J_a \tag{1.40}$$

che dà le derivate temporali seconde di tutti i campi. In questo secondo punto di vista l'idea è quella di usare il gauge fixing per modificare l'equazione di partenza (e quindi l'operatore d'onda Ω_0) in modo da assicurare l'invertibilità del sistema differenziale. Il modo più naturale per modificare l'equazione d'onda è quella di modificare l'azione di partenza con un termine aggiuntivo; in particolare l'azione linearizzata

$$I(A) = I_{cl} + I_{gf} = -\frac{1}{4} F_{ab} \cdot F^{ab} - \frac{1}{2\alpha}\partial_a A^a \cdot \partial_b A^b \tag{1.41}$$

dà luogo ad un operatore d'onda invertibile

$$\Omega_0 = \eta^{ab}\Box - (1 - \frac{1}{\alpha})\partial^a\partial^b \qquad (1.42)$$

che nel caso di Feynman $\alpha = 1$ coincide con l'operatore di Klein-Gordon; tutti gli α sono però ugualmente buoni (un interesse particolare ha il limite di Landau $\alpha \longrightarrow 0$ in cui il vincolo $\partial_a A^a = 0$ è forzato) e quindi in generale il gauge-fixing presenta delle arbitrarietà [24].

2. Nel caso gravitazionale un gauge fixing molto diffuso è quello di De Donder o armonico ([3])

$$g^{\tilde{a}\tilde{b}}\Gamma^{\tilde{c}}_{\tilde{a}\tilde{b}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_{\tilde{a}}(e g^{\tilde{a}\tilde{b}}) = 0 \qquad (1.43)$$

(si noti che derivando rispetto al tempo la (1.43) è possibile individuare le derivate temporali seconde di $g_{0\tilde{b}}$) che a livello linearizzato si scrive

$$h_{ab},^{b} - \frac{1}{2}h^{c}{}_{c,a} = 0 \qquad (1.44)$$

e permette di mettere le equazioni di Einstein linearizzate

$$\Box h_{ab} - \partial_a\partial_c h^c{}_b - \partial_b\partial_c h^c{}_a + \partial_a\partial_b h^c{}_c = 2(J_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}J^c{}_c) \qquad (1.45)$$

nella forma di Klein-Gordon

$$\Box h_{ab} = 2(J_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}J^c{}_c) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\Box(h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h^c{}_c) = J_{ab}; \qquad (1.46)$$

da cui si ottiene l'operatore d'onda linearizzato invertibile

$$\Omega_0 = -\frac{1}{4}(-\eta^a_c\eta^b_d - \eta^b_c\eta^a_d + \eta_{ab}\eta^{cd})\Box \qquad (1.47)$$

[24]Ricordiamo che si possono scegliere anche gauge-fixing non covarianti, come il fixing assiale $n^a A_a = 0$, o altri; tuttavia nel nostro lavoro considereremo sempre la simmetria di Poincarè manifesta come requisito irrinunciabile.

e il propagatore libero

$$i\Delta_F(x-x')^{ab}_{cd} = -\frac{i}{2}(\eta^{ab}\eta_{cd} - \eta^a{}_c\eta^b{}_d - \eta^a{}_d\eta^b{}_c)D(x-x'). \tag{1.48}$$

Dal punto di vista del principio d'azione le equazioni (1.46) si possono derivare da

$$I = I_{lin,gf} = \frac{1}{2}\partial_a h^{bc}\cdot\partial^a h_{bc} - \frac{1}{4}\partial_a h_b{}^b\cdot\partial^a h^c{}_c \tag{1.49}$$

che si ottiene sommando all'azione di Einstein

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}h_{ab,c}h^{ab,c} - \frac{1}{2}h^c{}_{c,d}h_d{}^{d,a} - h_{ab}{}^{,b}h^{ad}{}_{,d} + h_{ab}{}^{,b}h_c{}^{c,a} \tag{1.50}$$

il termine di gauge fixing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{GF} &= \tfrac{1}{\alpha}(h_{ab}{}^{,b} - \tfrac{1}{2}h^c{}_{c,a})(h^{ad}{}_{,d} - \tfrac{1}{2}h_d{}^{d,a}) \\ &= \tfrac{1}{\alpha}(h_{ab}{}^{,b}h^{ad}{}_{,d} - h_{ab}{}^{,b}h_d{}^{d,a} + \tfrac{1}{4}h^c{}_{c,a}h_d{}^{d,a})\end{aligned} \tag{1.51}$$

con $\alpha = 1$. Nel caso $\alpha \neq 1$ il propagatore assume una forma più complicata ([5]).

3. Nel caso del gravitino un gauge-fixing naturale è la condizione di irriducibilità

$$\gamma^a\psi_a = 0; \tag{1.52}$$

usandolo l'azione si può scrivere nella forma gauge fissata[25]

$$\begin{aligned}I(\psi) = I_{cl} + I_{gf} &= \tfrac{i}{2}\bar{\psi}_a(\eta^{ab}\gamma^c\partial_c - \gamma^a\partial^b - \gamma^b\partial^a + \gamma^a\gamma^c\partial_c\gamma^b)\psi_b - \\ &\quad \tfrac{i}{2\alpha}\bar{\psi}_a(-\gamma^a\partial^b - \gamma^b\partial^a + \gamma^a\gamma^c\partial_c\gamma^b)\psi_b\end{aligned} \tag{1.53}$$

[25] Per scrivere la (1.53) è essenziale sfruttare la proprietà delle matrici γ

$$\gamma^{abc}\partial_c = \gamma^{[a}\gamma^b\gamma^{c]}\partial_c = \eta^{ab}\gamma^c\partial_c - \gamma^a\partial^b - \gamma^b\partial^a + \gamma^a\gamma^c\partial_c\gamma^b.$$

e nel caso $\alpha = 1$ dà un'equazione d'onda equivalente a quella di Dirac

$$i\gamma^a \partial_a \psi_b = J_b \tag{1.54}$$

con propagatore associato[26].

$$\Sigma^{ab}(k) = \frac{-i\eta^{ab} k^c \gamma_c}{k^2 + i\varepsilon}. \tag{1.55}$$

1.4 Simmetrie abeliane

Grazie all'artificio del gauge fixing siamo riusciti a trattare le teorie quantistiche con simmetrie locali nell'approccio funzionale e a livello linearizzato (abbiamo individuato il propagatore libero); più difficile invece è procedere nell' approccio canonico e a livello non lineare. Per avere un'idea delle difficoltà che si incontrano nell'approccio operatoriale (che deve essere pensato come l' approccio fondamentale, con l'approccio funzionale derivato da esso) in questo paragrafo illustriamo la quantizzazione canonica covariante delle teorie con simmetrie di gauge abeliane (ovvero del campo elettromagnetico); rimandiamo invece ai prossimi capitoli per uno studio delle difficoltà che si incontrano in teorie intrinsecamente non lineari (cioè autointeragenti, come le teorie di Yang-Mills non abeliane e le teorie gravitazionali). I problemi sostanzialmente sono dovuti alla trasportabilità del gauge fixing a livello operatoriale, cosa tutt'altro che banale.

La prima cosa da osservare in una trattazione quantistica del campo elettromagnetico è l'impossibilità di quantizzare in maniera canonica l'azione gauge invariante

$$I = \int -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab}; \tag{1.56}$$

è infatti impossibile sviluppare una trattazione hamiltoniana non ambigua in quanto ai quattro campi A_a sono associati solo tre momenti non nulli

$$\pi_a = \frac{\delta I}{\delta \dot{A}^a} = F_{a0} \tag{1.57}$$

[26] Usando fixing differenti si possono trovare propagatori differenti; si vedano per esempio [13] e [14]

(π_0 è identicamente zero); non si possono dunque imporre le regole di commutazione canoniche o, in altre parole, il passaggio dalla visuale lagrangiana alla visuale hamiltoniana è singolare. [27] Questo problema è risolto se si usa l'azione gauge-fissata (la trattazione è più semplice nella gauge di Feynman $\alpha = 1$, ma si può sviluppare in generale; in ogni caso le grandezza misurabili devono essere independenti da α)

$$I' = \int -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{2} \partial_a A^a \partial^b A_b = \int -\frac{1}{2} \partial_a A_b \partial^a A^b \tag{1.58}$$

(equivalente all'azione gauge invariante se vale il vincolo (1.38)) che dà quattro momenti non singolari

$$\pi^a = -\dot{A}^a; \tag{1.59}$$

si può così procedere in maniera standard con la trattazione canonica e ottenere le relazioni di commutazione [28]

$$[A_a(x), \dot{A}^b(x')]_{t=t'} = -i\eta_a^b \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{1.60}$$

Il procedimento risente però di tre notevoli difficoltà, che ora illustreremo.

1. Non è possibile imporre la condizione $\partial_a A^a = \dot{A}^0 + \partial_i A^i = 0$ in senso operatoriale, cioè su tutti gli stati possibili, per incompatibilità colle relazioni di commutazione canoniche: si otterrebbe infatti la relazione palesemente falsa

$$\begin{aligned} 0 &= [(\dot{A}^0 + \partial_i A^i)(x), A^b(x')]_{t=t'} \\ &= [\dot{A}^0(x), A^b(x')]_{t=t'} = i\eta^{0b} \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \tag{1.61}$$

[27] Si noti che tale difficoltà ($\pi^0 = 0$) persiste anche nel caso del campo vettoriale massivo

$$I_m = \int -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} - \frac{1}{2} m^2 A_a A^a,$$

in cui pure non c'è gauge-invarianza e l'operatore d'onda è invertibile.

[28] Scritte in forma covariante le (1.60) si leggono (si veda per esempio [5])

$$[A^a(x), A^b(x')] = -i\eta^{ab} D(x - x'), \quad D(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \varepsilon(k^0) \delta(k^2) e^{-ik\cdot x};$$

se si usa la gauge α si ha

$$\begin{aligned} &[A^a(x), A^b(x')] = -i\eta^{ab} D(x - x') + i(1 - \alpha) \partial^a \partial^b E(x - x'), \\ &E(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \varepsilon(k^0) \delta'(k^2) e^{-ik\cdot x}, \quad \Box E(x) = D(x). \end{aligned}$$

2. In termini delle componenti di Fourier del campo elettromagnetico le (1.60) hanno la forma tipica dell'oscillatore armonico

$$[a_a(k), a_b^+(k')] = -\eta_{ab}\delta(k-k') \tag{1.62}$$

e si quindi può portare avanti in maniera standard la costruzione di Fock. Tuttavia, poichè la metrica η_{ab} non è definita positiva, lo spazio di Fock non è hilbertiano e contiene stati a norma negativa: ciò distrugge completamente l'usuale interpretazione probabilistica.

3. L'hamiltoniana data dalla (1.58)

$$H' =: -\int d^3k\omega a_b^+ a^b : \tag{1.63}$$

non è definita positiva e dunque non ha senso definire il vuoto come stato di minima energia.

Fortunatamente è possibile eliminare tutti i problemi nello stesso modo, cioè restringendo lo spazio di Fock con una opportuna condizione di fisicità; in tal modo è possibile fare in modo che sugli stati fisici risulti

$$< phys'|\partial_a A^a|phys >= 0, \quad < phys|H'|phys >\geq 0 \tag{1.64}$$

e che essi abbiano norma ≥ 0; si può definire allora come spazio hilbertiano fisico l'insieme delle classi di equivalenza

$$H_{phys} = (statifisici)/(stati\ a\ norma\ nulla) \tag{1.65}$$

in cui il prodotto scalare soddisfa $< a|a >> 0 \quad \forall |a >\neq 0$. L'opportuna definizione degli stati fisici è data dalla relazione

$$B^{(+)}|phys >= 0 \tag{1.66}$$

in cui $B^{(+)}$ è la parte di distruzione dell'operatore $B = \partial_a A^a$. La condizione (1.66) soddisfa le seguenti buone proprietà.

1. È una condizione ben definita in quanto derivando rispetto a ∂_b le equazioni del moto dedotte da I'

$$\partial_a F^{ab} - \partial^b \partial^a A_a = \Box A^b = j^b = 0 \tag{1.67}$$

(in presenza di interazione, per esempio con campi spinoriali, risulta $j^a = \bar{\psi}\Gamma^a \psi \neq 0$) si ha

$$\Box B = 0 \tag{1.68}$$

e quindi $B = B^{(-)} + B^{(+)}$ si può spezzare in una parte di creazione e di distruzione [29]. Il risultato vale anche in presenza di interazione in quanto la corrente j^a è conservata ($\partial_a j^a = 0$) in seguito all'invarianza di gauge globale della lagrangiana I'.

2. È una condizione imposta mediante un operatore lineare e dunque assicura che l'insieme degli stati fisici V_{phys} sia un sottospazio lineare dello spazio di Fock (precisamente V_{phys} è il ker dell' operatore $B^{(+)}$).

3. È una condizione indipendente dall'evoluzione del sistema, in quanto definita su tutti i tempi; infatti si si può osservare che poichè $B^{(+)}$ è uno scalare l'operatore di evoluzione temporale $U(\tau) = e^{-iP^0\tau}$ manda $B^{(+)}(t, \vec{x})$ in

$$B_\tau^{(+)}(t, \vec{x}) = U(\tau) B^{(+)}(t, \vec{x}) U^{-1}(\tau) = B^{(+)}(t + \tau, \vec{x}) \tag{1.69}$$

e sia $B_\tau^{(+)}$ che $B^{(+)}$ definiscono gli stessi stati fisici (in altre parole anche se $B^{(+)}$ evolve nel tempo gli stati fisici restano fisici). Lo stesso ragionamento vale in generale per tutto il gruppo di Poincarè: sia $B^{(+)'}(x) = B(\Lambda x + \lambda)$ che $B^{(+)}(x)$ definiscono gli stessi stati fisici.

4. È una condizione che permette di recuperare l'invarianza di gauge locale sugli stati fisici, nel senso che il termine di gauge fixing nell'azione I' sparisce sugli stati fisici

$$\begin{aligned} &< phys'| : \partial_a A^a \cdot \partial_b A^b : |phys >= \\ &< phys'| : B^{(+)} \cdot B^{(+)} + B^{(-)} \cdot B^{(-)} + 2B^{(-)} \cdot B^{(+)} : |phys >= 0 \end{aligned} \tag{1.70}$$

e quindi su di essi l'azione e tutte le quantità che si possono estrarre da essa (compresi gli elementi di matrice S nel caso interagente) sono gauge-invarianti.

[29] Poichè B è hermitiano $B^{(-)}$ e $B^{(+)}$ soddisfano $B^{(+)+} = B^{(-)}$; come conseguenza la (1.66) si può scrivere anche $< phys|B^{(-)} = 0$.

5. È una condizione che, come preannunciato, assicura la positività della norma su V_{phys}; infatti considerando per semplicità gli stati ad una particella si ha che questi sono di soli tre tipi[30]:

   (a) Fotoni trasversali generati da $a_r^+(\vec{k})$
   $$|T>=\int d^3k f^r(\vec{k})a_r^+(\vec{k})|0>; \tag{1.71}$$
   sono i veri stati <u>fisici</u> a norma positiva.

   (b) Fotoni longitudinali e scalari generati da $a_L^+ = \hat{k}\cdot\vec{a}^+$ e a_0^+
   $$|L>=\int d^3k f_L(\vec{k})a_L^+(\vec{k})|0>, \quad |S>=\int d^3k f_S(\vec{k})a_0^+(\vec{k})|0>; \tag{1.72}$$
   sono stati che vanno esclusi in quanto <u>non fisici</u>; ugualmente vanno escluse le loro combinazioni lineari $\alpha a_0^+ + \beta a_L^+$ se $\alpha \neq -\beta$.

   (c) Fotoni misti generati dalla combinazione lineare $a_M = a_0^+ - a_L^+$
   $$|M>=\int d^3k f_M(\vec{k})a_M^+(\vec{k})|0>; \tag{1.73}$$
   sono stati <u>fisici</u>[31] ma a norma nulla[32] e quindi scompaiono in H_{phys}.

6. È una condizione, infine, che assicura anche che il segno di H sia sempre positivo. Ciò si vede immediatamente se si sfrutta il fatto che sugli stati fisici gli operatori a_0^+ e a_L^+ sono equivalenti, nel senso che risulta
$$a_0^+|phys>=a_L^+|phys> \tag{1.74}$$

[30] Indichiamo con $\hat{k}$ il versore di $\vec{k}$ e con $r = 1,2$ le due direzioni ad esso ortogonali.

[31] I fotoni misti sono stati fisici in quanto risulta
$$B^{(+)}a_M|0>\propto|\vec{k}|(a_0-a_L)(a_0^+-a_L^+)|0>\propto(a_0a_0^+ + a_La_L^+)|0>\propto(1-1)|0>=0.$$

[32] I fotoni misti hanno norma nulla in quanto
$$<0|a_Ma_M^+|0>=<0|a_0a_0^+ + a_La_L^+|0>=1-1=0.$$

(è una conseguenza della (1.66), che si può riscrivere $k^a a_a^+|phys>=\omega(a_0^+ - a_L^+)|phys>=0$); si ottiene allora

$$\begin{aligned} <ph.|H|ph.> &=<ph.|\int d^3k\omega(-a_0^+a_0+a_r^+a_r+a_L^+a_L)|ph.> \\ &=<ph.|\int d^3k\omega(a_r^+\cdot a_r)|ph.>\geq 0. \end{aligned} \tag{1.75}$$

In generale quindi la condizione (1.66) risolve completamente tutti i problemi e la teoria libera è consistente. Affinchè la teoria abbia rilevanza fisica, però, è necessario anche provare che ammette interazioni rinormalizzabili; non insistiamo tuttavia su tale problema (basti sapere che si può risolvere). Nel seguito vorremmo estendere i ragionamenti appena sviluppati agli altri tipi di simmetrie locali e in particolare alle teorie di gauge non abeliane; tuttavia prima di fare questo è opportuno fare alcune considerazioni di carattere generale sulle teorie con simmetrie dal punto di vista funzionale. In tal modo infatti si possono ottenere risultati esatti (anche se solo formali in assenza di rinormalizzabilità) sulle proprietà delle funzioni di Green e dei vertici propri; in particolare si prova che l'esistenza della simmetria impone la validità di alcune importantissime identità non perturbative (identità di Ward-Takahashi e di Slavnov-Taylor).

1.5 Identità di Ward-Takahashi

In questo paragrafo vogliamo provare in maniera del tutto generale le identità di Ward-Takahashi, che legano le simmetrie dell'azione classica I alle simmetrie dell'azione effettiva Γ; in particolare proveremo che se l'azione I è invariante per trasformazioni <u>lineari</u> nei campi [33]

$$\delta\phi = \Lambda\phi + \lambda \quad (\delta\phi^{\underline{x}} = \Lambda^{\underline{x}}{}_{\underline{y}}\phi^{\underline{y}} + \lambda^{\underline{x}}) \tag{1.76}$$

a meno di termini lineari

$$\delta I = \delta\phi\frac{\delta I}{\delta\phi} = \hat{\Lambda}\phi + \hat{\lambda} \quad (\delta I = \hat{\Lambda}_{\underline{y}}\phi^{\underline{y}} + \hat{\lambda}) \tag{1.77}$$

[33] Come sempre usiamo notazioni molto condensate e indichiamo con ϕ o $\phi^{\underline{x}}$ un insieme di campi $\phi^i(x)$; espressioni del tipo $\hat{\Lambda}\phi = \hat{\Lambda}_{\underline{x}}\phi^{\underline{x}}$ si devono leggere $\sum_i\int d^4x\hat{\Lambda}_i(x)\phi^i(x)$. Abbreviamo inoltre

$$\Gamma_{\underline{x}_1\cdots\underline{x}_n} \equiv \Gamma^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(x_1,\cdots,x_n) \equiv \frac{\delta^n\Gamma}{\delta\phi^{i_1}(x_1)\cdots\delta\phi^{i_n}(x_n)}.$$

allora lo stesso si può dire anche per l'azione effettiva $\Gamma(\phi)$ (d'ora in poi commettiamo l'innocuo abuso $\phi = \phi_{cl}$)

$$\delta\Gamma = \delta\phi \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} = \hat{\Lambda}\phi + \hat{\lambda}. \tag{1.78}$$

Derivando successivamente le (1.78) rispetto a ϕ e ponendo $\phi = 0$ si hanno delle identità sui vertici propri che si scrivono

$$\Lambda^{\underline{x}}{}_{\underline{y}}\Gamma_{\underline{x}} + \lambda^{\underline{x}}\Gamma_{\underline{x}\underline{y}} = \hat{\Lambda}_{\underline{y}} \tag{1.79}$$

per $n = 1$ e

$$\Lambda^{\underline{x}}{}_{\underline{x}_1}\Gamma_{\underline{x}\underline{x}_2\cdots\underline{x}_n} + \cdots + \Lambda^{\underline{x}}{}_{\underline{x}_n}\Gamma_{\underline{x}_1\cdots\underline{x}_{n-1}\underline{x}} + \lambda^{\underline{x}}\Gamma_{\underline{x}\underline{x}_1\cdots\underline{x}_n} = 0 \tag{1.80}$$

per $n \geq 2$ (la prova è diretta).

Nota Bene: tutti i ragionamenti che seguiranno sono validi solo se la teoria non presenta anomalie e hanno importanza effettiva solo se la teoria è rinormalizzabile.

Per provare la (1.78) si procede nel modo seguente: sia $W(J)$ il funzionale di Feynman associato ad I, invariante per il cambio di coordinate a jacobiano unitario[34]

$$\phi \longrightarrow \phi + \delta\phi; \tag{1.81}$$

risulta allora[35]

$$\begin{aligned} 0 &= W(J) - W(J) \\ &= \int [d\phi] e^{iI(\phi)+i\delta I(\phi)+iJ\cdot\phi+iJ\cdot\delta\phi} - \int [d\phi] e^{iI(\phi)+iJ\cdot\phi} \\ &= \int [d\phi] e^{iI(\phi)+iJ\cdot\phi}[iJ\cdot\delta\phi + i\delta I(\phi)] \\ &= \int [d\phi] e^{iI(\phi)+iJ\cdot\phi}[iJ\cdot(\Lambda\phi+\lambda) + i(\hat{\Lambda}\phi+\hat{\lambda})]. \end{aligned} \tag{1.82}$$

[34] Lo jacobiano funzionale del cambio (1.81) in generale è mal definito; se si usa la regolarizzazione dimensionale però vale certamente 1 in quanto

$$\det \frac{\partial(\phi+\delta\phi)}{\partial\phi} = 1 + Tr\frac{\partial\delta\phi}{\partial\phi} = 1 + \Lambda^{\underline{x}}{}_{\underline{x}} = 1 + \int d^4x \Lambda^i{}_i \delta^4(x-x) = 1$$

(in regolarizzazione dimensionale $\delta^4(0) = 0$.)

[35] Il trucco su cui si basa la (1.82) è quello di effettuare l'innocuo cambio di variabili (1.81) nel primo $W(J)$ e non nel secondo.

In seguito alla linearità di $\delta\phi$ è possibile riscrivere la (1.82) nella forma

$$[J \cdot (\Lambda \tfrac{\delta}{\delta J} + i\lambda) + \hat{\Lambda} \tfrac{\delta}{\delta J} + i\hat{\lambda}] W(J) = 0 \tag{1.83}$$

in cui ϕ è stato estratto dall'integrale funzionale sostituendolo con $\frac{\delta}{\delta J}$; la (1.83) si trasferisce immediatamente al funzionale Z (si usa $\delta W = iW\delta Z$)

$$J \cdot (\Lambda \frac{\delta Z}{\delta J} + \lambda) + \hat{\Lambda} \frac{\delta Z}{\delta J} + \hat{\lambda} = 0 \tag{1.84}$$

e al funzionale Γ (si usa $J = -\delta\Gamma/\delta\phi$):

$$-(\Lambda\phi + \lambda) \cdot \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} + \hat{\Lambda}\phi + \hat{\lambda} = -\delta\phi \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} + \delta\Gamma = 0. \tag{1.85}$$

Si è così provata la (1.78).

Ci interessa ora illustrare l'importanza delle identità di W-T con un esempio concreto. Consideriamo l' azione della QED in gauge α

$$\begin{aligned} I(A, \psi, \bar{\psi}) &= -\tfrac{1}{4} F_{ab} \cdot F^{ab} - \tfrac{1}{2\alpha} \partial_a A^a \cdot \partial_b A^b + i\bar{\psi}\gamma^a \partial_a \cdot \psi + \\ &\quad -m\bar{\psi} \cdot \psi + eA_a \cdot \bar{\psi}\gamma^a \psi \end{aligned} \tag{1.86}$$

gauge-invariante a meno di un termine lineare

$$\delta I = \frac{1}{\alpha} \Box \partial_a A^a \cdot \varepsilon; \tag{1.87}$$

le identità di W-T sul funzionale Γ si scrivono allora

$$-\partial_a \frac{\delta\Gamma}{\delta A_a} - ie\bar{\psi} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}} + ie\psi \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} = \frac{1}{\alpha} \Box \partial_a A^a; \tag{1.88}$$

da questa si ottengono infinite identità sui vertici propri; in particolare ne interessano due:

$$\left. \frac{\delta}{\delta A_b(y)} \right|_{\psi=\bar{\psi}=A=0} \Longrightarrow \partial_a \Gamma^{ab}(x, y) = +\frac{1}{\alpha} \Box \partial^b \delta(y - x) \tag{1.89}$$

$$\begin{aligned} \left. \tfrac{\delta^2}{\delta\psi(z)\bar{\psi}(y)} \right|_{\psi=\bar{\psi}=A=0} \Longrightarrow \quad & \partial_a \Gamma^a(x, y, z) - ie\delta(x - y)\bar{S}(x - z) + \\ & ie\delta(x - z)\bar{S}(y - x) = 0. \end{aligned} \tag{1.90}$$

La prima identità, che si può riscrivere anche nella forma[36]

$$k_a \tilde{\Gamma}^{ab} = -\frac{1}{\alpha} k^2 k^b \tag{1.91}$$

vincola la parte longitudinale dell'inverso del propagatore che rinormalizza con Z_α (la parte trasversa invece rinormalizza con Z_3) [37]. La seconda identità, che si può scrivere anche

$$(p' - p)_a \tilde{\Gamma}^a(p, p') + \bar{S}(p') - \bar{S}(p) = 0 \tag{1.92}$$

collega il vertice a tre punti con i propagatori spinoriali; poichè il primo rinormalizza con Z_1 e i secondi con Z_2 tale identità impone che sia $Z_1 = Z_2$. È evidente quindi l'importanza delle identità di W-T[38] (che sono identità non perturbative, cioè valide a tutti gli ordini) nell'elaborazione di teorie quantistiche con simmetrie; per questo motivo è di notevole interesse cercare un metodo per estendere tali identità a qualunque tipo di simmetria; a questo dedicheremo il prossimo paragrafo.

1.6 Identità di Slavnov-Taylor

In questa sezione illustriamo come sia possibile estendere le identità di W-T a qualunque tipo di simmetria, anche <u>non lineare</u>, usando tecniche coomologiche. L'idea è fornita dal seguente teorema: sia $I(\phi)$ un'azione classica invariante rispetto ad una

[36] I vertici propri nello spazio dei momenti sono definiti dalla formula

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) e^{ip_1 x_1} \cdots e^{ip_n x_n} = (2\pi)^2 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \ldots, p_{n-1});$$

la presenza di una δ^4 è conseguenza dell'invarianza per traslazioni.

[37] L'azione della QED rinormalizzata è

$$I_R = -Z_3 \frac{1}{4} F_{ab} \cdot F^{ab} - Z_\alpha \frac{1}{2\alpha} \partial_a A^a \cdot \partial_b A^b + Z_2 \bar{\psi} \cdot i\gamma^a \partial_a \psi - Z_m m \bar{\psi} \cdot \psi - Z_1 e \bar{\psi} \cdot \gamma^a A_a \psi.$$

[38] Per esempio la condizione $Z_1 = Z_2$ assicura che se la cariche nude del protone e dell'elettrone sono uguali sono uguali anche le cariche rinormalizzate.

certa classe di trasformazioni coomologiche ($\delta^2 = 0$); allora (in assenza di anomalie)c'è un legame tra simmetrie classiche e quantistiche dato dalle identità di Slavnov-Taylor

$$\delta I = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\delta \Gamma^*}{\delta \phi} \cdot \frac{\delta \Gamma^*}{\delta \phi^*} = 0. \tag{1.93}$$

Dedichiamo il resto del paragrafo alla prova delle identità (1.93).

La nostra costruzione procede osservando è possibile modificare $I(\phi) \longrightarrow I^*(\phi, \phi^*)$ aggiungendo degli anticampi ϕ^*[39] senza perdere la simmetria: basta porre

$$I^*(\phi, \phi^*) = I(\phi) + \delta\phi\phi^*; \tag{1.94}$$

anche I^* è $\delta-$invariante per la proprietà di nilpotenza $\delta^2 = 0$. Consideriamo ora il funzionale

$$W^*(J, \phi^*) = \int [d\phi] e^{iI^*(\phi,\phi^*)+iJ\phi}; \tag{1.95}$$

in seguito al cambio di variabili

$$\phi \longrightarrow \phi + \delta\phi \tag{1.96}$$

a jacobiano unitario W^* non cambia e quindi si può scrivere

$$\begin{aligned} 0 \ &= W^*(J, \phi^*) - W^*(J, \phi^*) \\ &= \int [d\phi] e^{iI^*(\phi,\phi^*)+iJ\phi+iJ\delta\phi} - e^{iI^*(\phi,\phi^*)+iJ\phi} \\ &= \int [d\phi] e^{iI(\phi)+i\delta\phi\phi^*+iJ\phi}(iJ\delta\phi) \\ &= J\tfrac{\delta}{\delta\phi^*} \int [d\phi] e^{iI^*(\phi,\phi^*)+iJ\phi} \end{aligned} \tag{1.97}$$

e quindi si ha

$$J\frac{\delta W^*}{\delta \phi^*} = 0 \tag{1.98}$$

[39]Le correnti ϕ^* non hanno nulla a che fare con i complessi coniugati dei campi ϕ; usando la notazione degli indici si può scrivere $\phi^* = (\phi_I)$ e quindi ϕ^* ha indici coniugati rispetto a quelli dei campi $\phi = (\phi^I)$.

che si può scrivere anche

$$J\frac{\delta Z^*}{\delta \phi^*} = 0 \tag{1.99}$$

ovvero[40]

$$\frac{\delta \Gamma^*}{\delta \phi}\frac{\delta \Gamma^*}{\delta \phi^*} = 0. \tag{1.100}$$

1.7 Simmetrie coomologiche

Nel paragrafo precedente abbiamo fatto vedere che le simmetrie coomologiche, cioè simmetrie che soddisfano la condizione coomologica o di nilpotenza

$$\delta^2 = 0, \tag{1.101}$$

si trasportano direttamente dall'azione classica I all'azione effettiva Γ e quindi (derivando con l'operatore$\frac{\delta^n}{\delta \phi^n}|_{\phi=0}$) danno dei vincoli sui vertici propri di una teoria quantistica. Ciò nonostante resta aperto il problema di come rendere coomologica una simmetria di interesse fisico, come per esempio una simmetria di gauge od una simmetria geometrica. Dedichiamo questo paragrafo alla soluzione del problema, che avviene tramite la tecnica standard di introdurre dei ghost anticommutanti associati ai parametri della simmetria. Illustriamo eplicitamente gli esempi più interessanti.

1. Per le teorie con campi di gauge A basta introdurre dei ghost C (adimensionali e a valori nella rappresentazione aggiunta del gruppo di simmetria) che trasformano con

$$\delta C = -\frac{1}{2} C \times C \tag{1.102}$$

[40]In seguito alla definizione $\phi_{cl} = \phi = \frac{\delta Z}{\delta J}$ risulta

$$J = -\frac{\delta \Gamma^*}{\delta \phi}, \quad \frac{\delta Z^*}{\delta \phi^*} = \frac{\delta \Gamma^*}{\delta \phi^*}.$$

per avere $\delta^2 = 0$[41]; le trasformazioni sugli altri campi sono[42]

$$\delta A = DC, \quad \delta\phi = iC^{\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}} \phi. \tag{1.103}$$

2. Il procedimento si estende anche a teorie con simmetria per cambi generali di coordinate, come la relatività generale, con tensore metrico $g_{\tilde{a}\tilde{b}}$. L'idea è quella di introdurre dei ghost associati ai diffeomorfismi ($\delta x^{\tilde{a}} = \gamma^{\tilde{a}}$) con trasformazione

$$\delta_D \gamma^{\tilde{a}} = \gamma^{\tilde{b}} \partial_{\tilde{b}} \gamma^{\tilde{a}}; \tag{1.104}$$

su $g_{\tilde{a}\tilde{b}}$ (e su eventuali campi di materia ϕ) si prendono le trasformazioni ordinarie con i parametri locali sostituiti dai ghost:

$$\delta_D g_{\tilde{a}\tilde{b}} = -\ell_\gamma g_{\tilde{a}\tilde{b}} = -\gamma^{\tilde{c}} \partial_{\tilde{c}} g_{\tilde{a}\tilde{b}} + \partial_{\tilde{a}} \gamma^{\tilde{c}} g_{\tilde{c}\tilde{b}} + \partial_{\tilde{b}} \gamma^{\tilde{c}} g_{\tilde{a}\tilde{c}}, \quad \delta_D \phi = -\ell_\gamma \phi. \tag{1.105}$$

3. Nel caso delle simmetrie fermioniche locali dell'azione di Rarita-Schwinger, i ghost $\mathcal{C}^\alpha$ sono spinori commutanti con trasformazioni

$$\delta_S \mathcal{C} = 0, \quad \delta_S \psi = d\mathcal{C}. \tag{1.106}$$

Nota: la validità della (1.101) permette di definire una $\delta-$coomologia analoga all'ordinaria $d-$coomologia in quanto δ si comporta come una derivata esterna. Indichiamo con P^n l'insieme dei funzionali polinomiali locali contenenti n ghost ($\delta-$cocatene di grado n) [43]; si dicono $\delta-$cocicli gli oggetti $\delta-$chiusi ($\delta X = 0,\ X \in Z^n$) e $\delta-$cobordi gli oggetti $\delta-$esatti ($X = \delta Y,\ X \in B^n$); i cocicli che non sono cobordi sono rappresentativi delle classi di coomologia di δ:

$$H^n = Z^n / B^n.$$

Tali classi sono particolarmente interessanti; in particolare in H^0 si trovano tutte le possibili azioni di una teoria quantistica mentre in H^1 vi sono tutte le possibili anomalie, come vedremo nel seguito.

[41] Si usa la proprietà $C \times (C \times C) = 0$, conseguenza delle identità di Jacobi sulle costanti di struttura del gruppo di Lie. Un'altra utile proprietà e' $\frac{1}{2} A \times (C \times C) = (A \times C) \times C$.

[42] Per provare che sui campi A e ϕ δ è nilpotente basta un conto diretto e tener conto che δ soddisfa la regola di Leibniz graduata

$$\delta(ab) = \delta a b + (-)^a a \delta b,$$

dove il simbolo $(-)^a$ vale $+1$ se il funzionale a contiene una potenza pari di campi di ghost e -1 in caso contrario.

[43] Si noti che δ ha numero di ghost $+1$ e manda funzionali P^n in funzionali P^{n+1} in quanto risulta $\delta(C^n) \propto C^{n+1}$.

1.8 Azioni BRST invarianti

L'introduzione dei ghost al posto dei parametri di una data simmetria (locale o globale) permette, come si è visto, di renderla coomologica; nel caso di simmetrie locali, in particolare, i ghost sono veri e propri campi dipendenti dal punto e quindi possono entrare nell'azione. In particolare azioni del tipo

$$I(\phi, C, \ldots) = I(\phi) + \delta J(\phi, C, \ldots) \tag{1.107}$$

sono sicuramente invarianti e quindi sono estensioni possibili dell'azione classica $I(\phi)$ (appartengono alla stessa classe di coomologia). È del tutto chiaro che è impossibile costruire dei termini di tipo J solo con campi di tipo C e ϕ; infatti affinchè la variazione δJ abbia numero di ghost zero (come l'azione I) è necessario che J abbia numero di ghost -1, mentre una qualunque combinazione dei campi C e ϕ ha numero di ghost positivo o nullo. È dunque necessario introdurre degli antighost $\bar{C}$ con numero di ghost -1; l'introduzione di questi a sua volta comporta la nascita di ulteriori campi B con numero di ghost 0 che intervengono nella legge di trasformazione più generale possibile per $\bar{C}$:

$$\delta\bar{C} = iB. \tag{1.108}$$

Nella (1.108) il fattore i è puramente convenzionale; la condizione di nilpotenza chiude il circolo e impone la legge di (non) trasformazione

$$\delta B = 0. \tag{1.109}$$

1. Le precedenti trasformazioni sui campi A, B, C e $\bar{C}$ sono state introdotte per la prima volta da Becchi, Rouet, Stora (e indipendentemente da Tyutin) e pertanto si dicono trasformazioni di BRST; assumendo che i campi $\bar{C}$ (e quindi i campi B) abbiamo dimensione di massa 2 [44] è possibile determinare in modo univoco la forma della lagrangiana covariante e globalmente gauge-invariante[45] equivalente alla lagrangiana classica più generale possibile (basta ricordare che

[44] Tale assunzione è necessaria per poter costruire i termini lineari delle derivate prime dei ghost e degli antighost più semplici possibili, del tipo $\partial_a\bar{C}\partial^a C$.

[45] La costruzione di BRST permette di rompere la simmetria locale (anche se non la simmetria globale) sostituendola con una simmetria globale associata ad un parametro anticommutante λ con numero di ghost -1; a partire da δ si possono infatti definire gli utili operatori

$$\delta_\lambda = \lambda\delta$$

J deve avere dimensione canonica 4 e numero di ghost -1): nel caso delle teorie di Yang-Mills si ottiene[46]

$$\begin{aligned} I(A,B,C,\bar{C}) &= I_{GI}(A) - i\delta(\tfrac{\alpha}{2}\bar{C}\cdot B - \partial_a\bar{C}\cdot A^a) \\ &= I_{GI}(A) + \tfrac{\alpha}{2}B\cdot B - \partial_a B\cdot A^a - i\partial_a\bar{C}D^aC. \end{aligned} \tag{1.110}$$

Le equazioni del moto dedotte dall'azione (1.110) sono

$$\begin{aligned} &\tfrac{\delta I}{\delta A_b}: \quad D_aF^{ab} - \partial^b B + i\partial^b\bar{C}\times C = 0 \\ &\tfrac{\delta I}{\delta B}: \quad \partial_a A^a + \alpha B = 0 \\ &\tfrac{\delta I}{\delta C}: \quad D^a\partial_a\bar{C} = 0 \\ &\tfrac{\delta I}{\delta \bar{C}}: \quad \partial^a D_a C = 0 \end{aligned} \tag{1.111}$$

e in particolare la seconda equazione permette di esprimere il campo B in funzione della divergenza di A (B è un campo ausiliario[47]); implementandola l'azione si può riscrivere nella forma ancora BRST-invariante ma priva del campo B

$$I = -\frac{1}{4}F_{ab}\cdot F^{ab} - \frac{1}{2\alpha}\partial_a A^a\cdot\partial_b A^b - i\partial_a\bar{C}\cdot D^aC; \tag{1.112}$$

in questo modo però la condizione di nilpotenza non vale più off-shell ma soltando sullo spazio delle configurazioni che soddisfano le equazioni del moto (il punto critico si trova quando si testa $\delta^2\bar{C} = -\frac{i}{\alpha}\partial_a\delta A^a = -\frac{i}{\alpha}\partial_a D^aC = 0$, che richiede l'equazione del moto dei ghost) cioè on-shell; dunque non valgono più le identità di Slavnov-Taylor (che sono state derivate nell'assunzione di invarianza per qualunque configurazione dei campi).

---

che hanno numero di ghost zero e quindi non danno luogo a cambi di segno quando sono applicati a prodotti di cocatene; inoltre la proprietà di nilpotenza continua a valere nel senso che risulta

$$\delta_\lambda\delta_{\lambda'} = 0$$

per ogni λ e per ogni λ'.

[46]Si noti che l'azione (1.110) è hermitiana se si usano le convenzioni $(XY)^* = Y^*X^*$ e $C^* = C$, $\bar{C}^* = \bar{C}$; vale infatti la curiosa proprietà secondo cui il prodotto di numeri anticommutanti "reali" ($\chi^* = \chi$, $\psi^* = \psi$) e' "immaginario" ($(\chi\psi)^* = -(\chi\psi)^*$).

[47]Si noti che nel caso $\alpha = 0$ il campo B diventa un moltiplicatore di Lagrange che impone il fixing di Lorentz $\partial^a A_a = 0$.

2. Nel caso gravitazionale una possibile azione invariante per trasformazioni di coordinate globali e per BRST (descritta estesamente in [5]) è [48]

$$
\begin{aligned}
I &= I_{cl} + \int d^4x \tfrac{i}{\kappa^2}\delta_D(eg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde a}\bar\gamma_{\tilde b}) \\
&= I_{cl} + \int d^4x \tfrac{i}{\kappa^2}[-\partial_{\tilde c}(eg^{\tilde a\tilde b}\gamma^{\tilde c})\partial_{\tilde a}\bar\gamma_{\tilde b} + eg^{\tilde c\tilde b}\partial_{\tilde c}\gamma^{\tilde a}\partial_{\tilde a}\bar\gamma_{\tilde b} \\
&\qquad +eg^{\tilde a\tilde c}\partial_{\tilde c}\gamma^{\tilde b}\partial_{\tilde a}\bar\gamma_{\tilde b} + ieg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde a}\beta_{\tilde b}] \\
&= I_{cl} + \int d^4x \tfrac{i}{\kappa^2}[eg^{\tilde a\tilde b}\gamma^{\tilde c}\partial_{\tilde c}\partial_{\tilde a}\bar\gamma_{\tilde b} + eg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde a}\gamma^{\tilde c}\partial_{\tilde c}\bar\gamma_{\tilde b} + eg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde b}\gamma^{\tilde c}\partial_{\tilde a}\bar\gamma_{\tilde c} \\
&\qquad +ieg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde a}\beta_{\tilde b}] \\
&= I_{cl} + \int d^4x \tfrac{i}{\kappa^2}[-ieg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde a}(i\gamma^{\tilde c}\partial_{\tilde c}\bar\gamma_{\tilde b}) - eg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde a}\bar\gamma_{\tilde c}\partial_{\tilde b}\gamma^{\tilde c} + ieg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde a}\beta_{\tilde b}] \\
&= I_{cl} + \int d^4x \tfrac{i}{\kappa^2}[-eg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde a}\bar\gamma_{\tilde c}\partial_{\tilde b}\gamma^{\tilde c} + ieg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde a}\hat\beta_{\tilde b}]
\end{aligned}
\tag{1.113}
$$

dove si e' definito

$$
\hat\beta_{\tilde b} = \beta_b - i\gamma^{\tilde c}\partial_{\tilde c}\bar\gamma_{\tilde b} \quad (\Longrightarrow \delta\bar\gamma_{\tilde a} = i\beta_{\tilde a} = i\hat\beta_{\tilde a} - \gamma^{\tilde c}\partial_{\tilde c}\bar\gamma_a). \tag{1.114}
$$

Le equazioni del moto dedotte dalla (1.113) sono

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\delta I}{\delta g}: \quad \mathcal{R}_{\tilde a\tilde b} - \tfrac12 g_{\tilde a\tilde b}R_S = E_{\tilde a\tilde b} - \tfrac12 g_{\tilde a\tilde b}E^{\tilde c}{}_{\tilde c} \\
&\tfrac{\delta I}{\delta\hat\beta}: \quad \partial_{\tilde a}(eg^{\tilde a\tilde b}) = 0 \\
&\tfrac{\delta I}{\delta\gamma}: \quad \partial_{\tilde a}(eg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde b}\bar\gamma_{\tilde c}) = 0 \\
&\tfrac{\delta I}{\delta\bar\gamma}: \quad \partial_a(eg^{\tilde a\tilde b}\partial_{\tilde b}\gamma^{\tilde c}) = 0
\end{aligned}
\tag{1.115}
$$

con

$$
E_{\tilde a\tilde b}(\hat\beta,\gamma,\bar\gamma) = 2\partial_{(\tilde a}\hat\beta_{\tilde b)} + 2i\partial_{(\tilde a}\bar\gamma_{\tilde c}\partial_{\tilde b)}\gamma^{\tilde c}; \tag{1.116}
$$

[48]Nella (1.113) i ghost $\gamma^{\tilde a}$ e $\bar\gamma_{\tilde a}$ hanno dimensione fisica rispettivamente -1 e $+1$ mentre $\beta_{\tilde a} = -i\delta\bar\gamma_{\tilde a}$ ha dimensione $+1$. L'azione gravitazionale classica vale $I_{cl} = \int d^4x \frac{1}{2\kappa^2}eR_S$ e nel fare il conto si usa la proprietà $\delta_D e = -\partial_{\tilde a}(e\gamma^{\tilde a})$ da cui $\delta_D(eg^{\tilde a\tilde b}) = (-\partial_{\tilde c}(eg^{\tilde a\tilde b}\gamma^{\tilde c}) + eg^{\tilde c\tilde b}\partial_{\tilde c}\gamma^{\tilde a} + eg^{\tilde a\tilde c}\partial_{\tilde c}\gamma^{\tilde b})$.

si noti in particolare che il campo $\hat{\beta}_{\tilde{a}}$ è un moltiplicatore di Lagrange che forza la gauge armonica. Nakanishi ha dimostrato che la teoria appena sviluppata a livello quantistico è unitaria, cioè priva di stati a norma negativa; tuttavia il problema della rinormalizzabilità resta aperto.

3. Nel caso dell'azione di Rarita-Schwinger introducendo dei ghost $\mathcal{C}$ di dimensione $\frac{1}{2}$, degli antighost $\mathcal{C}^*$ di dimensione $\frac{5}{2}$ e dei campi $\mathcal{B} = -i\delta\mathcal{C}^*$ di dimensione $\frac{3}{2}$ si ottiene come azione più generale possibile

$$\begin{aligned} I &= I_{RS}(\psi) + \delta(\bar{\mathcal{C}}^* \cdot \gamma^a \psi_a) \\ &= I_{RS} + i\bar{\mathcal{B}} \cdot \gamma^a \psi_a - \bar{\mathcal{C}}^* \cdot \gamma^a \partial_a \mathcal{C}. \end{aligned} \tag{1.117}$$

Da questa si ottengono le equazioni del moto

$$\begin{aligned} &\tfrac{\delta I}{\delta \psi}: \quad i\gamma^{abc}\partial_b\psi_c - i\gamma^a\mathcal{B} = 0 \\ &\tfrac{\delta I}{\delta \mathcal{B}}: \quad \gamma^a\psi_a = 0 \\ &\tfrac{\delta I}{\delta \mathcal{C}}: \quad i\gamma^a\partial_a\mathcal{C}^* = 0 \\ &\tfrac{\delta I}{\delta \mathcal{C}^*}: \quad i\gamma^a\partial_a\mathcal{C} = 0; \end{aligned} \tag{1.118}$$

anche in questo caso il campo $\mathcal{B}$ è un moltiplicatore di Lagrange che forza il gauge fixing (1.52); esso può essere ottenuto in funzione degli altri campi (a meno di un parametro moltiplicativo α) se si tiene conto che ha numero di ghost zero, dimensione fisica $\frac{5}{2}$ e soddisfa $\delta\mathcal{B} = 0$; si ottiene

$$\mathcal{B} = \alpha(\partial^b - \gamma^a\gamma^b\partial_a)\psi_b \tag{1.119}$$

e quindi la parte senza ghost dell'azione (1.117) assume proprio la forma già determinata nella formula (1.53)[49]. Anche in questo caso abbiamo quindi verificato esplicitamente che la procedura di BRST permette di fornire le azioni gauge-fissate (cioè con operatore d'onda Ω_0 invertibile) che si desiderano; si ottengono inoltre dei campi di ghost non fisici.

[49] Nel fare il conto conviene notare che per le proprietà di simmetria delle matrici γ^a risulta

$$\bar{\psi}_a\gamma^a\partial^b\psi_b = \frac{1}{2}\bar{\psi}_a(\gamma^a\partial^b + \gamma^b\partial^a)\psi_b.$$

Studiamo ora più in dettaglio il caso di Yang-Mills e scriviamo come esercizio le identità sull'azione effettiva associate all'azione BRST-invariante (1.110); conviene distinguere i campi in due insiemi distinti

$$\phi^I = (A, B, C, \bar{C}), \quad \phi^M = (B, \bar{C}), \quad \phi^U = (A, C) \tag{1.120}$$

soggetti rispettivamente a trasformazioni lineari e quadratiche

$$\delta\phi^M = (0, iB), \quad \delta\phi^U = (DC, -\frac{1}{2}C \times C); \tag{1.121}$$

i campi ϕ^M danno luogo a termini di Ward-Takahashi $\delta\phi^M \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^M}$ mentre i campi ϕ^U danno luogo a termini di Slavnov-Taylor $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^U}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_U}$; complessivamente dunque si ha (d'ora in poi con un piccolo abuso continueremo a indicare Γ^* con Γ)

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A^*}\frac{\delta\Gamma}{\delta A} + \frac{\delta\Gamma}{\delta C^*}\frac{\delta\Gamma}{\delta C} + iB\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{C}} = 0. \tag{1.122}$$

1.9 Simmetrie di Yang-Mills

Nei paragrafi precedenti abbiamo illustrato come si possano estendere le simmetrie di un'azione classica a livello quantistico in maniera da assicurare la validità delle identità di Slavnov-Taylor; in concreto però non abbiamo fatto alcun passo verso l'effettiva quantizzazione. In questo paragrafo risolveremo il problema (quasi) completamente per le teorie di Yang-Mills. La costruzione procede direttamente[50] in quanto l'azione BRST-invariante (1.110) che per comodità riscriviamo

$$I(A, B, C, \bar{C}) = -\frac{1}{4}F_{ab}\cdot F^{ab} - \partial_a B\cdot A^a + \frac{\alpha}{2}B\cdot B - i\partial^a\bar{C}\cdot D_a C \tag{1.123}$$

[50]Se si cerca di ragionare come si è fatto nel caso elettromagnetico, cioè considerando l'azione gauge fissata senza ghost

$$I' = -\frac{1}{2}F_{ab}\cdot F^{ab} - \frac{1}{2\alpha}\partial_a A^a\cdot\partial_b A^b$$

si va incontro a seri problemi in quanto è impossibile usare il vincolo (1.66). Il motivo è che i campi $B = -\frac{1}{\alpha}\partial_a A^a$ soddisfano le equazioni non lineari

$$D^a\partial_a B = 0$$

e quindi non si può decomporre $B = B^{(+)} + B^{(-)}$ come dev'essere per poter scrivere la (1.66). Inoltre, anche trascurando questo problema, l'azione I' non è buona in quanto per trasformazioni di gauge $\delta_\varepsilon I' = -\frac{1}{\alpha}D^a\partial_a\partial_b A^b\cdot\varepsilon$ non è lineare nei campi e quindi non valgono le identità di Ward-Takahashi.

permette di definire dei momenti canonici non singolari

$$\begin{aligned}
\pi_{A^i} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^i} = F_{i0} \\
\pi_B &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{B}} = -A_0 \\
\pi_C &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{C}} = i\dot{\bar{C}} \\
\pi_{\bar{C}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{C}}} = -iD_0C;
\end{aligned} \tag{1.124}$$

si noti che a differenza del caso abeliano ora il campo A_0 è pensato come momento coniugato di B e non come variabile canonica; si impongono poi le regole di commutazione-anticommutazione standard[51]

$$[\pi_I(x), \phi^J(x')\}_{t=t'} = -i\delta_I{}^J\delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{1.125}$$

(le parentesi $[\quad,\ \}$ sono da intepretare come anticommutatori solo quando operano sui ghost) e si costruiscono esplicitamente gli stati della teoria a partire dallo spazio di Fock degli stati asintotici, su cui valgono le equazioni libere (cioè linearizzate)

$$\Box A^{as}_a = 0,\ \Box B^{as} = 0,\ \Box C^{as} = 0,\ \Box\bar{C}^{as} = 0. \tag{1.126}$$

Si possono quindi definire operatori di creazione e distruzione (che indichiamo con $a_a^+, b^+, c^+, \bar{c}^+$ e $a_a, b, c, \bar{c}$) e costruire con questi tutti gli stati e gli operatori possibili; in particolare gli operatori di distruzione $\phi^I = (a_r, \hat{a}, b, c, \bar{c})$ con

$$\hat{a}(\vec{k}) = -\frac{a_0 + a_L}{2\omega}, \quad b(\vec{k}) = -\omega(a_0 - a_L) \tag{1.127}$$

soddisfano

$$[\phi^I(\vec{k}), \phi^J(\vec{k}')\} = g^{IJ}\delta(\vec{k}-\vec{k}') \tag{1.128}$$

con

$$g^{IJ} = \begin{pmatrix} \delta_{rs} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.129}$$

[51] Si veda l'appendice A per la definizione delle parentesi di Poisson graduate.

Per classificare tutti i possibili stati conviene tener conto delle simmetrie dell'azione (1.110); per esempio una simmetria di immediata verifica è l'invarianza globale

$$C \longrightarrow e^{\theta} C, \quad \bar{C} \longrightarrow e^{-\theta} C; \tag{1.130}$$

a questa è associata la carica conservata Q_C che dà il numero dei ghost totale di un funzionale. Per provarlo osserviamo che a livello infinitesimo risulta

$$\delta_C C = [iQ_C, C] = +C, \quad \delta_C \bar{C} = [iQ_C, \bar{C}] = -\bar{C} \tag{1.131}$$

e quindi su funzionali polinomiali $f(C, \bar{C})$ contenenti n_C ghost e $n_{\bar{C}}$ antighost risulta[52]

$$\delta_C f = [iQ_C, f] = (n_C - n_{\bar{C}}) f = n_G f. \tag{1.132}$$

In particolare il numero di ghost totale è zero sse f è invariante per la (1.130). L'espressione esplicita di Q_C è data da

$$Q_C = \int d^3x \delta_C \phi^I \pi_I = \int d^3x i[\bar{C}\dot{C} - \dot{\bar{C}} C + \bar{C}(A_0 \times C)]; \tag{1.133}$$

All'invarianza globale per trasformazioni di BRST[53]

$$\delta_B A = DC, \quad \delta_B B = 0, \quad \delta_B C = -\frac{1}{2} C \times C, \quad \delta_B \bar{C} = iB. \tag{1.134}$$

è invece associata una carica conservata Q_B che soddisfa

$$[iQ_C, Q_B] = Q_B, \quad \{Q_B, Q_B\} = 0, \quad [Q_C, Q_C] = 0; \tag{1.135}$$

[52]Lo si prova immediatamente sfruttando la proprietà $\delta_C C^n = \delta C C^{n-1} + C \delta_C (C^{n-1}) = C^n + (n-1) C^n = n C^n$ (idem per $\bar{C}$: $\delta_C \bar{C}^n = -n \bar{C}^n$).

[53]Notiamo per completezza che l'azione (1.110) possiede anche un'ulteriore invarianza di tipo coomologico, detta di anti-BRST:

$$\bar{\delta}_B A = D\bar{C}, \quad \bar{\delta}_B B = -\bar{C} \times B, \quad \bar{\delta}_B C = iB - \bar{C} \times C, \quad \bar{\delta}_B \bar{C} = -\frac{1}{2} \bar{C} \times \bar{C}.$$

L'operatore $\bar{\delta}_B$ ha numero di ghost -1 e dimensione fisica $+2$; inoltre la carica $\bar{Q}_B$ ed esso associata assieme alle carica Q_B e Q_C genera la seguente algebra:

$$\{Q_B, Q_B\} = 0, \quad [iQ_C, Q_B] = +Q_B, \quad \{Q_C, Q_C\} = 0$$
$$\{\bar{Q}_B, \bar{Q}_B\} = 0, \quad [iQ_C, \bar{Q}_B] = -\bar{Q}_B, \quad \{Q_B, \bar{Q}_B\} = 0.$$

L'invarianza di anti-BRST non sarà indispensabile nel seguito.

dunque la carica di BRST ha numero di ghost +1; ciò si vede anche dalla sua espressione esplicita[54]

$$Q_B = \int d^3x \delta_B \phi^I \pi_I = \int d^3x [B\dot{C} - \dot{B}C + B(A_0 \times C) + \frac{i}{2}\dot{\bar{C}}(C \times C)]. \quad (1.136)$$

La carica Q_B permette di definire gli stati fisici tramite la condizione

$$Q_B|phys >= 0; \quad (1.137)$$

si noti che sugli stati fisici l'azione (1.110), che è della forma $I = I_{cl} + \delta_B Y$, cioè è nella stessa classe di coomologia di I_{cl}, è equivalente a I_{cl} e quindi gauge invariante. In generale tutti gli operatori del tipo $O' = O + \delta_B Y$ sono tra loro equivalenti in quanto sugli stati fisici risulta[55]

$$\begin{aligned} &< phys'|O + \delta_B Y|phys >= \\ &< phys'|O + [iQ_B, Y\}|phys >= \\ &< phys'|O|phys > + < phys'|iQ_B Y \pm Y iQ_B|phys >= \\ &< phys'|O|phys > . \end{aligned} \quad (1.138)$$

Dunque gli osservabili di una teoria di Yang-Mills sono associati a classi di coomologia non banali di δ_B; si noti in particolare che il campo di forze F_{ab} non è un osservabile ($\delta_B F = F \times C \neq 0$) contrariamente a quanto avviene per le teorie abeliane.

Proviamo ora che gli stati fisici (1.137) sono effettivamente dei buoni stati fisici,

---

[54] Usando gli operatori asintotici si ha

$$Q_B = \int d^3x (B\dot{C} - \dot{B}C) = i \int d^3k (c^+ b - b^+ c);$$

si noti che se è possibile considerare solo stati senza ghost, cioè con $C|phys >= 0$, come avviene nelle teorie abeliane, la carica di BRST su di essi si riscrive

$$Q_B \simeq \int d^3k c^+ b$$

la condizione $Q_B|phys >= 0$ si riduce alla solita $B^{(+)}|phys >= 0$.

[55] Si ricorda che siccome Q_B è hermitiana la condizione $Q_B|phys' >= 0$ è equivalente alla $< phys'|Q_B = 0$.

cioè che hanno norma definita positiva (ciò equivale a provare l'unitarietà della teoria). Studiamo dapprima le proprietà generali degli stati (anche non fisici) di una teoria di Yang-Mills eseguendo uno studio delle rappresentazioni dell' algebra (1.135). È chiaro (per la nilpotenza di Q_B) che se $|N>$ è uno stato con $|N>$ ghost (cioè ottenuto applicando N volte l'operatore c^+ ad uno stato senza ghost) allora $Q_B|N>$ è uno stato fisico; $Q_B|N>$ può coincidere con il vuoto (in tal caso $|N>$ è fisico e si dice costituire un singoletto) oppure dare luogo ad un nuovo stato $|N+1>$ con $N+1$ ghost (in tal caso $|N>$ ed $|N+1>$ formano un doppietto).

Consideriamo dapprima i singoletti. Uno stato $|N>=\Omega^+|0>$ generato da un operatore Ω^+ è un singoletto se e solo se Ω^+ è BRST-invariante ($[Q_B,\Omega^+]=0=[Q_B,\Omega]$); per esempio gli stati generati dagli operatori a_r^+ sono tutti singoletti con 0 ghost e formano i veri stati fisici della teoria (a norma positiva) [56]. Nel caso $N\neq 0$ i singoletti vanno a coppie[57] $|\pm N>$ generate da operatori σ e $\bar{\sigma}$ BRST-invarianti e quindi associati a classi di coomologia non banali di δ_B

$$|N>=\sigma^+|0>, \quad |-N>=\bar{\sigma}^+|0>, \quad <N|-N>=1. \tag{1.139}$$

Nelle teorie di Yang-Mills tali coppie non esistono in quanto non ci sono classi di coomologia non banali con numero di ghost negativo (si veda [7]): ciò è un bene perchè altrimenti σ e $\bar{\sigma}$ permetterebbero di costruire stati fisici, anche privi di ghost, a norma negativa, come per esempio

$$|v>=\sigma^+\bar{\sigma}^+|0>, \quad <v|v><0; \tag{1.140}$$

tali stati distruggerebbero l'intepretazione probabilistica[58].

Consideriamo ora i doppietti, in cui $|N>$ non è fisico, mentre $|N+1>$ lo è. Questi vanno a coppie[59] $|\pm N>$, $|\pm(N+1)>$ e quindi formano dei quartetti generati dagli operatori

$$\begin{array}{ll} |N>=\chi^+|0>, & |N+1>=-i\gamma^+|0> \\ |-N>=-\beta^+|0> & |-N-1>=-\bar{\gamma}|0> \end{array} \tag{1.141}$$

[56] Tutto ciò è conseguenza delle regole di commutazione (1.129) da cui si ottiene $\delta a_r^+ \propto k^r a_r = 0$.

[57] Eventuali singoletti spaiati disaccoppiano e non entrano nella teoria; si veda per esempio [6].

[58] Coppie di singoletti possono nascere in presenza di anomalie.

[59] Poichè necessariamente $<N+1|phys>=<N|Q_B|phys>=0$ è necessario supporre l'esistenza di stati $|-N-1>$, $|-N>=Q_B|-N-1>$ soddisfacenti $<N+1|-N-1>=1$ per non avere un prodotto scalare degenere.

che soddisfano le seguenti relazioni (ottenute applicando Q_B alle (1.141))

$$\delta\chi = \gamma, \quad \delta\beta = 0, \quad \delta\gamma = 0, \quad \delta\bar{\gamma} = i\beta. \tag{1.142}$$

In particolare gli operatori $(\chi, \beta, \gamma, \bar{\gamma}) = (\hat{a}, b, c, \bar{c})$, in seguito alle proprietà di commutazione (1.129), generano dei quartetti con numero di ghost $N = 0$, $N+1 = 1$; i quartetti comunque non danno preoccupazioni in quanto sono stati fisici solo se hanno norma nulla e non contribuiscono alle probabilità di transizione. Per provare questa affermazione consideriamo il proiettore P^n sugli stati con n particelle non fisiche: in particolare P^0 è il proiettore sugli stati fisici genuini e si può scrivere nella forma

$$P^0 = \sum_{m=1}^{\infty} a^{r1+} \cdots a^{rm+}|0>< 0|a^{rm} \cdots a^{r1}; \tag{1.143}$$

è immediato verificare che P^0 soddisfa le proprietà tipiche di un proiettore

$$P^+ = P, \quad P^2 = P; \tag{1.144}$$

tutti i proiettori P^n si possono costruire ricorsivamente a partire da P^0 mediante la formula (tratta da [6])

$$P^n = -i\delta_B R^n = [Q_B, R^n\}, \quad n > 0 \tag{1.145}$$

con

$$R^n = -\frac{1}{n}(\bar{\gamma}^+ \cdot P^{n-1}\chi + \chi^+ P^{n-1} \cdot \bar{\gamma} + \beta^+ \cdot P^{n-1}\bar{\gamma}) \tag{1.146}$$

e soddisfano le proprietà di ortogonalità e completezza

$$P^n P^m = \delta^{nm} P^n, \quad \sum_{m=1}^{\infty} P^m = \mathbb{1}. \tag{1.147}$$

Come conseguenza un generico stato <u>fisico</u> $|s>$ si può scomporre nelle sue proiezioni ortogonali $|s^n> = P^n|s>$ e solo la componente $|s^0>$ contribuisce al prodotto scalare

$$< s|s >= \sum_{m=1}^{\infty} < s_m|s_m >=< s_0|s_0 > \tag{1.148}$$

in quanto tutte le proiezioni $|s^n>$ per $n \neq 0$ hanno norma nulla, cioè appartengono allo spazio dei vettori isotropi V_0:

$$< s^n|s^n >=< s|P^n P^n|s >=< s|P^n|s >=< s|Q_B R^n \pm R^n Q_B|s >= 0. \quad (1.149)$$

Abbiamo in questo modo provato che i quartetti non costruibuiscono alla norma e c'è l'isomorfismo

$$H_{phys} = V_{phys}/V_0 = P^0 V. \quad (1.150)$$

Questo assicura che lo spazio di Fock degli stati asintotici sia ben definito; resta però da provare che la teoria effettiva, cioè in presenza di interazione, sia consistente, ovvero rinormalizzabile. La prova della rinormalizzabilità (che non riporteremo) si basa in maniera fondamentale sulla validità delle identità di Slavnov-Taylor (1.122).

1.10 Anomalie

Nei paragrafi precedenti abbiamo (quasi) completamente risolto il problema della quantizzazione di una teoria di gauge in assenza di anomalie. In presenza di anomalie però i ragionamenti precedenti (e in particolare le identità di Ward-Takahashi e di Slavnov-Taylor) non valgono più e quindi in generale una teoria che possiede delle anomalie (ciò significa che non è possibile determinare nessuna regolarizzazione consistente con tutte le simmetrie dell'azione di partenza) può essere consistente solo se esiste un meccanismo in grado di eliminarle. In questo paragrafo diamo qualche generalità sulle anomalie. Per semplicità ci riferiamo sempre alla regolarizzazione dimensionale e indichiamo con I^τ l'azione regolarizzata.
C'è possibilità di un'anomalia[60] se in seguito alla simmetria

$$\delta I = 0 \quad (1.151)$$

I^τ cambia di un fattore τR^τ con R^τ finito per $\tau \longrightarrow 0$[61]

$$\delta I^\tau = \tau R^\tau \neq 0. \quad (1.152)$$

[60]Come si è detto l'anomalia c'è veramente solo se la simmetria viene rotta da ogni regolarizzazione algebricamente consistente e non solo dalla regolarizzazione dimensionale.

[61]Un esempio di anomalia globale è dato dall'anomalia conforme presente nella teoria $\lambda\phi^4$ in assenza di massa: l'azione regolarizzata

$$I^\tau(\phi) = \int d^{4+\tau}[\frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi - \frac{\lambda}{4!}\mu^{-\tau}\phi^4]$$

In quanto segue assumiamo di rendere δ coomologica con l'introduzione di opportuni ghost; la (1.151) dice allora che I, a meno di cobordi, è costituita da combinazioni lineari di cocicli di δ appartenenti a P^0,

$$I = \sum_k c_k^0 I_k^0; \tag{1.153}$$

applicando δ alla (1.152) si ottiene

$$\delta R^\tau = 0 \tag{1.154}$$

cioè che anche R^τ si può esprimere in termini di cocicli di δ appartenenti a P^1:

$$R^\tau = \sum_k c_k^1 I_k^1. \tag{1.155}$$

Vogliamo ora ricavare le identità di Slavnov-Taylor per l'azione regolarizzata. Definiamo per comodità

$$I_\eta^\tau = I^\tau + \eta R^\tau \tag{1.156}$$

dove η è un parametro colle proprietà di un antighost (anticommutante e con numero di ghost -1). I_η^τ dà luogo al funzionale

$$W_\eta^\tau(J, \phi^*) = \int [d\phi] e^{iI^\tau + i\eta R^\tau + iJ\phi + i\delta\phi\phi^*} \tag{1.157}$$

e in seguito al cambio $\phi \longrightarrow \phi + \delta\phi$ (a jacobiano unitario) risulta, coi soliti ragionamenti

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\int [d\phi] e^{iI^\tau + i\eta R^\tau + iJ\phi + i\delta\phi\phi^*} (iJ\delta\phi + i\tau R^\tau) \\ &= (J \tfrac{\delta}{\delta\phi^*} + \tau \tfrac{\delta}{\delta\eta}) W_\eta^*. \end{aligned} \tag{1.158}$$

non è invariante per il cambio $\delta x^a = -sx^a$, $\delta\phi = s(x^a\partial_a + 1 + \frac{\tau}{2})\phi$ (il parametro anticommutante s va pensato come il ghost associato alle dilatazioni) per la presenza del termine d'interazione ed esattamente si ha

$$\delta I^\tau = s\tau \int d^{4+\tau} \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad \Longleftrightarrow \quad R^\tau = s\lambda I_1(\phi).$$

Un esempio di anomalia locale è dato dall'anomalia chirale nella teoria

$$I(\psi, A) = \int d^4x i\bar{\psi}\gamma^a \frac{1-\gamma_5}{2} \partial_a \psi - e\bar{\psi} \frac{1-\gamma_5}{2} \gamma^a A_a^{\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}} \psi;$$

l'anomalia deriva dal fatto che la matrice γ_5 non può essere estesa in $4+\tau$ dimensioni.

A livello di azione efficace la (1.158) si scrive

$$\frac{\delta\Gamma^\tau_\eta}{\delta\phi}\frac{\delta\Gamma^\tau_\eta}{\delta\phi^*} = \tau\frac{\delta\Gamma^\tau_\eta}{\delta\eta}. \tag{1.159}$$

Da calcoli perturbativi è noto che Γ^τ_η si può decomporre nella forma

$$\Gamma^\tau_\eta = I^\tau + \eta R^\tau + \hbar\Gamma^{(1)\tau}_\eta + O(\hbar^2) \tag{1.160}$$

con

$$\Gamma^{(1)\tau}_\eta = \frac{I^{(1)}}{\tau} + \Gamma^{(1)\tau}_f + \eta(\frac{\Delta}{\tau} + \Lambda^\tau_f); \tag{1.161}$$

$I^{(1)} \in P^0$ e $\Delta \in P^1$ sono funzionali locali finiti per $\tau \longrightarrow 0$, mentre $\Gamma^{(1)}_f$ e Λ^τ_f sono termini non locali. Inserendo lo sviluppo (1.160) in (1.159) si ottiene, all'ordine $\hbar$,

$$\frac{\delta I^\tau_\eta}{\delta\phi}\frac{\delta\Gamma^{(1)\tau}_\eta}{\delta\phi^*} + \frac{\delta\Gamma^{(1)\tau}_\eta}{\delta\phi}\frac{\delta I^\tau_\eta}{\delta\phi^*} = \tau\frac{\delta\Gamma^{(1)\tau}_\eta}{\delta\eta} = \Delta + \tau\Lambda^\tau_f; \tag{1.162}$$

la (1.162) per $\eta = 0$ si può anche scrivere[62]

$$\tau\frac{\delta\Gamma^{(1)\tau}_\eta}{\delta\eta} = \delta\Gamma^{(1)\tau}_\eta = \frac{\delta I^{(1)}}{\tau} + \delta\Gamma^{(1)\tau}_f \tag{1.163}$$

e moltiplicando per τ e facendo il limite $\tau \longrightarrow 0$ si ottiene

$$0 = \delta I^{(1)}. \tag{1.164}$$

Dunque $I^{(1)}$ si può scrivere come combinazione degli I^0_k e quindi ha la stessa forma di I: ha senso parlare di azione rinormalizzata al primo ordine[63]

$$I^\tau_R = I^\tau - \hbar\frac{I^{(1)}}{\tau}. \tag{1.165}$$

Usando I^τ_R in luogo di I^τ la (1.162) si scrive

$$\delta\Gamma^{(1)\tau}_R = \delta\Gamma^{(1)\tau}_f = \Delta + \tau\Lambda^\tau_f \tag{1.166}$$

[62] Usiamo la notazione abbreviata $\delta X \equiv I * X \equiv \frac{\delta I}{\delta\phi^*}\frac{\delta X}{\delta\phi} + \frac{\delta X}{\delta\phi^*}\frac{\delta I}{\delta\phi}$.

[63] Si noti che sebbene I_R abbia la stessa forma di I, ciò non accade per I^τ_R che contiene il termine I^τ non appartenente a P^0, cioè non BRST-invariante.

e per $\tau \longrightarrow 0$ risulta

$$\delta\Gamma_R^{(1)} = \Delta \tag{1.167}$$

ovvero

$$\delta\Gamma_R = \hbar\Delta \tag{1.168}$$

da cui la condizione di consistenza (di Wess-Zumino)

$$\delta\Delta = 0; \tag{1.169}$$

come conseguenza si ha che Δ è un cociclo di δ appartenente a P^1 e quindi della forma

$$\Delta = \mathcal{A} + \delta\mathcal{B} \tag{1.170}$$

con $\mathcal{A}$ rappresentativo di una classe di coomologia non banale di δ. È $\mathcal{A}$ che genera l'anomalia: è infatti possibile ridefinire

$$I_R'^{\tau} = I_R^{\tau} - \hbar\mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad \delta\Gamma_R' = \hbar\mathcal{A} \tag{1.171}$$

e quindi l'invarianza è preservata sse $\mathcal{A} = 0$.

Nel caso delle teorie di gauge chirali sono possibili diversi cocicli non banali; in particolare si prova che l'anomalia chirale assume la forma

$$\mathcal{A} = \int Tr[dC(AdA + \frac{1}{3}A^3)]. \tag{1.172}$$

Non insistiamo però su questo punto, per il quale rimandiamo alla bibliografia [15].

Appendice A

Convenzioni e appunti tecnici

A.1 Convenzioni destre e sinistre

In tutto questo lavoro si fa un abbondante uso di superoggetti, cioè di quantità con proprietà di commutazione o di anticommutazione dipendenti da un certo grado. Dedichiamo questo paragrafo allo studio di alcune loro proprietà formali.

Indichiamo con A e B dei superoggetti con grado $\sigma(A)$ e $\sigma(B)$ pari o dispari; in genere gli oggetti di grado pari (commutanti) saranno indicati con lettere latine a e b mentre gli oggetti di grado dispari (anticommutanti) saranno indicati con lettere greche α e β. Esempi di oggetti di tipo a sono i campi bosonici e i ghost dei fermioni; esempi di oggetti di tipo α sono i campi fermionici e i ghost dei bosoni. Definiamo l'utile simbolo

$$(-)^{AB} \equiv (-1)^{\sigma(A)\sigma(B)} \tag{A.1}$$

che vale sempre $+1$ tranne nel caso in cui sia A che B sono fermionici (in tal caso vale -1); le proprietà di commutazione e anticommutazione di A e B si scrivono allora

$$AB = (-)^{AB} BA. \tag{A.2}$$

Se vi sono più oggetti di grado diverso il grado di un prodotto equivale alla somma dei gradi:

$$\sigma(ABC\cdots) = \sigma(A) + \sigma(B) + \sigma(C) + \cdots \tag{A.3}$$

e quindi in particolare risulta

$$A(BC) = (-)^{A(B+C)}(BC)A. \tag{A.4}$$

Formule utili sono

$$(-)^{A^2} = (-)^A, \quad (-)^{-A} = (-)^A, \quad (-)^{A(A+1)} = +1. \tag{A.5}$$

Definiamo ora il concetto di supervettore.

In generale in teoria dei campi si ha a che fare con un multipletto $\phi = \phi^I = (\phi^i, \phi^\iota)$ di campi, alcuni commutanti (ϕ^i) ed altri anticommutanti (ϕ^ι); il superindice I dà la parità di Grassmann dei vari campi. Sulle funzioni polinomiali in ϕ si possono definire gli operatori differenziali

$$\partial_I = \frac{\partial}{\partial \phi^I} \tag{A.6}$$

che in seguito a trasformazioni

$$\phi^I \longrightarrow \phi^{I'}(\phi^I) \tag{A.7}$$

trasformano con la legge

$$\partial_{I'} = \frac{\partial \phi^I}{\partial \phi^{I'}} \partial_I = \Lambda_{I'}{}^I \partial_I. \tag{A.8}$$

Le derivate ∂_I si dicono sinistre in quanto soddisfano la regola di Leibniz sinistra

$$\partial_I(AB) = \partial_I A B + (-)^{IA} A \partial_I B; \tag{A.9}$$

è possibile anche definire le derivate destre $\overleftarrow{\partial}_I$ soddisfacenti

$$\overleftarrow{\partial}_I(AB) \equiv (AB)\overleftarrow{\partial}_I \equiv (AB)_{,I} = AB_{,I} + (-)^{IB} A_{,I} B; \tag{A.10}$$

su di esse assumiamo la legge di trasformazione

$$\overleftarrow{\partial}_{I'} = \overleftarrow{\partial}_I \frac{\overleftarrow{\partial}\phi^I}{\partial \phi^{I'}} = \overleftarrow{\partial}_I \Lambda^I{}_{I'}. \tag{A.11}$$

I differenziali destri e sinistri $\overleftarrow{d^I} = \overleftarrow{d}\phi^I$ e $d^I = d\phi^I$ si definiscono in maniera duale ai vettori sinistri e destri:

$$\partial_J \overleftarrow{d^I} = \delta_J{}^I, \quad d^I \overleftarrow{\partial}_J = \delta^I{}_J; \tag{A.12}$$

le leggi di trasformazione sono rispettivamente

$$\overleftarrow{d^{I'}} = \overleftarrow{d^I} \Lambda_I{}^{I'}. \tag{A.13}$$

$$d^{I'} = \Lambda^{I'}{}_I d^I \tag{A.14}$$

In generale diremo (componenti di un) vettore un oggetto con indici in alto w^I e (componenti di un) covettore un oggetto con indici in basso α_I con le trasformazioni seguenti[1]:

$$w^{I'} = w^I \Lambda_I{}^{I'}, \quad \alpha_{I'} = \Lambda_{I'}{}^I \alpha_I, \quad \text{convenzioni sud-est} \tag{A.15}$$

$$w^{I'} = \Lambda^{I'}{}_I w^I, \quad \alpha_{I'} = \alpha_I \Lambda^I{}_{I'}, \quad \text{convenzioni nord-est} \tag{A.16}$$

(nel seguito useremo per lo più convenzioni sud-est[2]). Il legame tra derivate destre e sinistre è dato dalla formula

$$\left.\frac{\delta f}{\delta g}\right|_r = (-)^{(f+1)g} \left.\frac{\delta f}{\delta g}\right|_l \tag{A.17}$$

[1]Le trasformazioni (A.15) e (A.16) si trovano imponendo rispettivamente l'invarianza degli operatori

$$w = w^I \partial_I, \quad \overleftarrow{\alpha} = \overleftarrow{\partial^I} \alpha_I$$

e

$$\overleftarrow{w} = \overleftarrow{\partial}_I w^I, \quad \alpha = \alpha_I \partial^I;$$

equivalentemente si può richiedere l'invarianza del prodotto scalare

$$w\overleftarrow{\alpha} = w^I \alpha_I, \quad \alpha\overleftarrow{w} = \alpha_I w^I.$$

[2]Ciò significa che gli indici ripetuti, su cui si somma, sono il primo in alto e il secondo in basso.

nel senso che risulta

$$\begin{aligned}
\left.\tfrac{\delta(ab)}{\delta g}\right|_r &= a\left.\tfrac{\delta b}{\delta g}\right|_r + (-)^{gb}\,\left.\tfrac{\delta a}{\delta g}b\right|_r \\
&= (-)^{(b+1)g}\; a\left.\tfrac{\delta b}{\delta g}\right|_l + (-)^{g(b+1+a)}\;\left.\tfrac{\delta a}{\delta g}b\right|_l \\
&= (-)^{(b+1+a)g}\big[(-)^{ga}a\left.\tfrac{\delta b}{\delta g}\right|_l + \left.\tfrac{\delta a}{\delta g}b\right|_l \\
&= (-)^{(b+a+1)g}\;\left.\tfrac{\delta(ab)}{\delta g}\right|_l .
\end{aligned} \tag{A.18}$$

A.2 Formalismo canonico

1. Parentesi di Poisson.

   In seguito alle proprietà della derivata della funzione composta è immediato verificare che derivando rispetto al tempo il multipletto ϕ^I si ottiene un vettore:

$$\dot{\phi}^{I'} = \dot{\phi}^I \frac{\partial \phi^{I'}}{\partial \phi^I}; \tag{A.19}$$

   un covettore si ottiene derivando l'azione rispetto a $\dot{\phi}$: si hanno infatti i momenti coniugati canonici

$$\pi_I \equiv \frac{\delta I}{\delta \dot{\phi}^I}, \quad \pi_{I'} = \Lambda_{I'}{}^I \pi_I. \tag{A.20}$$

   In generale le funzioni polinomiali $F(\phi, \pi)$ di grado $(-)^F$ costituiscono le varibili dinamiche della teoria e su di esse si definiscono le parentesi di Poisson graduate[3]

$$[F, G] \equiv -F^{,I}\partial_I G + (-)^{FG} G^{,I}\partial_I F. \tag{A.21}$$

   Valgono le seguenti proprietà:

[3] Si possono scrivere anche

$$[F, G] = -F^{,I}\partial_I G + (-)^I F_{,I}\partial^I G.$$

(a) Antisimmetria graduata

$$[F,G] = -(-)^{FG}[G,F] \tag{A.22}$$

(b) [G,] è una derivata sinistra di grado $(-)^G$

$$[G,FH] = [G,F]H + (-)^{FG}F[G,H] \tag{A.23}$$

(c) [,H] è una derivata destra di grado $(-)^H$

$$[GF,H] = G[F,H] + (-)^{HF}[G,H]F \tag{A.24}$$

(d) Identità di Jacobi graduata

$$\sum_{cicl}(-)^{FH}[F,[G,H]] = 0 \tag{A.25}$$

(e) Sulle variabili canoniche risulta

$$[\phi^I, \pi_J] = (-)^{IJ}\delta_J{}^I, \quad [\pi_I, \phi^J] = -\delta_I{}^J. \tag{A.26}$$

A livello quantistico le variabili dinamiche diventano operatori e le parentesi di Poisson graduate sono sostituite dai commutatori graduati $-i[\ ,\ \}$.

2. Antiparentesi di Batalin-Vilkovisky

Come si è visto, nella prova delle identità di Slavnov-Taylor è conveniente introdurre degli anticampi $\phi^* = \phi_I$ di grado $I+1$ opposto a quello dei campi ordinari ϕ^I, e che trasformano come covettori sinistri (in tal modo il prodotto $\delta\phi\phi^* = \delta\phi^I\phi_I$ è invariante); tali anticampi permettono di definire le antiparentesi di Batalin-Vilkovisky

$$(F,G) \equiv F_{,I}\partial^I G - G^{,I}\partial_I F. \tag{A.27}$$

Le antiparentesi possiedono le seguenti proprietà:

(a) Antisimmetria graduata

$$(F,G) = -(-)^{(F+1)(G+1)}(G,F) \tag{A.28}$$

(b) (G,) è una derivata sinistra di grado $(-)^{G+1}$

$$(G,FH) = (G,F)H + (-)^{(G+1)F}F(G,H) \tag{A.29}$$

(c) (,H) è una derivata destra di grado $(-)^{H+1}$

$$(GF,H) = G(F,H) + (-)^{(H+1)F}(G,H)F \tag{A.30}$$

(d) Identità di Jacobi graduata

$$\sum_{cicl}(-)^{(F+1)(H+1)}(F,(G,H)) = 0 \tag{A.31}$$

(e) Sulle variabili canoniche risulta

$$(\phi^I, \phi_J) = \delta^I{}_J, \quad (\phi_I, \phi^J) = -\delta_I{}^J \tag{A.32}$$

A.3 Simmetrie e leggi di conservazione

In questo paragrafo illustriamo alcuni punti notevoli sul legame tra simmetrie e leggi di conservazione.

1. Il teorema di Noether per simmetrie interne (globali).

   Supponiamo di avere una teoria su dei campi ϕ descritti da un'azione invariante per una classe di trasformazioni infinitesime $\delta\phi(\phi)$ indipendenti dalle derivate di ϕ (simmetrie interne). Ad ogni trasformazione è associata una carica conservata. Infatti risulta (usiamo le convenzioni sinistre)

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_\Omega d^D x[\delta\phi \tfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} + \partial_a\delta\phi\tfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_a\phi}] \\
&= \int_\Omega d^D x[\delta\phi(\tfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_a\tfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_a\phi}) + \partial_a(\delta\phi\tfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_a\phi})] \\
&= \text{ usando le equazioni del moto} \\
&= \int_\Omega d^D x \partial_a j^a = 0
\end{aligned} \tag{A.33}$$

   sse

$$\partial_a j^a = 0, \quad j^a = \delta\phi\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_a\phi}; \tag{A.34}$$

   la corrente j^a permette di definire la carica conservata[4]

$$Q = \int d^{D-1}xj^0 = \int d^{D-1}x\delta\phi\pi. \tag{A.35}$$

[4]Basta scrivere $\partial_a j^a = \partial_0 j^0 + \partial_i j^i = 0$ integrare su dx^{D-1} e sfruttare il teorema di Gauss per avere $\int d^{D-1}x\partial_0 j^0 = \partial_0 Q = 0$.

In particolare se su ϕ agiscono trasformazioni lineari del tipo $\delta\phi^I = \varepsilon^{\mathcal{A}}\phi^J T_{\mathcal{A}J}{}^I$ (e quindi sui momenti $\delta\pi_I = -\varepsilon^{\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}I}{}^J \pi_J$) vi sono delle cariche Q_A della forma

$$Q_{\mathcal{A}} = \int d^{D-1}x\phi T_{\mathcal{A}}\pi. \tag{A.36}$$

Tali cariche generano le simmetrie tramite l'azione delle parentesi di Poisson, nel senso che vale l'identità

$$\delta f = \delta\phi^I \partial_I f + f^{,I}\delta\pi_I = (\varepsilon^{\mathcal{A}}\phi T_{\mathcal{A}})^I \partial_I f - f^{,I}(\varepsilon^{\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}}\phi)_I = [f, \varepsilon^{\mathcal{A}} Q_{\mathcal{A}}] \tag{A.37}$$

di immediata dimostrazione. Risulta inoltre

$$[Q_{\mathcal{A}}, Q_{\mathcal{B}}] = C_{\mathcal{AB}}{}^{\mathcal{C}} Q_{\mathcal{C}}. \tag{A.38}$$

Nota: a livello quantistico le parentesi di Poisson sono sostituite da commutatori e anticommutatori secondo la ricetta

$$[f, g\}_P \longrightarrow -i[\hat{f}, \hat{g}\}. \tag{A.39}$$

2. Il teorema di Noether per simmetrie spaziotemporali (globali).

   Supponiamo di avere una teoria invariante per un gruppo di trasformazioni spaziotemporali che coinvolgono contemporaneamente le coordinate, i campi e le loro derivate; il cambio di coordinate infinitesimo sia dato da

$$x' = x + \varepsilon^\Gamma K_\Gamma \tag{A.40}$$

   e il cambio dei campi Φ da

$$\Phi'(x') = \Phi(x)\Lambda(x) \tag{A.41}$$

   ovvero

$$\delta_I \Phi = \Phi'(x') - \Phi(x) = \Phi(x)\delta\Lambda(x) = \varepsilon^\Gamma \Phi W_\Gamma \tag{A.42}$$

e si può spezzare in un cambio di coordinate più un cambio funzionale:

$$\delta_I \Phi = (\Phi'(x') - \Phi'(x)) + (\Phi'(x) - \Phi(x)) = \delta_C \Phi + \delta \Phi \tag{A.43}$$

con

$$\delta_C \Phi \simeq \Phi(x') - \Phi(x) = \delta x^a \partial_a \Phi, \quad \delta x^a = \varepsilon^\Gamma K^a_\Gamma \tag{A.44}$$

e

$$\delta \Phi = \Phi'(x) - \Phi(x) = -\delta x^a \partial_a \Phi + \Phi \delta \Lambda. \tag{A.45}$$

L'invarianza dell'azione per il gruppo G permette di definire delle correnti a divergenza nulla (e quindi delle cariche conservate) associate alle simmetrie; infatti

$$\begin{aligned}
\delta I &= \textstyle\int_\Omega \delta d^D x \mathcal{L} + d^D x \delta \mathcal{L} \\
&= \textstyle\int_\Omega d^D x (\partial_a \delta x^a \mathcal{L} + \delta x^a \partial_a \mathcal{L} + \delta \Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\delta \Phi} + \delta \partial_a \Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \Phi}) \\
&= \textstyle\int_\Omega d^D x [\partial_a \delta x^a \mathcal{L} + \delta x^a \partial_a \mathcal{L} + \partial_a (\delta \Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \Phi}) + \delta \Phi (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \Phi})] \\
&= \text{ usando le equazioni del moto} \\
&= \textstyle\int_\Omega d^D x \partial_a (\delta x^a \mathcal{L} + \delta \Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \Phi}) \\
&= \textstyle\int_\Omega d^D x \partial_a [\delta x^b (\mathcal{L} \delta^a_b - \partial_b \Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \Phi}) + \delta_I \Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \Phi}] \\
&= \textstyle\int_\Omega d^D x \partial_a \{\varepsilon^\Gamma [K^a_\Gamma (\mathcal{L} \delta^a_b - \partial_b \Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \Phi}) + \phi W_\Gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \Phi}]\} \\
&= \textstyle\int_\Omega d^D x \varepsilon^\Gamma \partial_a j^a_\Gamma = 0.
\end{aligned} \tag{A.46}$$

sse

$$\partial_a j^a = 0, \quad j^a_\Gamma = K^b_\Gamma (\mathcal{L} \delta^a_b - \partial_b \Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \Phi}) + \Phi W_\Gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \Phi}. \tag{A.47}$$

Nel caso delle simmetrie di Poincarè[5] le correnti j^a_b e j^a_{bc} sono associate rispettivamente alla conservazione dell'impulso e del momento angolare e danno i tensori

$$j^a_b = \tilde{T}_b{}^a = \eta^a_b \mathcal{L} - \partial_b \Phi \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_a \Phi}, \tag{A.49}$$

$$j^a_{bc} = \tilde{M}_{bc}{}^a = x_b T_c{}^a - x_c T_b{}^a + \Phi \Sigma_{bc} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_a \Phi}; \tag{A.50}$$

in generale $\tilde{T}_{ab}$ non è simmetrico, ma può essere sempre simmetrizzato aggiungendo un opportuno oggetto del tipo $-\frac{1}{2}\partial^c \mathcal{S}_{abc}$, antisimmetrico in b ed c, e che quindi non cambia la proprietà di conservazione[6]. L'oggetto opportuno in questione è

$$\mathcal{S}_{abc} = 2S_{a[bc]} + S_{cba} \tag{A.51}$$

con S_{abc} antisimmetrico in a e b dato da

$$S_{abc} = \mathcal{S}_{[ab]c} = \Phi \Sigma_{ab} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial^c \Phi}. \tag{A.52}$$

La simmetria di T_{ab} si verifica sfruttando la conservazione del momento angolare

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^a M_{bca} \\ &= \partial^a (2x_{[b} \tilde{T}_{c]a} + S_{bca}) \\ &= 2\tilde{T}_{[cb]} + \partial^a S_{bca} \\ &= 2(\tilde{T}_{[cb]} + \tfrac{1}{2}\partial^a \mathcal{S}_{[bc]a}) \\ &= 2T_{[cb]}. \end{aligned} \tag{A.53}$$

[5] Le trasformazioni di Poincarè sulle coordinate e sui campi colle convenzioni presenti si scrivono

$$\delta x^a = x_b \varepsilon^{ba} + \varepsilon^a, \quad \delta_I \Phi = \frac{1}{2}\Phi \Sigma_{ab} \varepsilon^{ab}; \tag{A.48}$$

i parametri del gruppo sono $\varepsilon^\Gamma = (\varepsilon^{ab}, \varepsilon^c)$.

[6] $\partial^b \tilde{T}_{ab} = 0,\ T_{ab} = \tilde{T}_{ab} - \frac{1}{2}\partial^c \mathcal{S}_{a[bc]} \Longrightarrow \partial^b T_{ab} = 0.$

Osserviamo per concludere che usando il tensore $\tilde{T}_{ab}$ il tensore momento angolare-boost si può scrivere nella forma più semplice

$$\tilde{M}_{abc} = 2x_{[a}\tilde{T}_{b]c} + \text{ divergenza} \tag{A.54}$$

come è immediato verificare.

Bibliografia

[1] Bjorken-Drell,“ Relativistic quantum fields”, Mac Grow-Hill (1964)

[2] Mandl-Shaw, “Quantum fields theory”, Wiley and Sons (1984)

[3] Weinberg, “Gravitation and Cosmology”, Wiley and Sons (1972)

[4] Wald, “General Relativity”, The University of Chicago (1984)

[5] Nakanishi-Ojima, “Covariant operator formalism of gauge theories and general relativity”, World Scientific (1990)

[6] Kugo-Ojima, “Covariant operator formalism of gauge theories”, Suppl. of the Progress of Theoretical Physics 66 (1979)

[7] Kugo-Uehara, “The form of BRS-invariant operators”, Progress of Theoretical Physics 64 1395 (1980)

[8] Pierre Ramond, “Quantum field: a modern primer”, Frontiers in Physics (1981)

[9] Bogoliubov-Shirkov, “Theory of quantizated fields”, Wiley and Sons (1980)

[10] Itzykson-Zuber, “Quantum Fields theory”, Mc Graw-Hill (1980)

[11] Pokorsky, “Gauge field theories”, Cambridge monographs on mathematical Physics (1989)

[12] Baulieu, “Perturbative gauge theories”, Physics Reports 129 (1985) 1-74

[13] van Niewenhuizen, “Supergravity”, Physics Reports 68 189 (1981)

[14] Das, Friedman, “Quantization of spin $\frac{3}{2}$ fields”, Nuclear Physics B114 271 (1976)

[15] M. Tonin, “Dimensional regularization and anomalies in chiral gauge theories”, Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.) 29B,C (1992) 137-151